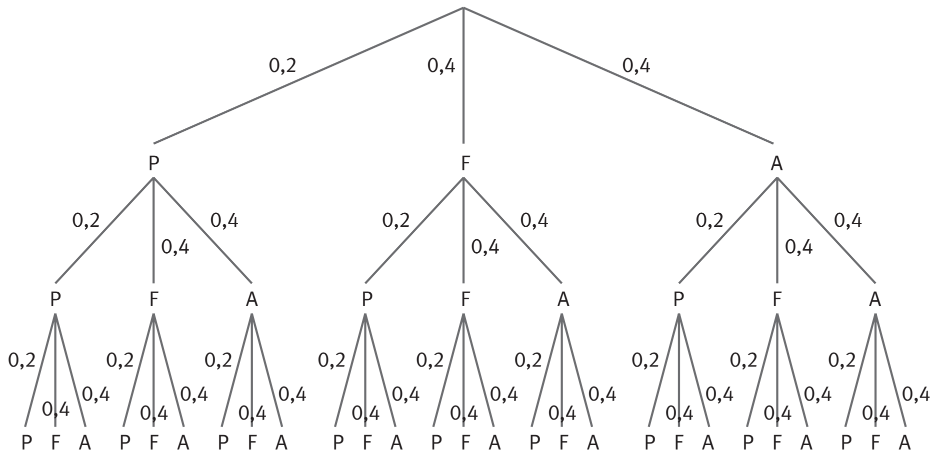
Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Wahrscheinlichkeits-verteilungen

7

1.1 P: Puzzle, F: Spielfigur, A: Spielauto



a) Zum Ereignis „mindestens ein Puzzle“ gehören die Pfade PPP, PPF, PPA, PFP, PFF, PFA, PAP, PAF, PAA, FPP, FPF, FPA, FFP, FAP, APP, APF, APA, AFP, AAP. Also ist P („mindestens ein Puzzle“) = 0,2 · 0,2 · 0,2 + 0,2 · 0,2 · 0,4 + 0,2 · 0,2 · 0,4 + 0,2 · 0,4 · 0,2 + … + 0,4 · 0,4 · 0,2 + 0,4 · 0,4 · 0,2 = 0,488.
Einfacher ist hier der Weg über das Gegenereignis „kein Puzzle“. Zu diesem Gegenereignis gehören 8 Pfade, deren Pfadwahrscheinlichkeit jeweils 0,4 · 0,4 · 0,4 beträgt.
Also P („mindestens ein Puzzle“) = 1 – P („kein Puzzle“) = 1 – 0,4 · 0,4 · 0,4 · 8 = 0,488.

b) P („nicht drei Spielfiguren“) = 1 – P („drei Spielfiguren“) = 1 – 0,4 · 0,4 · 0,4 = 0,936

1.2 J: treibt regelmäßig Sport, N: treibt nicht regelmäßig Sport

a) In einem Baumdiagramm gehören zum genannten Ereignis die Pfade JJN, JNJ, NJJ mit jeweiliger Pfadwahrscheinlichkeit 0,85 · 0,85 · 0,15.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 3 · 0,85 · 0,85 · 0,15 ≈ 0,325.

b) Zum genannten Ereignis gehören die Pfade JJNN, JNJN, JNNJ, NJJN, NJNJ, NNJJ mit jeweiliger Pfadwahrscheinlichkeit 0,85 · 0,85 · 0,15 · 0,15.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also 6 · 0,85 · 0,85 · 0,15 · 0,15 ≈ 0,098.

2.1

	IQ von Z1 ≤ 115	**IQ von Z1 > 115**	**Summe**
IQ von Z2 ≤ 115	0,78	0,06	0,84
IQ von Z2 > 115	0,06	0,1	0,16
Summe	0,84	0,16	1

Beispiele für mögliche Aussagen:

- Die Wahrscheinlichkeit, einen IQ > 115 zu haben, beträgt für Z1 wie für Z2 0,16.
- P („Z2 hat IQ > 115, wenn Z1 IQ > 115 hat“) = $\frac{0,1}{0,16} \approx 0,625$
- Da die genannten bedingten Wahrscheinlichkeiten nicht den Randwahrscheinlichkeiten (0,16) entsprechen, kann man schließen, dass die Intelligenzquotienten von Zwillingen nicht stochastisch unabhängig sind.

Entdecken

- Individuelle Lösungen. Beispiel: Elio hat zwar die halbe Punktzahl erreicht. Damit ist aber noch nicht gesagt, dass er besser als die Hälfte seiner Mitbewerber ist. Um eine solche Aussage treffen zu können, muss man wissen, wie viele Mitbewerber welche Punktzahlen errungen haben.
- Individuelle Lösungen. Beispiel: Das x steht für Mayas Befund, also für 0,7. Die roten Grenzen geben an, welche TSH-Werte medizinisch unauffällig sind, also den Referenzbereich von 0,5 bis 2,5. In diesem Intervall liegen die TSH-Werte der meisten Menschen. Mayas Befund ist niedrig, gilt aber noch als medizinisch unauffällig.

Aufgaben

1 **a)** Keine Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Wahrscheinlichkeiten ergänzen sich nicht zu 1.
b) Wahrscheinlichkeitsverteilung: In der ersten Zeile werden alle möglichen Werte genannt, in der zweiten Zeile die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Werte. Diese ergänzen sich zu 1.
c) Keine Wahrscheinlichkeitsverteilung: In der ersten Zeile werden nicht alle möglichen Werte einer Zufallsgröße genannt, sondern willkürliche, sich zum Teil überschneidende Ereignisse. Nur zufällig ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1.
d) Keine Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Aufklärungswahrscheinlichkeiten geben nicht an, wie wahrscheinlich die in der ersten Zeile genannten Werte sind, sondern andere Wahrscheinlichkeiten.

2 **a)** 1 Kein Histogramm einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Fläche ist größer als 1.
2 Kein Histogramm einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern ein Balkendiagramm: Die Werte auf der x-Achse sind nicht skaliert, somit hat die Flächenberechnung keinen Sinn.
3 Möglicherweise das Histogramm einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Gesamtfläche ist 1, die Achsen sind skaliert.
4 Möglicherweise das Histogramm einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung: Die Gesamtfläche ist 1, die Achsen sind skaliert.
b) Kriterien: Gesamtfläche 1, skalierte Achsen

3 **a)** Für die Werte in der ersten Zeile ist zu beachten, dass sie alle möglichen Werte einer Zufallsgröße auflisten, z. B. das Monatseinkommen eines Privathaushaltes:

Mögliche Werte der Zufallsgröße	0 bis unter 1000	1000 bis unter 2500	2500 bis unter 4500	4500 bis 2000000
Wahrscheinlichkeit	0,15	0,42	0,4	0,03

b) Es ist zu beachten, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 ergibt. Beispiel Punktzahl in einer Klausur:

Mögliche Werte der Zufallsgröße	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wahrscheinlichkeit	0	0	0,05	0,05	0	0,15	0,1	0	0,2	0,25	0,10

Mögliche Werte der Zufallsgröße	11	12	13	14	15
Wahrscheinlichkeit	0	0,05	0	0,05	0

Nachgefragt

- Adrian hat nicht Recht. Die in der ersten Zeile der Tabelle aufgelisteten Werte müssen alle möglichen Werte einer Zufallsgröße sein.
- Christoph hat Recht. Der Flächeninhalt eines solchen Balkens hat in diesem Fall die gleiche Maßzahl wie seine Höhe.
- Ein Gegenbeispiel ist das Histogramm zum TSH-Wert. Nicht die Höhe entspricht der Wahrscheinlichkeit, sondern die Fläche.

4 **a)** $P(200 \le X \le 400) = 200 \cdot 0{,}0011 = 0{,}22$

b) $P(400 \le X \le 600) = 100 \cdot 0{,}0045 + 100 \cdot 0{,}0025 = 0{,}7$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Busfahrer eine Reaktionszeit zwischen 300 und 550 ms hat, beträgt 0,685.

d) Die Wahrscheinlichkeit, eine Reaktionszeit über 550 ms zu haben, beträgt $50 \cdot 0{,}0025 + 200 \cdot 0{,}0002 = 0{,}165$. 16,5 % der Busfahrer schneiden schlechter als Niklas ab; er gehört also nicht zu den schlechtesten 15 %.

e)

Reaktionszeit in ms	0 bis < 200	200 bis < 400	400 bis < 500	500 bis < 600	600 bis 800	**Summe**
Wahrscheinlichkeit	0,04	0,22	0,45	0,25	0,04	**1**

f) Nein, die Intervallbreiten können auch anders gewählt werden, dann ändern sich die Wahrscheinlichkeiten entsprechend.

5 Lösung im Schulbuch.

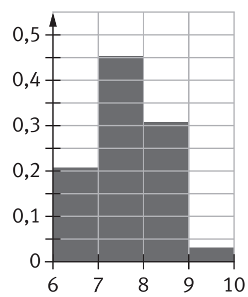
6 **a)** Summe aller Rechtecksflächen: $3 \cdot 0{,}033 + 3 \cdot 0{,}083 + 3 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}067 + 2 \cdot 0{,}05 = 1$

b) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht der Fläche über dem angegebenen Intervall: $3 \cdot 0{,}05 = 0{,}15$.

c) Die Zufallsgröße kann nur bestimmte Werte annehmen (hier sogar nur endlich viele).

7 **a)**

JDT in °C	6 bis unter 7	7 bis unter 8	8 bis unter 9	9 bis unter 10	**Summe**
Anzahl Jahre	27	59	40	4	**130**
Anteil (gerundet)	0,208	0,454	0,308	0,031	**1,001**



Alle Intervalle haben die Breite 1, deshalb sind die Maßzahlen der Höhen gleich den Maßzahlen der Flächen.

b) $P(X \ge 8) = 0{,}308 + 0{,}031 = 0{,}339$

c) $p = 0{,}339^8 \approx 0{,}000174$

d) Individuelle Lösungen. Beispiel: Die mittleren 70 % der Werte gelten als normal. Die 15 % kleinsten Werte gelten als zu kalt, die 15 % größten Werte gelten als zu warm. Die Grenzen ergeben sich aus den Flächen im Histogramm: Für die untere Grenze x_u muss gelten: $(x_u - 6) \cdot 0{,}208 = 0{,}15$. Damit ist $x_u \approx 6{,}7$. Die obere Grenze x_o liegt im Intervall zwischen 8 und 9. Da zwischen 9 und 10 schon 3,1 % der Werte liegen, muss gelten: $(9 - x_o) \cdot 0{,}308 = 0{,}119$. Damit ist $x_o \approx 8{,}6$.
Alternativ kann man auch schätzen: Im ersten Rechteck liegen schon etwa 20 % der Werte. Also muss man die Grenze nach $\frac{3}{4}$ des ersten Rechtecks ziehen, also bei 6,75.

Im letzten Rechteck liegen etwa 3 % der Fläche. Man braucht also noch etwa 12 %. Im vorletzten Rechteck liegen etwa 30 % der Fläche. Die obere Grenze muss man also so ziehen, dass sie $\frac{2}{5}$ des vorletzten Rechtecks abschneidet, also bei 8,6.

8 **a)** Es sind doppelt so viele Rechtecke, die jeweils halb so breit sind. Die Höhen der beiden Rechtecke, die jeweils eines der ursprünglichen Rechtecke ersetzen, sind im Mittel so hoch wie das ursprüngliche Rechteck. Das Histogramm ist also feiner gestuft, der Flächeninhalt bleibt 1.

b) Das Histogramm wäre so fein gestuft, dass sein Rand fast glatt, also wie der Graph einer stetigen Funktion aussähe.

9 **a)** Es wird die Lage dieser Daten ermittelt. Sie liegen zwischen 0 und 1,1. Dann wird das Intervall in eine Anzahl von Intervallen eingeteilt, z. B. in lauter Intervalle der Breite 0,1. Dann werden die relativen Häufigkeiten berechnet: Welcher Anteil der Daten liegt im jeweiligen Intervall? Die Höhen der Rechtecke werden berechnet, indem die relativen Häufigkeiten durch die Breite der Intervalle geteilt werden. Die Rechtecke werden über einer Achse von 0 bis 1,1 gezeichnet.

b) Je schmaler die Intervalle sind, umso feiner ist das Histogramm gestuft, umso glatter ist sein Rand. Stets bleibt die Gesamtfläche gleich groß, ihr Flächeninhalt beträgt immer 1.

c) Individuelle Fragen. Beispiele: Unter welcher Grenze liegen 15 % der Werte? Welcher Anteil der Werte liegt über 0,5?

d) Individuelle Fragen. Beispiele: Kommt der Wert 0,44 vor? Wie häufig kommt die 1 vor? Wie groß ist das arithmetische Mittel? Wie groß ist die Spannweite?

10 Aus dem Histogramm erkennt man: 20 % der Werte liegen zwischen 0 und 2, 50 % zwischen 2 und 4 und 30 % zwischen 4 und 6. Aus dem Histogramm lässt sich nicht erkennen, zu welchem Intervall die Ränder gezählt werden. Mögliche Datensätze:
(1; 1; 3; 3; 3; 3,5; 4; 4,5; 5; 6) oder
(0,8; 1,5; 1,6; 1,7; 2,1; 2,1; 2,4; 2,8; 3; 3,1; 3,7; 3,7; 3,8; 3,9; 4; 4,1; 4,6; 5,2; 5,5; 5,5).

Nachgefragt

- Das stimmt genau dann, wenn die Intervallbreiten nicht 1 betragen.
- Das ist richtig, die Intervallbreiten sind wählbar.
- Das ist falsch, ein Gegenbeispiel liefert Aufgabe 10.

Entdecken

- Individuelle Antworten. Beispiel: Man kann ohne Kenntnis der Verteilung eine Grenze schätzen, denn Erwartungswert und Standardabweichung liefern wichtige Hinweise auf die Verteilung. Der Erwartungswert gibt die durchschnittliche Fehlerzahl der Eichstichprobe an. Wenn Polina weit unterhalb dieser durchschnittlichen Fehlerzahl liegt, so ist ihre Konzentrationsleistung weit überdurchschnittlich. Der Begriff „weit unterdurchschnittliche Fehlerzahl“ muss aber noch präzisiert werden. Die Standardabweichung ist ein Maß dafür, wie stark die Fehlerzahlen in der Eichstichprobe vom Erwartungswert abweichen. Weicht Polinas Ergebnis stärker als die Standardabweichung von der mittleren Fehlerzahl ab, so ist ihr Ergebnis außergewöhnlich.
- Die Begriffe „Erwartungswert“ und „Standardabweichung“ wurden im Zusammenhang mit Binomialverteilungen in Klasse 10 schon besprochen. Der Erwartungswert war in diesem Zusammenhang der Mittelwert der Trefferzahl, die Standardabweichung war ein Maß für die Breite der Verteilung.

Aufgaben

1 **a)** $E = 21 \cdot 0{,}2 + 22 \cdot 0{,}3 + 23 \cdot 0{,}3 + 24 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}1 = 22{,}6$
$\sigma^2 = 1{,}6^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 + 1{,}4^2 \cdot 0{,}1 + 2{,}4^2 \cdot 0{,}1 = 1{,}44$ und damit $\sigma = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2$
b) $E = 22{,}65$ und $\sigma \approx 1{,}424$
c) $E = 1{,}35$ und $\sigma \approx 0{,}136$ (ohne die letzte Spalte der Tabelle zu berücksichtigen)

2 Lösung im Schulbuch.

3 **a)** Mit einer Tabelle wie in Aufgabe 2 ergibt sich $E = 22{,}25$ und $\sigma \approx 2{,}242$. Die σ-Umgebung um E ist also das Intervall von 20,01 bis 24,49 (bei anderer Rundung von 20,0 bis 24,5). In der σ-Umgebung um E liegen also die BMI-Werte 21, 22, 23 und 24 (bei anderer Rundung zusätzlich 20).
b) $E + 2\sigma \approx 26{,}7$. Die BMI-Werte, die größer als diese Grenze sind, sind also 27, 28, 29 und 30. Durch Aufsummieren der entsprechenden Anteile erhält man einen Anteil von 0,04 oder 4 %.

4 **a)** Anmerkung: Alle Dezimalzahlen sind gerundet.

k_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	**Summe**
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**
$k_i \cdot p_i$	0,056	0,167	0,333	0,556	0,833	1,167	1,111	1	0,833	0,611	0,333	**7**
$(k_i - E)^2 \cdot p_i$	0,694	0,889	0,75	0,444	0,139	0	0,139	0,444	0,75	0,889	0,694	**5,833**

b) Aus der Tabelle ergibt sich $E = 7$ und $\sigma = \sqrt{5{,}833} \approx 2{,}415$.
c) Die σ-Umgebung um E ist mit den Werten aus Teilaufgabe b) das Intervall von 4,585 bis 9,415. In der σ-Umgebung um E liegen also die Augensummen 5, 6, 7, 8 und 9. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $P(5 \le X \le 9) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{2}{3}$.

Nachgefragt

- Die Aussage stimmt: Der „Klausurschnitt“ ist der Erwartungswert der Verteilung. Diese verschiebt sich bei gleichbleibender Form um 2 nach rechts. Damit verschiebt sich auch der Erwartungswert um 2 nach rechts.
- Die Aussage stimmt: Da die Verteilung ihre Form, insbesondere ihre Breite, nicht ändert, ändert sich auch an der Standardabweichung nichts.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln und Berechnung von E und σ:

k_i	1	2	3	4	5	6	**Summe**
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	**1**
$k_i \cdot p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	**3,5**
$(k_i - E)^2 \cdot p_i$	$2{,}5^2 \cdot \frac{1}{6}$	$1{,}5^2 \cdot \frac{1}{6}$	$0{,}5^2 \cdot \frac{1}{6}$	$0{,}5^2 \cdot \frac{1}{6}$	$1{,}5^2 \cdot \frac{1}{6}$	$2{,}5^2 \cdot \frac{1}{6}$	**~ 2,92**

Beim Würfeln mit einem normalen Würfel ist der Erwartungswert E = 3,5 und die Standardabweichung $\sigma \approx \sqrt{2{,}92} \approx 1{,}71$.

5 Individuelle Lösungen. Beispiel: Den geforderten Erwartungswert erreicht man am leichtesten, wenn man symmetrische Verteilungen wählt, etwa:

k_i	4	5	6
p_i	0,3	0,4	0,3

und

k_i	4	5	6
p_i	0,001	0,998	0,001

Im ersten Beispiel ist $\sigma \approx 0{,}775$; im zweiten Beispiel ist $\sigma \approx 0{,}045$.

6 **a)** Individuelle Lösungen. Beispiele:
- Meryems Verfahren ist genauer, da die Intervalle feiner unterteilt sind.
- Beide Verfahren sind gleich genau, da sie nur unterschiedliche Verteilungen innerhalb der Intervalle annehmen. An der Summe der $k_i \cdot p_i$ ändert sich nichts.

b) Meryem: $E \approx 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}033 + 2 \cdot 0{,}033 + 3 \cdot 0{,}033 + 4 \cdot 0{,}05 + ... + 15 \cdot 0{,}083 = 9{,}05$
Frieda: $E \approx 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}15 + 8 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}2 + ... + 14 \cdot 0{,}25 = 9{,}05$
Beide Verfahren führen auf denselben Schätzer für den Erwartungswert.

c) Bei kontinuierlichen Skalen auf der x-Achse kann man Meryems Verfahren nicht anwenden, denn in jedem Intervall liegen unendlich viele Dezimalzahlen. Friedas Verfahren, die Intervallmitten als k_i zu benutzen, funktioniert:

k_i	45,5	50	52,5	55,5	58,5
p_i	0,1	0,15	0,5	0,15	0,1

Es führt auf den Schätzwert $E \approx 52{,}48$.

7 erste Verteilung: E = 10, σ = 3
zweite Verteilung: E = 8, σ = 2
dritte Verteilung: E = 12, σ = 3

8 **a)** Silbentest: E = 3,43 und σ ≈ 0,92. Wörtertest: E = 3,43 und σ ≈ 1,60.
b) Silbentest: 0,82. Wörtertest: 0,4.
c) Silbentest: Die σ-Umgebung um E enthält die Werte 3 und 4. Der Anteil ist also wie bei Teilaufgabe b) 0,82. Wörtertest: Die σ-Umgebung um E enthält die Werte 2, 3, 4 und 5. Der Anteil ist also, anders als in Teilaufgabe b), 0,72.

d) Die x-Achsen sind gleich skaliert. Die Histogramme umfassen dasselbe Intervall. Die Verteilungen haben dieselbe Mittellage. Das Histogramm des Silbentests hat ein deutlicheres Maximum, für kleine und große x-Werte fallen die y-Werte deutlicher ab. Die Unterschiede der Rechteckshöhen im Histogramm des Wörtertests sind vergleichsweise klein. Auch für kleine und große x-Werte bleiben die y-Werte groß.

9 Der Erwartungswert verdoppelt sich, da jeder Summand in der Berechnung des Erwartungswerts mit dem Faktor 2 multipliziert wird.
Die Standardabweichung verdoppelt sich auch, da auch die Abstände auf der x-Achse verdoppelt werden. Der Anteil innerhalb der σ-Umgebung um E bleibt dagegen gleich: Die σ-Umgebung ist zwar doppelt so breit, aber es liegen nicht mehr x-Werte darin. Die zu diesen x-Werten gehörigen Wahrscheinlichkeiten bleiben ebenfalls gleich.

10 a) Madita hat ein Ergebnis, das mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert entfernt ist. Sandro hat ein Ergebnis, das weniger als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht. Also ist der Anteil der Personen, die im IST einen Wert über 112 erzielen kleiner als der Anteil der Personen, die im WAIS Wert über 112 erzielen. Madita ist intelligenter.
b) 115 im WAIS ist gerade eine Standardabweichung über dem Erwartungswert, entspricht also 110 im IST.

11 Individuelle Lösungen. Beispiel: Wenn es um Einzelfallbetrachtungen geht, dann ist die Spannweite manchmal ein aussagekräftiges Maß. Die Spannweite der Punkteverteilung einer Klausur kann 15 betragen (Notenpunktzahlen von 0 bis 15 kommen vor). Daraus könnte man schließen, dass mindestens eine(n) Schüler(in) gibt, der / die besondere Hilfen braucht. Man kann auch schließen, dass die Klausur grundsätzlich lösbar war, denn mindestens ein(e) Schüler(in) konnte alles.
Wenn es aber um Betrachtungen der Gesamtheit geht, dann ist die Standardabweichung ein besseres Maß. Eine große Standardabweichung ließe den Schluss zu, dass die Klausur gut differenziert hat, dass also Leistungsunterschiede sich auch tatsächlich auf die Klausurergebnisse auswirken. Eine sehr kleine Standardabweichung dagegen ließe darauf schließen, dass die meisten Schülerinnen und Schüler im mittleren Bereich abgeschnitten haben, dass also Leistungsunterschiede zwischen den Schüler(inne)n entweder kaum existieren oder durch die ungeschickte Auswahl der Aufgaben nicht zutage treten.

12 Ergebnisse der Experimente:
1 Das stimmt.
2 Der Erwartungswert ändert sich nicht, die Standardabweichung wir aber kleiner.
3 Der Erwartungswert wächst, falls die neuen Werte extrem groß sind, er sinkt, wenn die neuen Werte extrem klein sind. Er bleibt gleich, wenn gleichermaßen extrem große und extrem kleine Werte hinzukommen. Die Standardabweichung wächst in der Regel.
4 Je glockenförmiger die Verteilung ist, desto näher liegt der Anteil der Werte, die innerhalb der σ-Umgebung von E liegen, bei 0,68.

Nachgefragt

- Man kann sie mithilfe von Erwartungswert und Standardabweichungen vergleichen. Wenn man statt der Punktzahl angibt, wie viele Standardabweichungen ein Proband über / unter dem Erwartungswert liegt, lassen sich die Punktzahlen in den verschiedenen Tests miteinander vergleichen.
- Das stimmt nicht. Beispiel: Die beiden Verteilungen in den Tabellen haben den Erwartungswert 2 und die Standardabweichung 0,5.

k_i	1	2	3	**Summe**
p_i	0,125	0,75	0,125	**1**

k_i	1,5	2,5	**Summe**
p_i	0,5	0,5	**1**

- Das stimmt nur bei symmetrischen Verteilungen. Gegenbeispiel einer unsymmetrischen Verteilung:

k_i	1	2	3	**Summe**
p_i	0,1	0,3	0,6	**1**

Der Erwartungswert ist 2,5. Die Wahrscheinlichkeit, unter 2,5 zu liegen, beträgt 0,4.

Entdecken

- Zuordnung: 1 – C, 2 – A, 3 – B, 4 – A
- Tabelle:

Anzahl Februargeborene	0	1	2	3	**Summe**
Wahrscheinlichkeit	0,7915	0,1925	0,0156	0,0004	**1**

Aufgaben

1 **a)** $P(X = 8) = \binom{12}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^4 \approx 0{,}213$

b) $P(X = 9) = \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \approx 0{,}197$

c) $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}155$

2 **a)** Das ist eine Wahrscheinlichkeit aus einer Binomialverteilung mit $n = 100$, $p = \frac{1}{7}$, $k = 10$.
Mögliche Sachsituation: Ein Siebtel aller Menschen ist an einem Sonntag geboren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 100 Menschen genau 10 Sonntagskinder sind?

b) Das ist keine Wahrscheinlichkeit aus einer Binomialverteilung: Die beiden Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ ergänzen sich nicht zu 1.

c) Das ist keine Wahrscheinlichkeit aus einer Binomialverteilung: Die beiden Hochzahlen 4 und 10 ergänzen sich nicht zu 10.

d) Das ist eine Wahrscheinlichkeit aus einer Binomialverteilung mit $n = 10$, $p = \frac{1}{2}$, $k = 4$.
Mögliche Sachsituation: Eine Münze wird 10-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 4-mal „Zahl“ erscheint?

3 **a)** $P(X = 3) = \binom{20}{3} \cdot 0{,}09^3 \cdot 0{,}91^{17} \approx 0{,}17$

b) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}09^0 \cdot 0{,}91^{10} = 0{,}91^{10} \approx 0{,}39$

c) Wenn n die Anzahl der Schüler der Kursstufe ist, dann ist $P(X = 4) = \binom{n}{4} \cdot 0{,}09^4 \cdot 0{,}91^{n-4}$.

4 **a)** Anmerkung: Alle Dezimalzahlen sind gerundet.

Anzahl Saubersänger k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	**Summe**
P (X = k)	0,017	0,090	0,209	0,279	0,232	0,124	0,041	0,008	0,001	**1**

b) Daraus lassen sich $E = 3{,}2$ und $\sigma \approx 1{,}39$ berechnen.

5 **a)** Anmerkung: Alle Dezimalzahlen sind gerundet.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Summe**
P (X = k)	0,107	0,268	0,302	0,201	0,088	0,026	0,006	0,001	~0	~0	~0	**1**

b) $E = 2$ und $\sigma \approx 1{,}26$

6 Wenn n die Anzahl der Personen im Mathematikkurs ist, ist
$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}89^n + n \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}89^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 0{,}11^2 \cdot 0{,}89^{n-2}$.

7 Lösung im Schulbuch.

8 **a)** $P(X \le 20) \approx 0{,}41$
b) $P(X > 25) = 1 - P(X \le 25) \approx 0{,}03$
c) $P(X \ge 25) = 1 - P(X \le 24) \approx 0{,}08$
d) $P(18 \le X \le 22) = P(X \le 22) - P(X \le 17) \approx 0{,}63$

Nachgefragt

- Das stimmt. Da die Wahrscheinlichkeiten für „Zahl“ und „Kopf“ gleich sind, ist die Wahrscheinlichkeit für „genau zweimal Zahl“ gleich der Wahrscheinlichkeit für „genau zweimal Kopf“. Das ist aber dasselbe Ereignis wie „genau 18-mal Zahl“.
- Das Ereignis „mindestens eine Sechs“ kumuliert die Ereignisse „genau eine Sechs“, „genau zwei Sechsen“ und „genau drei Sechsen“. Die Wahrscheinlichkeit des kumulierten Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, also größer als die Wahrscheinlichkeit eines der Einzelereignisse.
- Der Erwartungswert für die Anzahl der Gewinne steigt proportional mit der Anzahl der Lose: $E = n \cdot p$. Also kann Olga doppelt so viele Gewinne erwarten, wenn sie doppelt so viele Lose kauft.

9 **a)** $P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 9) \approx 0{,}56$ (mit $n = 12$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$)
b) $P(X \ge 10) = 1 - P(X \le 9) \approx 0{,}87$ (mit $n = 14$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$)
c) Durch systematisches Ausprobieren ergibt sich mit $n = 16$ $P(X \ge 10) \approx 0{,}97$ und mit $n = 17$ $P(X \ge 10) \approx 0{,}99$. Er muss also mindestens 17 Spiele spielen.

10 **a)** Wenn Bosch Recht hat, ist eine zufällig herausgefischte Forelle mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{7}$ markiert (nämlich 40 von 280). Der Erwartungswert für die Anzahl markierter Forellen beträgt also $E = n \cdot p = 70 \cdot \frac{1}{7} = 10$. Wenn die Nachbarin Recht hat, ist $p = \frac{1}{10}$, also $E = n \cdot p = 70 \cdot \frac{1}{10} = 7$.
b) Mit $p = \frac{1}{7}$ ergibt sich $P(6 \le X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 5) \approx 0{,}53$.
c) Mit $p = \frac{1}{10}$ ergibt sich $P(6 \le X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 5) \approx 0{,}63$.

11 Gesucht ist n so, dass $P(X \le 200) \ge 0{,}9$ (mit $p = 0{,}95$). Durch strategisches Ausprobieren mit dem WTR findet man $P(X \le 200) \approx 0{,}948$ für $n = 206$ und $P(X \le 200) \approx 0{,}896$ für $n = 207$. Es dürfen also höchstens 206 Tickets verkauft werden.

12 **a)** Alle Histogramme haben ein Maximum; mit zunehmender Entfernung vom Maximum werden die Rechtecke niedriger. Mit größer werdendem n verschiebt sich das Maximum nach rechts. Der Wert des Maximums nimmt dabei ab. Die Verteilung wird dabei breiter und symmetrischer (weniger schief).
b) Mit steigender Anzahl Zufallsziehungen n wird der Erwartungswert größer und die Standardabweichung auch.
c) $n = 20$: $E = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ und $\sigma = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 1{,}67$. Die σ-Umgebung um E ist also das Intervall von $\approx 1{,}67$ bis 5. Anhand des Histogramms kann man den Flächenanteil auf etwa 70 % bis 75 % schätzen.
$n = 40$: $E \approx 6{,}67$ und $\sigma \approx 2{,}36$, also σ-Umgebung um E von $\approx 4{,}3$ bis $\approx 9{,}0$. Flächenanteil etwa 70 % bis 75 %.
$n = 60$: $E = 10$ und $\sigma \approx 2{,}87$, also σ-Umgebung um E von $\approx 7{,}1$ bis $\approx 12{,}9$. Flächenanteil etwa 70 % bis 75 %.

13 **a)** $P(X \le 3) = 0{,}6496$, $P(X \ge 8) = 0{,}0015$, $P(X < 4) = 0{,}6496$, $P(3 \le X \le 6) = 0{,}6066$

b) Individuelle Lösungen. Beispiel: Mit den Formeln für diskrete Verteilungen, die in diesem Fall natürlich auch gelten. Oder: E kann man über das Maximum schätzen, ein Schätzwert für σ ergibt sich aus der Annahme, dass 70 % bis 75 % der Fläche in der σ-Umgebung um E liegen.

c) Individuelle Lösungen. Beispiel: Wenn E und σ bekannt sind (siehe Teilaufgabe b)), kann man n und p aus den Formeln $E = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ berechnen.
Oder: Anhand der Werte kann man schätzen, dass $n = 10$ ist. Da das Maximum bei 3 liegt, also der Erwartungswert auch ungefähr 3 ist, muss mit $E = n \cdot p$ für die Einzelwahrscheinlichkeit gelten.
$p \approx 0{,}3$.

d) Gleiche Ergebnisse wie in Teilaufgabe a), abgesehen von Rundungsungenauigkeiten.

14 **a)** Alle Histogramme haben ein Maximum; mit zunehmender Entfernung vom Maximum werden die Rechtecke niedriger. Mit steigendem n verschiebt sich das Maximum nach rechts. Bei der mittleren Wahrscheinlichkeit ist das Histogramm symmetrisch; bei kleinerem oder größerem p ist es schief. Der Wert des Maximums ist bei mittlerem p am kleinsten, hier ist die Verteilung am breitesten.

b) Der Erwartungswert E einer Binomialverteilung wird mit steigendem p größer, die Standardabweichung σ ist für $p = 0{,}5$ am größten.

c) Für $p = 0{,}2$: $E = n \cdot p = 4$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 1{,}79$, also σ-Umgebung um E von $\approx 2{,}2$ bis $\approx 5{,}8$.
Flächenanteil etwa 80 %.
Für $p = 0{,}5$: $E = 10$ und $\sigma \approx 2{,}24$, also σ-Umgebung um E von $\approx 7{,}8$ bis $\approx 12{,}2$.
Flächenanteil etwa 75 %.
Für $p = 0{,}8$: $E = 16$ und $\sigma \approx 1{,}79$, also σ-Umgebung um E von $\approx 14{,}2$ bis $\approx 17{,}8$. Flächenanteil etwa 70 %.

d) Individuelle Lösungen. Beispiel: Beim Bogenschießen hat Bella (Fritz, Clara) eine Trefferwahrscheinlichkiet von 20 % (50 %, 80 %). Bei einem Turnier schießt Bella (Fritz, Clara) 20-mal. Gezählt wird die Anzahl der Treffer. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Anzahl höchstens σ vom jeweiligen Erwartungswert abweicht, beträgt etwa 80 % (75 %, 70 %).

15 **a)** Individuelle Lösungen. Beispiele:

1 An einem Abend begegnen Ihnen 50 Besucher des Volksfestes. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tragen mehr als 20 von ihnen ein Lebkuchenherz um den Hals?

2 Wie viele Fragen muss man mindestens stellen, dass die Wahrscheinlichkeit, durch Raten mehr als 75 % richtige Antworten zu geben, unter 0,05 liegt?

3 Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt das Glücksrad genau 3-mal blau?

4 Wie viele Jugendliche muss man mindestens fragen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens 100 regelmäßige Online-Zocker zu finden, über 0,9 liegt?

b) Individuelle Lösungen. Beispiele:

1 geringe Alltagsrelevanz

2 Beim Konzipieren eines Multiple-Choice-Tests muss man die Erfolgszahlen tatsächlich immer aufgrund der Zahlen, die durch reines Raten erzielt werden können, justieren.

3 Glücksräder kommen in wenigen Lebenszusammenhängen vor. In der Stochastik dienen sie manchmal als Modell für andere Fragestellungen, bei der bestimmte Grundwahrscheinlichkeiten gegeben sind (hier 0,25).

4 Wenn man z. B. für einen Gesundheits-, Wahrnehmungs-, Reaktions- oder Aggressivitätstest eine bestimmte Anzahl von solchen Menschen als Versuchspersonen braucht, kann diese Rechnung als Aufwandsabschätzung dienen.

16 Ergebnis der Experimente: Für $p = 0{,}5$ ist die Verteilung symmetrisch.

Nachgefragt

- Es gilt: $E = n \cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ Setzt man die erste in die zweite Gleichung ein, ergibt sich $\sigma = \sqrt{E \cdot (1-p)}$.
  Oder in Worten: Alain berechnet aus p und E die Größe n. Damit hat er alle Variablen bestimmt, die er für die Standardabweichung braucht.
- Für p = 0,5 gilt: $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^n$
  Außerdem gilt für die Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
  Also ist $P(X = n-k) = \binom{n}{n-k} \cdot 0{,}5^n = \binom{n}{k} \cdot 0{,}5^n = P(X = k)$.
  Oder in Worten: Ein Zufallsexperiment mit p = 0,5 lässt sich durch Münzwurf simulieren. Bei n Würfen gilt immer: Die Wahrscheinlichkeit, k-mal Zahl zu werfen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, k-mal Kopf zu werfen. Das Ereignis, k-mal Kopf zu werfen, ist aber gleichbedeutend mit dem Ereignis, n-k-mal Zahl zu werfen. Also sind die Wahrscheinlichkeiten für k Treffer und für n – k Treffer immer gleich.
- Die Wahrscheinlichkeit beträgt $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) \approx 0{,}902$.
- Es muss um ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ausgängen geben; einen dieser Ausgänge nennen wir Treffer. Dieses Zufallsexperiment muss n-mal wiederholt werden, wobei sicherzustellen ist, dass sich die Trefferwahrscheinlichkeit nicht ändert. Das heißt auch, dass die Wiederholungen des Zufallsexperiments unabhängig voneinander sein müssen. X zählt die Anzahl der Treffer.

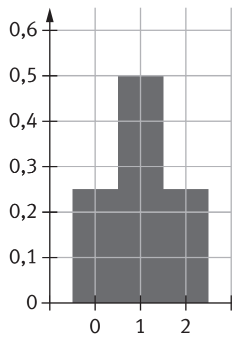
Entdecken

- 50% der 18-Jährigen sind kleiner als 178 cm.
- Das gegebene Intervall ist begrenzt durch den P3- und den P97-Wert. Also ist die Wahrscheinlichkeit, zwischen 165 cm und 191 cm groß zu sein, gerade 0,97 – 0,03 = 0,94.
- Diese Wahrscheinlichkeit ist 0.
- Individuelle Antworten.
  Beispiele für Fragen, die man mithilfe des Diagramms beantworten kann:
  – Wie groß muss ein 15-Jähriger mindestens sein, damit er zu den 3% größten 15-Jährigen gehört?
  – Welcher Anteil der 14-Jährigen ist kleiner als 150 cm?
  Beispiele für Fragen, für die man weitere Informationen braucht:
  – Wie groß sind 18-Jährige im Durchschnitt?
  – Welcher Anteil der 18-Jährigen ist über 185 cm groß?

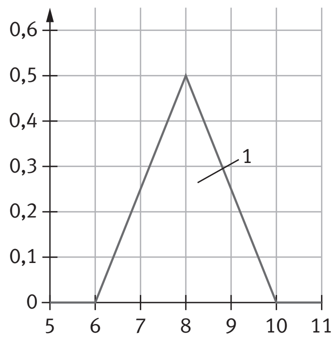
Aufgaben

1 Diskret: Augenzahlen beim Würfeln, Schuhgröße, Klassenstufe, Alter (wenn man nur ganze Jahre angibt).
Als stetig aufzufassen: Länge des Mittelfußknochens, Alter (wenn man eine stetige Zeitskala zugrunde legt), Länge des Schulwegs, Masse von Himmelskörpern.
Es gilt allgemein: Jedes Messinstrument hat eine begrenzte Auflösung; keine physikalische Größe lässt sich auf beliebig viele Nachkommastellen genau bestimmen. Deshalb gibt es in der Realität eigentlich gar keine stetige Größe. Aber viele Größen sind in guter Näherung als stetig aufzufassen.

2 Individuelle Lösungen. Beispiele:
diskrete Verteilung:



stetige Verteilung



Bei der diskreten Verteilung muss man darauf achten, dass nur einzelne Werte bzw. Werte aus trennbaren Intervallen angenommen werden können. Bei der stetigen Verteilung dagegen können alle Werte einer kontinuierlichen Skala angenommen werden. In beiden Fällen muss der gesamte Flächeninhalt 1 betragen. Wahrscheinlichkeiten sind nicht als Höhen im Diagramm dargestellt, sondern als Flächen.

3 **a)** Gemeinsamkeiten: Alle sind glockenförmig (achsensymmetrisch, ein Hochpunkt auf der Symmetrieachse, zwei Wendepunkte, die x-Achse ist waagrechte Asymptote für sehr große und sehr kleine x).
Unterschiede: Die Lage und der Wert des Maximums, die Entfernung der Wendepunkte von der Symmetrieachse.
b) Schätzung der Flächeninhalte über die Kästchen.
c) Graph 1 : $\mu = 0{,}7$; $\sigma = 0{,}25$
Graph 2 : $\mu = 150$; $\sigma = 30$
Graph 3 : $\mu = 0{,}7$; $\sigma = 0{,}1$

4 **a)** $\mu \approx 51$; $\sigma \approx 5$

b) grün: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Ei über 63 g?
blau: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Ei zwischen 40 g und 50 g?

c) Schätzung des Flächeninhalts über die Kästchen zwischen $x = 53$ und $x = 63$ ergibt $p \approx \frac{1}{3}$.

5 Lösung im Schulbuch.

6

	1	2	3	4
a)	0,452	≈ 0,5	0,452	≈ 0,5
b)	0,5	0,5	0,952	≈ 1
c)	0,952	≈ 1	0,5	0,5
d)	0,5	0,5	0,5	0,5
e)	0,159	0,159	0,159	0,159
f)	0,023	0,023	0,023	0,023
g)	0,5	0,5	0,5	0,5
h)	0,159	0,159	0,159	0,159
i)	0,023	0,023	0,023	0,023

7 **a)** Gesucht ist g so, dass $P(X > g) = 0{,}05$, also $P(X \le g) = 0{,}95$. Mit dem WTR ($\mu = 140$ und $\sigma = 20$) ergibt sich $g = 172{,}9$.

b) $P(160 < X < 180) \approx 0{,}136$

c) Gesucht ist g so, dass $P(\mu - g < X < \mu + g) = 0{,}9$, also aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung $p(X < \mu - g) = 0{,}05$. Mit dem WTR ($\mu = 140$ und $\sigma = 20$) ergibt sich $\mu - g \approx 107{,}1$ und damit $g \approx 32{,}9$. Intervall von 107,1 bis 172,9.

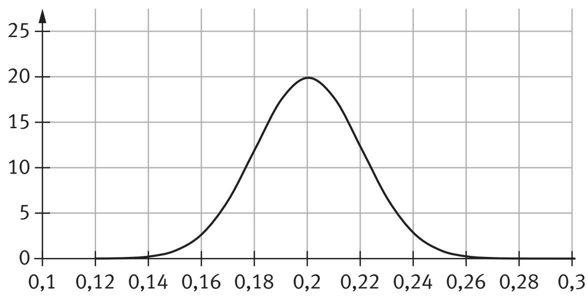
d) Gesucht ist g so, dass $P(\mu - g < X < \mu + g) = 0{,}5$, also aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung $P(X < \mu - g) = 0{,}25$. Mit dem WTR ($\mu = 140$ und $\sigma = 20$) ergibt sich $\mu - g \approx 126{,}5$ und damit $g \approx 14{,}5$. Intervall von 126,5 bis 154,5.

8 **a)** $P(X < 0{,}23) \approx 0{,}93$, $P(0 \le X \le 0{,}18) \approx 0{,}16$ und $P(X > 0{,}24) \approx 0{,}02$

b) $g \approx 0{,}2135$

c) Gesucht ist h so, dass $P(X < h) = 0{,}84$. Damit ist $h \approx 0{,}2199$.

d)



9 Mit dem WTR ($\mu = 6{,}2$ und $\sigma = 1{,}5$):

a) $P(X \le 6) \approx 0{,}45$

b) $P(4{,}7 \le X \le 7{,}7) \approx 0{,}68$

c) $P(6 \le X \le 8) \approx 0{,}44$

d) $P(X = 6{,}2) = 0$

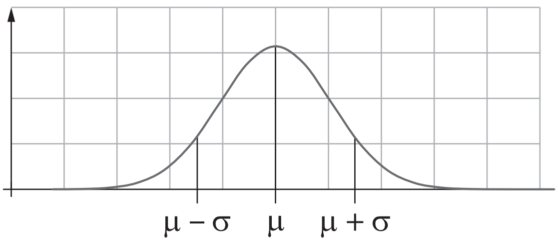
e) $P(X > 9{,}02) \approx 0{,}03$

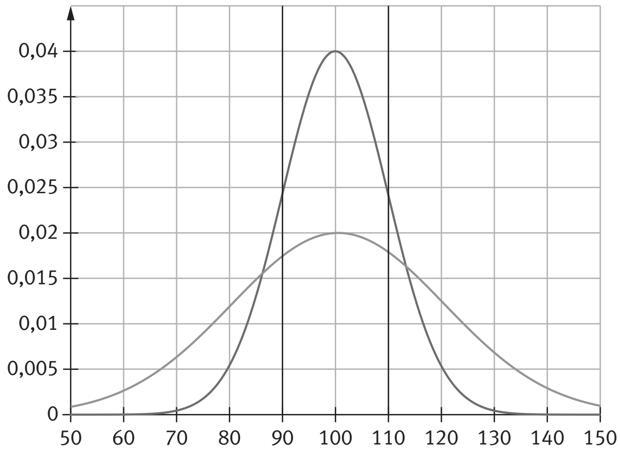
10 **a)** P (40 ≤ X ≤ 55) ≈ 0,0013 P (55 ≤ X ≤ 70) ≈ 0,0214 P (70 ≤ X ≤ 85) ≈ 0,1359
P (85 ≤ X ≤ 100) ≈ 0,3413 P (100 ≤ X ≤ 115) ≈ 0,3413 P (115 ≤ X ≤ 130) ≈ 0,1359
P (139 ≤ X ≤ 145) ≈ 0,0214 P (145 ≤ X ≤ 160) ≈ 0,0013

b) Es bleibt bei denselben Anteilen:
$P(\mu - 4\sigma \le X \le \mu - 3\sigma) = P(\mu + 3\sigma \le X \le \mu + 4\sigma) \approx 0{,}13\,\%$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu - 2\sigma) = P(\mu + 2\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 2{,}14\,\%$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu - \sigma) = P(\mu + \sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 13{,}59\,\%$
$P(\mu - \sigma \le X \le \mu) = P(\mu \le X \le \sigma) \approx 34{,}13\,\%$

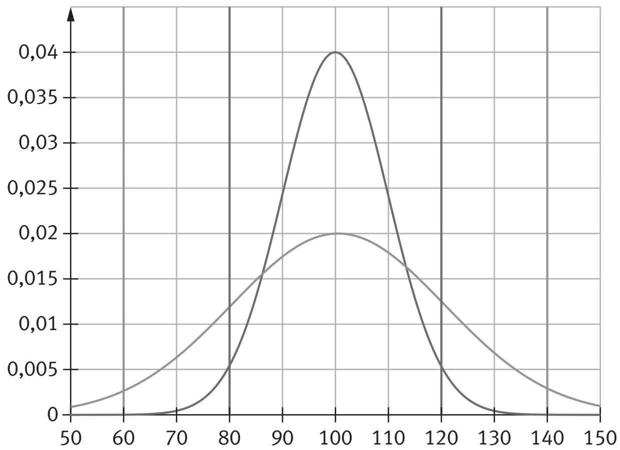
Nachgefragt

- Die Randkurve der Normalverteilung ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$. Das Intervall von $-\infty$ bis $\mu - \sigma$ entspricht also dem Intervall von $\mu + \sigma$ bis $+\infty$. Also sind auch die Flächen unter der Randkurve über diesen Intervallen gleich groß.



- 

Der schmale Graph ist die Randkurve der Normalverteilung mit $\mu = 100$ und $\sigma = 10$, der breite die Randkurve der Normalverteilung mit = 100 und $\sigma = 20$. Die Fläche über dem Intervall von 90 bis 110 ist für den schmalen Graphen größer. Katharina hat Recht.

- 

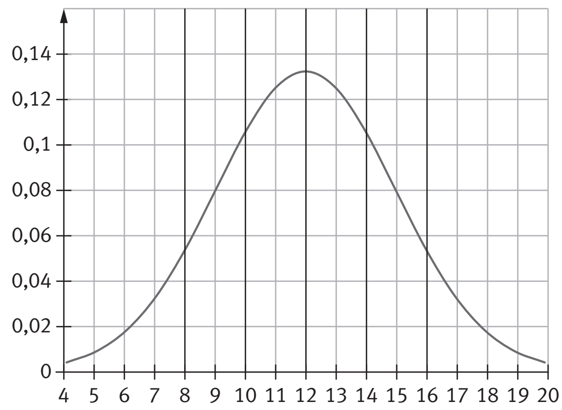
Der schmale Graph ist die Randkurve der Normalverteilung mit $\mu = 100$ und $\sigma = 10$, der breite die Randkurve der Normalverteilung mit = 100 und $\sigma = 20$. Die Fläche unter dem schmalen Graphen über dem Intervall von 80 bis 120 ist gleich groß wie die Fläche unter dem breiten Graphen im Intervall von 60 bis 140; sie beträgt jeweils 0,9544 (siehe Aufgabe 7). Oleg liegt falsch.

11 a) Aus $P(X > 12) = 0,5$ folgt die Aussage.

b) $P(X < 10) = P(X > 14) > P(X > 16)$

c) Aufgrund der Symmetrie gilt $P(12 < X < 14) = P(10 < X < 12)$. Mit $P(10 < X < 14) = P(10 < X < 12) + P(12 < X < 14)$ folgt die Aussage.

d) $P(X \leq g) = P(X < g) + P(X = g)$. Da aber $P(X = g) = 0$ ist, folgt die Aussage.



12 a) Der Anteil guter Schrauben lässt sich mit $\mu = 40$ und $\sigma = 0,3$ mit dem WTR berechnen: $P(39,5 \leq X \leq 40,5) \approx 0,9044$. Die Maschine produziert also 9,56 % Ausschuss.

b) Der Anteil guter Schrauben steigert sich mit $\mu = 40$ und $\sigma = 0,2$ auf $P(39,5 \leq X \leq 40,5) \approx 0,9876$. Die Maschine produziert also nur noch 1,24 % Ausschuss. Das sind nur noch etwa 13 % der ursprünglichen Ausschussrate. Es ist also deutlich weniger als ein Viertel.

13 a) 260 und 160 liegen symmetrisch um $\mu = 210$. Also ist $P(X \geq 260) = p(X \leq 160) = 16\ \%$.

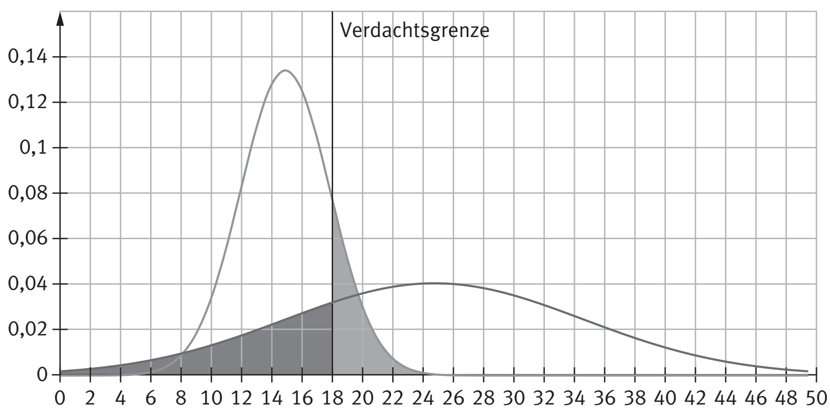
b) Aus Teilaufgabe a) folgt $P(160 \leq X \leq 260) = 1 - 2 \cdot 16\ \% = 68\ \%$. Da das Intervall symmetrisch um $\mu = 210$ liegt, ist $P(210 \leq X \leq 260) = \frac{1}{2} \cdot 68\ \% = 34\ \%$.

14 Gesucht sind die Grenzen g_1, g_2 und g_3, für die gilt $P(X \leq g_1) = 0,25$, $P(X \leq g_2) = 0,5$ und $P(X \leq g_3) = 0,75$. Mit dem WTR ergibt sich $g_1 = 110$, $g_2 = 120$ und $g_3 = 130$.

15

μ	σ	**Grenze g**	**P (X < g)**
0,5	0,1	0,7	0,977
45	3	48,8	0,9
10	2,02	16	0,9985
100	keine Lösung	86	0,665
200	10	210	0,84

16 a)



b) Mit $\mu = 15$ und $\sigma = 3$ ist $P(X > 18) = 1 - P(X \leq 18) \approx 16\ \%$

c) Mit $\mu = 25$ und $\sigma = 10$ ist $P(X < 18) \approx 24\ \%$

d) Mit $\mu = 15$ und $\sigma = 3$ ist $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) \approx 5\ \%$
Mit $\mu = 25$ und $\sigma = 10$ ist $P(X < 20) \approx 31\ \%$

17 a) Anfangs gibt es nur wenige Immunisierte. Das Virus kann sich immer schneller ausbreiten, denn jeder neu Angesteckte steckt mehrere weitere Personen an. Die Ansteckung verläuft lawinenartig, also annähernd exponentiell. Nach einigen Wochen wird die Ansteckungsrate geringer, denn das Virus trifft nun auf immer mehr Immunisierte. Die Kurve flacht also ab (erste Wendestelle). Nach etwa 7 Wochen ist der Anteil der Immunisierten in der Bevölkerung so hoch, dass jeder Erkrankte im Mittel gerade eine weitere Person ansteckt. Ab hier fällt die Kurve ab. Mit weiter fortschreitender Immunisierung der Bevölkerung geht die Ansteckungsrate immer weiter zurück, sodass die Kurve immer schneller abfällt (bis zur zweiten Wendestelle). Da nun der Anteil der Immunisierten in der Bevölkerung immer langsamer zunimmt, fällt die Kurve der Neuansteckungen ab hier langsamer ab, bis die Immunisierung der Bevölkerung so groß ist, dass so gut wie niemand mehr angesteckt werden kann. Das Virus verschwindet.

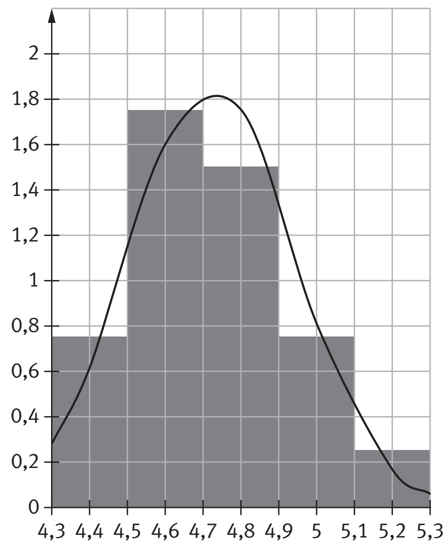
b) $\mu \approx 7$ und $\sigma \approx 2$

c) Damit ist $P(X \leq 2) \approx 0{,}0062 = 0{,}62\ \%$.

d) Gesucht ist g so, dass $P(X < g) = 0{,}25$. Daraus ergibt sich $g \approx 5{,}65$.

e) Die Ansteckungsrate wird durch die Maßnahme verringert. Die Kurve steigt langsamer an. Da der Anteil Immunisierter damit aber ebenfalls langsamer steigt, wird das Maximum später erreicht. Aus demselben Grund fällt die Kurve nach dem Maximum langsamer ab. Die Kurve wird also flacher und breiter.

18 a) Die Rechtecke würden schmaler; der Rand des Histogramms würde immer feiner gestuft. Die Form und Höhe bliebe im Wesentlichen erhalten. Der Gesamtflächeninhalt betrüge weiterhin 1.



b) Erwartungswert und Standardabweichung werden aus der Tabelle berechnet. Als x-Werte werden die Intervallmitten angenommen. Es ergibt sich $E = 4{,}72$ und $\sigma \approx 0{,}214$. Die Randkurve der Normalverteilung mit denselben Kennwerten verläuft nahe den Rändern der Rechtecke des Histogramms. Wenn das Histogramm feiner gestuft wäre, würde die Randkurve den Verlauf in guter Näherung abbilden. Je genauer die Messwerte sind, umso besser lässt sich ihre Verteilung durch eine Normalverteilung nähern.

c) Individuelle Lösungen. Beispiele: Körpergröße, Nervenleitgeschwindigkeit, Intelligenz, bewirtschaftete Fläche verschiedener Bauernhöfe, tägliche Mediennutzungszeit von Jugendlichen.

19 a) Erstes Diagramm: Ein Würfel wird häufig geworfen. Es werden die geworfenen Augenzahlen notiert, in relative Häufigkeiten umgerechnet und in einem Histogramm dargestellt. Es kommen nur ganze Zahlen von 1 bis 6 vor.
Zweites und drittes Diagramm: Zwei (fünf) Würfel werden häufig gleichzeitig geworfen. Es wird jeweils der Mittelwert der beiden (fünf) Augenzahlen notiert, in relative Häufigkeiten umgerechnet und in einem Histogramm dargestellt. Als Mittelwerte von zwei Augenzahlen kommen ganze und halbe Zahlen zwischen 1 und 6 vor; als Mittelwerte von fünf Augenzahlen kommen Zahlen zwischen eins und sechs vor, die als Vielfache von Fünfteln dargestellt werden können (also Zahlen, die auf Komma 0, Komma 2, Komma 4, Komma 6 oder Komma 8 enden).
Gemeinsamkeiten: Spannweite, Gesamtflächeninhalt 1
Unterschiede: Bei einem Würfel konstante Rechteckshöhe, bei den anderen ein Maximum bei 3,5; das Maximum ist bei höherer Anzahl von Würfeln ausgeprägter. Die Verteilung bei fünf Würfeln ist annähernd glockenförmig. Die Stufung wird mit höherer Anzahl Würfeln feiner.

b) Annähernd wie eine Normalverteilung mit Mittelwert 3,5 und sehr kleiner Standardabweichung. Das Histogramm wird also sehr hoch und schmal.

c) Individuelle Lösungen. Beispiel: Das Würfelbeispiel zeigt, dass beim Bilden von Mittelwerten vieler gleichartiger einzelner Maße Normalverteilungen entstehen. Biologische Maße sind aber oft Mittelwerte. Die Knochenlänge ist z. B. abhängig von der mittleren Länge von Knochenfasern, die Körpergröße ist abhängig von der mittleren Länge der einzelnen Körperteile.

20 a) Zugrunde liegt ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ausgängen („rechts" oder „links"). Dieses wird n mal wiederholt (n ist die Anzahl der Reihen), wobei die einzelnen Wiederholungen voneinander unabhängig sind und sich die Trefferwahrscheinlichkeit nicht ändert. Nimmt man an, dass „rechts" als Treffer bezeichnet wird, dann wird die Anzahl der Treffer in einem Durchgang dadurch abgebildet im wievielten Fach die Kugel landet: Ist sich 5mal rechts heruntergefallen, hat sie also 5 Treffer erzielt, dann liegt sie im fünften Fach.

b) Kugeln werden durch ein Galton-Brett mit zwei (fünf, zwanzig) Reihen geschickt. Es wird notiert, wie viele Kugeln in jedem Fach landen. Die Anzahlen werden in relative Häufigkeiten umgerechnet und im Histogramm dargestellt.
Gemeinsamkeiten: achsensymmetrisch, ein Maximum, Gesamtflächeninhalt 1
Unterschiede: Je mehr Reihen das Galton-Brett hat, umso breiter wird das Histogramm und umso niedriger ist das höchste Rechteck.

c) Annähernd wie eine Normalverteilung mit Mittelwert 50 und sehr großer Standardabweichung. Das Histogramm wird also sehr flach und breit.

d) Mögliche Ergebnisse des Vergleichs:
– Je größer n ist, umso besser nähert die Normalverteilung die Binomialverteilung an.
– Wenn p extrem klein oder extrem groß ist, ist die Binomialverteilung sehr schief, und damit ist die Normalverteilung keine gute Näherung, bei mittleren p dagegen schon.

e) $\sigma > 3$ bedeutet $n \cdot p(1-p) > 9$, das heißt weder n noch $p(1-p)$ dürfen allzu klein sein. Man braucht also eine hinreichend große Anzahl Durchgänge und eine mittlere Wahrscheinlichkeit, um die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung annähern zu können. Das ist plausibel und wird auch durch die Ergebnisse aus Aufgabe d) gestützt.
Je extremer p ist, umso größer muss n sein. Beispiel: Für $p = 0{,}9$ braucht man $n > 100$, für $p = 0{,}5$ reicht $n > 36$. Das ist ebenfalls plausibel, denn die Schiefe der Verteilung bei extremem p wird dadurch abgeschwächt, dass mit steigendem n die Breite der Verteilung relativ zur Spannweite abnimmt.

21 a) Individuelle Lösungen. Beispiele:
1 Mit den IQ-Werten: $P(IQ < 60) \approx 0{,}00383$.
Mit den Standardwerten: $\hat{x} = \frac{60-100}{15} \approx -2{,}667$. $P(x < -2{,}667) \approx 0{,}00383$.
2 Mit den IQ-Werten: $P(IQ > 110) = 1 - P(IQ \le 110) \approx 1 - 0{,}748 = 0{,}252$.
Mit den Standardwerten: $\hat{x} = \frac{110-100}{15} \approx 0{,}667$. $P(x > 0{,}667) = 1 - P(x \le 0{,}667) \approx 1 - 0{,}748 = 0{,}252$.

b) Lea rechnet g_1 und g_2 in Standardwerte $\hat{x}_1$ bzw. $\hat{x}_2$ um. Dann bestimmt sie mithilfe der Tabelle die Wahrscheinlichkeiten $P(X \le \hat{x}_1)$ und $P(X \le \hat{x}_2)$. Damit gilt: $P(g_1 \le X \le g_2) = P(X \le \hat{x}_2) - P(X \le \hat{x}_1)$.

Nachgefragt

- Der Mittelwert von mehreren Messwerten liegt im Mittel näher am wahren Wert als ein einzelner Messwert. Je mehr Messwerte man mittelt, umso schmaler ist nämlich die Verteilung dieser Mittelwerte. Ein Beispiel dafür sieht man in Aufgabe 19. Es ist also sehr unwahrscheinlich, dass der Mittelwert von sehr vielen Messwerten weit vom wahren Wert entfernt ist.
- Es gibt keine reale Größe, die auf einer kontinuierlichen Skala jeden beliebigen Wert annehmen kann. Jedes Messverfahren ist mit Ungenauigkeit behaftet. Beispielsweise kann eine bestimmte Uhr die Zeit nur auf ms genau messen. Dann zerfällt die (eigentlich kontinuierliche) Zeitskala doch wieder in Intervalle der Breite 1 ms. Wahrscheinlichkeitsverteilungen über einer solchen Skala sind infolgedessen immer diskret, oft aber in sehr guter Näherung stetig.
  Nur ideale Größen (z. B. aus der theoretischen Physik oder idealisierte Daten) können genau normalverteilt sein.
- Individuelle Lösungen. Beispiele:
  sehr schiefe Verteilungen wie die Wartezeit auf den ersten Erfolg, Anzahl Würfe bis zur ersten Sechs (geometrische Verteilung);
  mehrgipflige Verteilungen, z. B. bimodale Bildhistogramme

Aufgabe 1

Warm up

A **a)** $\binom{3}{2} = 3$ **b)** $\binom{4}{2} = 6$ **c)** $\binom{2021}{1} = 2021$

B E = 1,2

C

k	0	1	2
p (X = k)	0,49	0,42	0,09

1 **a)** Es gilt $p = \frac{1}{3}$ und n = 20. Gesucht ist P (X = 12).
Mit dem WTR ergibt sich $P(X = 12) \approx 0{,}0092$.
Die Wahrscheinlichkeit, allein durch Raten 12 Aufgaben zu lösen, beträgt etwa 0,92 %.

b) Es gilt $p = \frac{1}{3}$ und n = 20. Gesucht ist $P(X \geq 12) = 1 - P(X \leq 11)$.
Mit dem WTR ergibt sich $P(X \leq 11) \approx 0{,}9870$, also $P(X \geq 12) \approx 0{,}0130$.
Die Wahrscheinlichkeit, allein durch Raten mindestens 12 Aufgaben zu lösen, beträgt etwa 1,30 %.

c) Es liegt ein Experiment zugrunde, bei dem es nur zwei Ausgänge gibt („richtig gelöst“ und „nicht richtig gelöst“). Dieses Experiment wird n = 20-mal unabhängig voneinander durchgeführt, wobei die Trefferwahrscheinlichkeit immer gleich bleibt ($p = \frac{1}{3}$). Notiert wird die Anzahl der Treffer bei den 20 Wiederholungen, also die Anzahl richtig gelöster Aufgaben.
$E = n \cdot p = \frac{20}{3} \approx 6{,}67$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{\frac{40}{9}} \approx 2{,}11$.
Die σ-Umgebung um E ist also das Intervall von 4,56 bis 8,78; in diesem Intervall liegen die Werte 5, 6, 7 und 8.

d) Berechnung des Erwartungswerts und der Standardabweichung über die Tabelle mit den Intervallmitten als x-Werte:

x_i	1	4	7	10	13	16	19	**Summe**
p_i	0	0,1	0,15	0,2	0,3	0,2	0,05	**1**
$x_i \cdot p_i$	0	0,4	1,05	2	3,9	3,2	0,95	**11,5**
$(x_i - E)^2 \cdot p_i$	0	5,625	3,0375	0,45	0,675	4,05	2,8125	**16,65**

Damit ist E = 11,5 und $\sigma = \sqrt{16{,}65} \approx 4{,}08$. Die σ-Umgebung um E ist also das Intervall von 7,42 bis 15,58. Sie enthält die Werte 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 und 15. Der Wert 8 ist in beiden σ-Umgebungen enthalten; hierin überschneiden sie sich also. Bedeutung im Sachzusammenhang: Acht richtige Antworten zu geben, ist also im Falle reinen Ratens noch ein normales Ergebnis. Acht richtige Antworten zu geben, ist aber auch ein normales Ergebnis, wenn man die Teilnehmer des Tests zugrunde legt, die sich nicht aufs Raten verlassen. Wenn jemand also acht richtige Antworten gibt, kann es genauso gut sein, dass er nur geraten hat wie dass er manches gewusst hat. Bei mindestens 12 richtigen Antworten dagegen ist es höchst unwahrscheinlich, dass nur geraten wurde: p = 1,3 % beim reinen Raten gegenüber p = 55 % unter den Teilnehmern.

e) Es gilt $p = \frac{1}{4}$ und n = 20. Gesucht ist eine Grenze g so, dass $P(X \geq g) < 0{,}01$ ist, also $1 - P(X < g) < 0{,}01$ oder $P(X < g) > 0{,}99$.
Durch systematisches Ausprobieren mit dem WTR ergibt sich: $P(X < 11) = 0{,}996$ und $P(X < 10) = 0{,}986$. Es gilt also g = 11. Man sollte ab 11 richtigen Antworten bestanden haben.

Aufgabe 2

Warm up

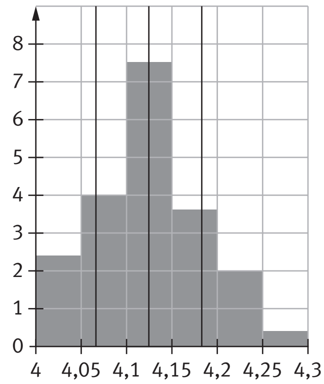
A **a)** $P(4 \le x \le 10) = P(x \le 10) - P(x < 4) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$
b) $P(8 \le x \le 12) \approx 0{,}68$

B $E = n \cdot p = 18$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{9} = 3$

2 **a)**

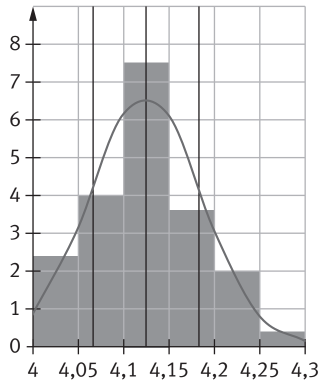
Intervall	4 bis < 4,05	4,05 bis < 4,1	4,1 bis < 4,15	4,15 bis < 4,2	4,2 bis < 4,25	4,25 bis < 4,3
Höhe	2,4	4	7,6	3,6	2	0,4

Es ergibt sich $E = 4{,}125$ und $\sigma = \sqrt{0{,}0036} = 0{,}06$. Die Grenzen der σ-Umgebung um E sind also 4,065 und 4,185.
Fläche: $(4{,}1 - 4{,}065) \cdot 4 + 0{,}05 \cdot 7{,}6 + (4{,}185 - 4{,}15) \cdot 3{,}6 = 0{,}646$



b) Es wären fünfmal so viele Rechtecke, deren Breite jeweils nur ein Fünftel der jetzigen Breite betragen würde. Die Gesamtfläche bliebe gleich groß. Der Rand des Histogramms wäre feiner gestuft. Erwartungswert, Standardabweichung und der Anteil innerhalb der σ-Umgebung um E blieben fast gleich.

c)



Man kann die Messwerte als näherungsweise normalverteilt annehmen. Der Erwartungswert der Normalverteilung ist dann ein Schätzwert für die wahre Periodendauer, die Standardabweichung ist ein Maß für die Unsicherheit dieser Schätzung, also die Messungenauigkeit. Mit großer Wahrscheinlichkeit liegt die wahre Periodendauer in der σ-Umgebung um E.

d) Je weniger schief die Verteilung ist, umso weniger wird sich das Streichen dieser Messwerte auf den Erwartungswert auswirken. Die Standardabweichung wird kleiner, da extreme Werte fehlen.

e) $P(X > 4{,}2) = 1 - P(X \le 4{,}2) \approx 0{,}106$

f) Gesucht ist g so, dass $p(\mu - g < X < \mu + g) = 0{,}95$, also aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung $p(X < \mu - g) = 0{,}025$. Mit dem WTR ergibt sich $\mu - g \approx 4{,}0074$ und damit $g \approx 0{,}1176$. Intervall von 4,0074 bis 4,2426.

Aufgabe 3

Warm up

A $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0{,}316$

B

	haben Farbsehschwäche	haben keine Farbsehschwäche	**Summe**
Frauen	0,005	0,495	0,5
Männer	0,04	0,46	0,5
Summe	0,045	0,955	1

3 **a)** Mit $\mu = 14$ und $\sigma = 1{,}2$ ist $P(X \geq 15{,}8) = 1 - P(X < 15{,}8) = 0{,}0668$.

b) Mit $\mu = 0{,}95$ und $\sigma = 0{,}35$ ist $P(X \geq 1{,}6) = 1 - P(X < 1{,}6) = 0{,}0316$.

c) $P(X > E + 2\sigma) = 0{,}023$ jeweils. Für das oder-Ereignis gilt $p = 0{,}023 + 0{,}023 - 0{,}023 \cdot 0{,}023 = 0{,}0454$. Es werden also 4,54 % der ungedopten Athleten fälschlicherweise ausgeschlossen.

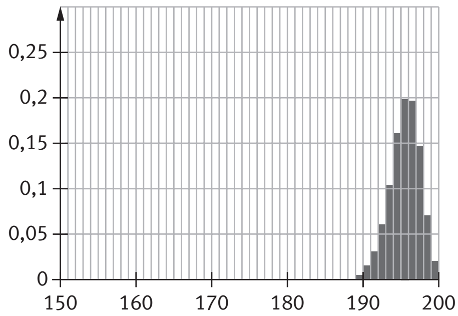
d) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass der H-Wert und der R-Wert zwischen 1,5 und 2 Standardabweichungen nach oben vom Erwartungswert abweichen, also
$p = P(15{,}8 < H < 16{,}4) \cdot P(1{,}475 < R < 1{,}65) = 0{,}0441^2 = 0{,}0019$.
Zusätzlich würden also 0,19 % der ungedopten Athleten fälschlicherweise ausgeschlossen.

e) Grenzwerte, wenn alle Athleten ungedopt sind: für H 15,97 und für R 0,5469.

f) Individuelle Lösungen. Beispiel: 5 % der Athleten fälschlicherweise auszuschließen, wäre ungerecht. Alle hier berechneten Grenzen kommen aber zu ähnlich großen Falschalarm-Raten. Dabei würde Claudio nur im Falle der in Teilaufgabe e) berechneten Regelung ausgeschlossen, obwohl seine Wertekombination nach Teilaufgabe c) verdächtig ist. Eine gute Regelung könnte sein, Athleten auszuschließen, bei denen beide Wert um mindestens 1,5 Standardabweichungen abweichen. Claudio würde disqualifiziert und die Fehlerrate betrüge nur
$p = P(H > 15{,}8) \cdot P(R > 1{,}475) = 0{,}0668^2 = 0{,}0044$.

1 **a)** Es liegt ein Zufallsexperiment mit genau zwei Ausgängen zugrunde („Gast kommt“ und „Gast kommt nicht“). Dieses wird n = 200-mal unabhängig voneinander wiederholt. Die Wahrscheinlichkeit für „Gast kommt“, also die Trefferwahrscheinlichkeit, ist für alle Wiederholungen gleich: p = 0,98. Gezählt wird die Anzahl der Treffer, also die Anzahl der bewohnten Zimmer.

b) E = np = 196. Der Hotelier kann davon ausgehen, dass ungefähr 196 Zimmer bewohnt sind und 4 frei bleiben.



c) Das Histogramm ist aufgrund der extremen Trefferwahrscheinlichkeit sehr schief. Dadurch kommen vor allem rechts vom Maximum doch erhebliche Unterschiede zwischen einer Normalverteilung und dieser Binomialverteilung zustande.

d) $P(X \leq 200) \approx 0{,}913$

2 **a)** A Diskrete Verteilung, speziell Binomialverteilung mit n = 8 und $p = \frac{1}{4}$, also E = 2 und $\sigma \approx 1{,}3$. Nicht achsensymmetrisch.

B Stetige Verteilung, speziell Normalverteilung, also achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = \mu$. $E = \mu = 2$ und $\sigma = 0{,}3$.

C Diskrete Verteilung, speziell Binomialverteilung n = 4 und $p = \frac{1}{2}$, also E = 2 und $\sigma = 1$. Achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung x = 2.

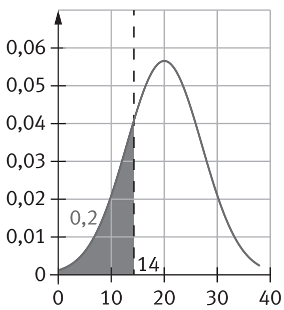
D Diskrete Verteilung mit E > 2 und $\sigma \approx 1$.

b) Auf der x-Achse die vorkommenden Werte k_i (bzw. Intervalle) ablesen und mit den entsprechenden Rechteckshöhen in eine Tabelle schreiben. Falls Intervalle vorkommen, deren Breite nicht 1 beträgt, Umrechnen der Höhen in Wahrscheinlichkeiten: p = Breite·Höhe. In eine weitere Zeile der Tabelle die k_i (oder die Intervallmitten) mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_i multiplizieren, die Produkte summieren. Diese Summe ist der Erwartungswert E. In einer weiteren Zeile der Tabelle die Produkte $(k_i - E)^2 \cdot p_i$ berechnen, die Produkte summieren. Die Wurzel aus dieser Summe ist die Standardabweichung.

c) Individuelle Lösungen. Beispiel: 10 % der Europäer haben Blutgruppe B. 20 Europäer werden zufällig ausgewählt. Die Anzahl derjenigen unter den 20, die Blutgruppe B haben, ist binomialverteilt. E = 2 und $\sigma \approx 1{,}34$.
Wenn n vervierfacht wird, wird auch E vervierfacht, σ wird verdoppelt.

d) Das Maximum verschiebt sich nach rechts, die Verteilung wird breiter und flacher.

3 **a)**



b) Individuelle Antworten. Beispiele: $P(X < 26) = 0{,}8$, $P(14 < X < 26) = 0{,}6$, $P(14 < X < 20) = 0{,}3$

c) Nach Aufgabenstellung liegen 20 % der Fläche links von 14. Da dies mehr als 16 % sind, liegt die 14 innerhalb der σ-Umgebung von E. Also ist 14 weniger als σ von E entfernt, also ist $\sigma > 6$.

d) Durch systematisches Ausprobieren mit dem WTR werden obere und untere Grenze eines immer kleiner werdenden Intervalls bestimmt, in dem σ liegt. Grundlage dieser Intervallschachtelung ist die in der Aufgabenstellung gegebene Angabe $p(X < 14) = 0{,}2$.

e) $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) \approx 0{,}24$

f) Gesucht ist g so, dass $P(X \leq g) = 0{,}4$. Damit ist $g \approx 18{,}2$.

4 a)

	negativer Rhesusfaktor	nicht negativer Rhesusfaktor	**Summe**
Blutgruppe 0	0,06	0,35	0,41
nicht Blutgruppe 0	0,09	0,5	0,59
Summe	0,15	0,85	1

Es gilt: $\frac{0{,}06}{0{,}41} \approx 0{,}15$, ebenso $\frac{0{,}09}{0{,}59} \approx 0{,}15$ usw. Die Randwahrscheinlichkeiten sind also ungefähr gleich den entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten. Im Rahmen der Genauigkeit der Angaben sind die Merkmale also stochastisch unabhängig.

b) Von fünf zufällig ausgewählten Europäern haben genau 2 die Blutgruppe 0+.

c) Es liegt ein Zufallsexperiment zugrunde, bei dem es nur zwei Ausgänge gibt: „negativer Rhesusfaktor“ und „nicht negativer Rhesusfaktor“. Dieses Experiment wird $n = 100$-mal unabhängig voneinander wiederholt. Dabei bleibt die Trefferwahrscheinlichkeit (hier: Wahrscheinlichkeit für negativen Rhesusfaktor) bei jeder Wiederholung gleich, nämlich $p = 0{,}15$. Gezählt wird die Anzahl derjenigen Personen mit negativem Rhesusfaktor, also die Anzahl der Treffer.

d) $\sigma \approx 3{,}57$. Die Bedingung ist also erfüllt.

e) Für die Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}15$ gilt: $P(X \leq 10) \approx 0{,}09945$.
Für die Normalverteilung mit $\mu = 15$ und $\sigma \approx 3{,}57$ gilt: $P(X \leq 10) \approx 0{,}08067$.
Absoluter Fehler: 0,01877, relativer Fehler: 0,1888 = 18,88 %. Der Fehler ist recht hoch, da σ nur geringfügig über der Grenze von 3 ist.

5 a) $E = 30$, $\sigma \approx 5$

b) Abschätzung mithilfe der Kästchen liefert: $p(30 < X < 40) \approx 0{,}48$. Alternativ Herleitung mithilfe der Tatsache, dass $P(X > E + 2\sigma) \approx 0{,}023$.

c) Individuelle Lösungen. Beispiele: $P(X > 40) \approx 0{,}023$, $P(25 < X < 35) \approx 0{,}68$, $P(20 < X < 40) \approx 0{,}96$.

d) Breiter (Wendepunkte bewegen sich von der Symmetrieachse weg) und flacher (Wert des Maximums sinkt).

e) Ja. Mit $E = n \cdot p = 30$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 5$ folgt $\sqrt{30 \cdot (1-p)} = 5$. Daraus kann man eindeutig p bestimmen: $p = \frac{1}{6}$. Daraus folgt $n = 180$.

1 Darstellung im Koordinatensystem siehe Abbildung S. 330 im Schulbuch. Sonst individuelle Lösung. Beispiel: Es gibt eine Tendenz, aber eindeutig ist der Zusammenhang nicht. Es könnte auch eine zufällig verformte Punktwolke sein.

2

	Schuhgröße < 40,3	**Schuhgröße ab 40,3**	**Summe**
Monatsgehalt < 3070,42 €	$\frac{5}{12} \approx 0{,}417$	$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$	$\frac{7}{12} \approx 0{,}583$
Monatsgehalt ab 3070,42 €	$\frac{1}{6} \approx 0{,}167$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{5}{12} \approx 0{,}417$
Summe	$\frac{7}{12} \approx 0{,}583$	$\frac{5}{12} \approx 0{,}417$	1

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten und Vergleich mit den Randwahrscheinlichkeiten:

$\frac{0{,}417}{0{,}583} \approx 0{,}714$ statt 0,583

$\frac{0{,}167}{0{,}417} \approx 0{,}400$ statt 0,417 usw.

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass die Merkmale nicht stochastisch unabhängig sind. Sehr deutlich sind die Abweichungen aber nicht.

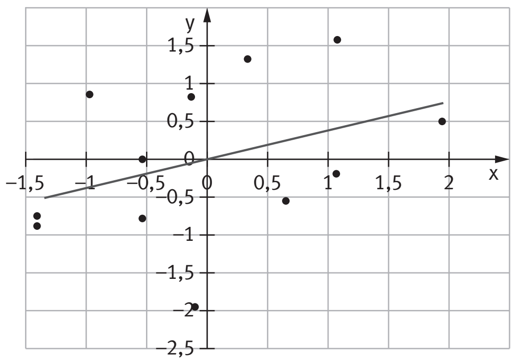
3 Siehe Gebrauchsanweisung des WTR.

4 Die σ-Umgebung um den Erwartungswert E der Gehälter über alle Schuhgrößen hinweg ist das Intervall zwischen 1624 und 4416. Die Regressionsgerade steigt über alle betrachteten Schuhgrößen gerade mal um 2057. Das ist weniger als die Breite der σ-Umgebung um E.

5

$\hat{x}$	–1,373	–1,373	–0,9615	–0,5494	–0,5494	–0,1374
$\hat{y}$	–0,881	–0,7209	0,8392	–0,0152	–0,7655	–1,9467

$\hat{x}$	–0,1374	0,2747	0,6868	1,0989	1,0989	1,9230	$E_x = 0$	$\sigma_x = 1$
$\hat{y}$	0,8392	1,3220	–0,5723	1,5969	–0,2009	0,5049	$E_y = 0$	$\sigma_y = 1$



Die geschätzte Regressionsgerade hat ebenfalls eine positive Steigung.

6 Das Geschlecht beeinflusst sowohl die Schuhgröße als auch das Monatsgehalt: Männer haben im Mittel größere Füße als Frauen und verdienen im Mittel mehr.

7 1 Fleischkonsum und Lebensdauer stehen in einem negativen Zusammenhang. Behauptet wird eine Kausalbeziehung: Wegen höherem Fleischkonsum stirbt man früher. Eine Korrelation würde nur behaupten, dass Menschen mit höherer Lebensdauer im Mittel weniger Fleisch essen.

2 Milchkonsum und Potenz stehen in einem negativen Zusammenhang. Behauptet wird eine Kausalbeziehung: Wegen höherem Milchkonsum ist man weniger potent. Eine Korrelation würde nur behaupten, dass Männer mit höherer Potenz im Mittel weniger Milch trinken.

3 Anzahl brütender Störche in einem Gebiet und Anzahl Geburten in dem Gebiet stehen in einem positiven Zusammenhang. Behauptet wird eine Korrelation: Wo mehr Kinder geboren werden, brüten mehr Störche. Eine Kausalbeziehung würde entweder bedeuten, dass brütende Störche Kinder bringen oder dass Störche sich von vielen Kindern angezogen fühlen.

4 Kaffeekonsum und Fruchtbarkeit (z. B. Anzahl Schwangerschaften) stehen in einem negativen Zusammenhang. Behauptet wird eine Kausalbeziehung: Wegen höherem Kaffeekonsum ist eine Frau weniger fruchtbar. Eine Korrelation würde nur behaupten, dass Frauen mit höherer Fruchtbarkeit im Mittel weniger Kaffee trinken.

8 **a)** Für die IQs gilt E = 110 und $\sigma = 7{,}51$. Für die Mathenoten gilt: E = 2,64 und $\sigma = 1{,}00$.
Vierfeldertafel:

	IQ < 110	**IQ > 110**	**Summe**
Mathenote < 2,64	0,4	0,1	0,5
Mathenote > 2,64	0,1	0,4	0,5
Summe	0,5	0,5	1

Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeiten und Vergleich mit den Randwahrscheinlichkeiten:

$\frac{0{,}4}{0{,}5} \approx 0{,}8$ statt 0,5

$\frac{0{,}1}{0{,}5} \approx 0{,}2$ statt 0,5 usw.

Die Merkmale sind nicht stochastisch unabhängig. Für Menschen mit überdurchschnittlichem IQ ist die Wahrscheinlichkeit erhöht, eine überdurchschnittlich gute Mathenote zu haben.

Regression der Rohdaten:

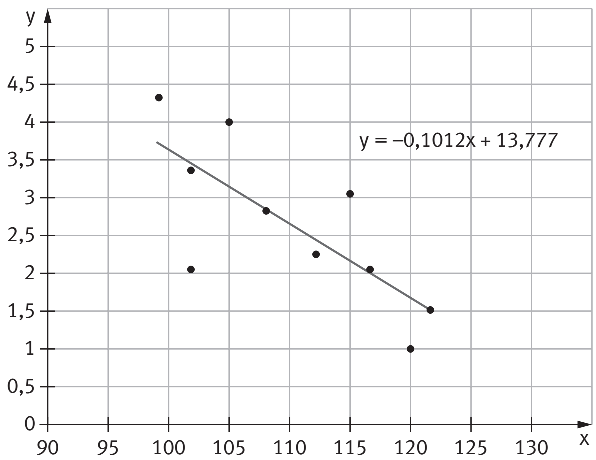
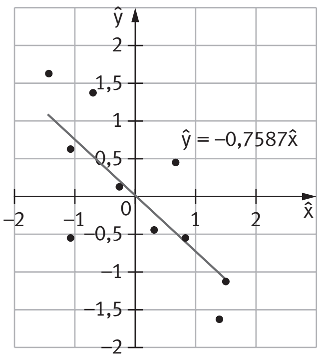


Tabelle der standardisierten Daten:

$\hat{x}$	–1,46	–1,07	–1,07	–0,67	–0,27
$\hat{y}$	1,656	0,659	–0,54	1,357	0,16

$\hat{x}$	0,666	0,799	1,332	1,465	0,666	$E_x = 0$	$\sigma_x = 1$
$\hat{y}$	0,459	–0,54	–1,64	–1,14	0,459	$E_y = 0$	$\sigma_y = 1$

Regression der standardisierten Daten:



b) Es gibt einen deutlichen negativen Zusammenhang zwischen der Mathenote und dem IQ. Ihr Korrelationskoeffizient ist –0,7587. Für Menschen mit niedriger Mathenote ist die Wahrscheinlichkeit groß, einen hohen IQ zu haben. Ob eine Kausalität dahinter steckt, kann man nicht sagen. Führt ein hoher IQ zu einer niedrigen Mathenote? Das könnte sein. Führt eine niedrige Mathenote zu einem hohen IQ? Wohl kaum. Messen IQ und Mathenote dieselben Kompetenzen? Das ist auch möglich.

c) Individuelle Rechercheergebnisse.

9 **a)** Sie braucht noch Erwartungswert und Standardabweichung des IQs derjenigen Menschen, die am Medizinertest teilnehmen.

b) Sie berechnet den Standardwert ihres TMS-Ergebnisses, und multipliziert ihn mit dem Korrelationskoeffizienten. So erhält sie einen Schätzwert für den Standardwert ihres IQs. Diesen rechnet sie mithilfe des Erwartungswerts und der Standardabweichung der IQs der TMS-Teilnehmer in einen IQ-Wert um.

c) Individuelle Rechercheergebnisse.

10 **a)** Durch Standardisierung und Regression oder durch Verwendung einer Tabellenkalkulation ergeben sich folgende Korrelationskoeffizienten:
– für Abiturnote und Note der Semesterabschluss-Klausur: 0,56
– für Vorwissenstest und Note der Semesterabschluss-Klausur: –0,25.
Das Minus kommt dadurch zustande, dass Punktzahlen und Noten in verschiedenen Richtungen skaliert sind: Eine gute Leistung bedeutet hohe Punktzahl, aber niedrige Note. Man muss die Beträge der Korrelationskoeffizienten heranziehen. Die Korrelation zwischen Abiturnote und der Note in der Semesterabschluss-Klausur ist höher als die zwischen Vorwissenstest und Note der Semesterabschluss-Klausur. Die Abiturnote ist also der bessere Prädiktor für Studienerfolg als der Vorwissenstest.

b) Individuelle Rechercheergebnisse.

11 Individuelle Rechercheergebnisse. Es gibt jede Menge amüsanter Beispiel im Internet.

12 a) Das Medikament wirkt sehr gut, sofern man etwa 0,5 mg/Tag einnimmt. Die Wirkung wird schlechter, wenn man mehr davon einnimmt, möglicherweise wegen unerwünschter Nebenwirkungen.

b) Die Korrelation beschreibt nur einen linearen Zusammenhang. Diesen gibt es in diesem Falle so gut wie nicht, denn der Zusammenhang ist ein umgekehrt U-förmiger.