

**Einführungsphase**

# mathe.delta



kostenfreie  
**LESEPROBE**



Nordrhein-Westfalen



# Inhalt

Vorwort ..... 3

## **mathe.delta – Nordrhein-Westfalen Sek II**

Die Lehr- und Lernwelt von **mathe.delta – Nordrhein-Westfalen Sek II** ..... 4

## **Konzeption**

Aufbau des Lehrwerks ..... 6

## **mathe.delta Einführungsphase**

Inhaltsverzeichnis ..... 8

Kapitel 2: Potenzfunktionen ..... 11

Mathematische Zeichen und Abkürzungen ..... 37

## **Digitaler Unterricht mit „click & teach“ und „click & study“**

Die digitale Lehr- und Lernwelt von **mathe.delta–Nordrhein-Westfalen Sek II** ..... 38

## **Unser WebSeminar-Angebot**

## **Gebietsaufteilung Außendienst**



## Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

zum Schuljahr 2024/25 können Sie sich auf unser neues Lehrwerk **mathe.delta Einführungsphase** freuen. Dieses setzt die Vorgaben des Kernlehrplans in Nordrhein-Westfalen passgenau um. In der Folge setzen wir unsere Reihe für die Sekundarstufe II mit **mathe.delta Qualifikationsphase**, einem Gesamtband für den Grund- und Leistungskurs, fort.

Über den Schülerband hinaus unterstützt Sie unser **digitales Lehrmaterial click & teach** optimal bei der Gestaltung Ihres Unterrichts. Selbstverständlich erscheint **mathe.delta Einführungsphase** auch als **digitale Ausgabe click & study** für Ihre Schülerinnen und Schüler.

Sind Sie neugierig geworden? Dann freuen wir uns, wenn Sie mehr über unsere Reihe **mathe.delta – Nordrhein-Westfalen Sek II** erfahren möchten.

Kontaktieren Sie uns einfach! Wir besuchen Sie gern oder beraten Sie telefonisch, per E-Mail und über Microsoft Teams.

Herzlichst  
Ihr Schulberatungsteam für Nordrhein-Westfalen



**Monika Labmeier**

Mobil: 0171 6357092

E-Mail: labmeier@ccbuchner.de



**Jutta Schneider**

Mobil: 0175 3248279

E-Mail: schneider@ccbuchner.de



**Jörn Thielke**

Mobil: 0160 1728354

E-Mail: thielke@ccbuchner.de

Entdecken Sie die Lehr- und Lernwelt von...

## mathe.delta – Nordrhein-Westfalen Sek II

### mathe.delta Einführungsphase

**mathe.delta Einführungsphase** setzt die bewährte Konzeption unserer Reihe für die Sekundarstufe I fort und überzeugt durch:

- ▶ passgenaue Umsetzung der Kompetenzerwartungen des neuen Kernlernplans,
- ▶ gezielt auf das Oberstufenprofil abgestimmte Elemente,
- ▶ eine klare Struktur der Kapitel als optimale Unterstützung bei der Unterrichtsvorbereitung und beim Unterrichten,
- ▶ ein Wiederholungskapitel als Einstieg in das Lehrwerk – zur Auffrischung der wichtigsten mathematischen Funktionsarten aus der Sekundarstufe I.



Mehr Infos  
[www.ccbuchner.de/bn/63051](http://www.ccbuchner.de/bn/63051)

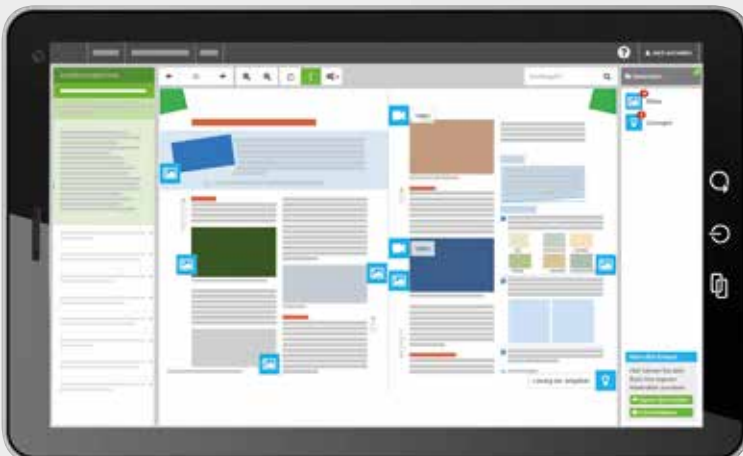
**digitales Zusatzmaterial** auch  
 via QR- oder Mediacodes direkt  
 in der Print-Ausgabe verfügbar



### Ideal für den digitalen Materialaustausch

Die **digitale Ausgabe des Schülerbands click & study** und das **digitale Lehrermaterial click & teach** bilden zusammen die ideale digitale Lernumgebung: vielfältig im Angebot und einfach in der Bedienung!

Mehr Infos finden Sie auf [www.click-and-study.de](http://www.click-and-study.de) und [www.click-and-teach.de](http://www.click-and-teach.de).



Erklärvideos **click & study**  
 und **click & teach**

**click & study als Print-Plus-Lizenz**  
ab 2,20 € pro Titel und Jahr  
bei Einführung der Print-Ausgabe

## Individualisierung

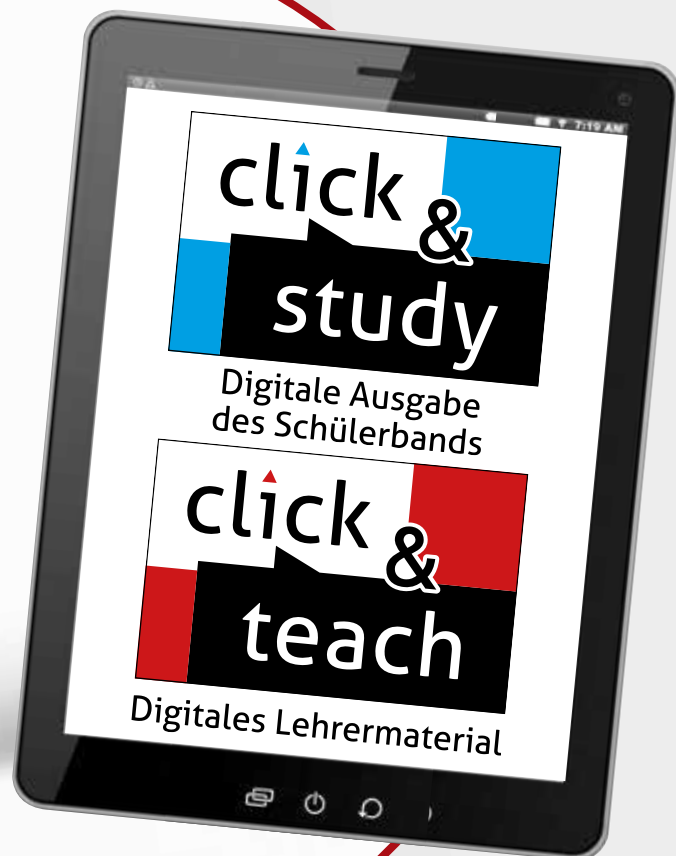
- ▶ **mathe.delta Einführungsphase** ermöglicht Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlichen Voraussetzungen individuelle Lernwege – mithilfe von umfangreichem Differenzierungsmaterial und Aufgaben auf drei gekennzeichneten Anforderungsniveaus.
- ▶ **mathe.delta Einführungsphase** unterstützt Lehrkräfte bei der optimalen Ausgestaltung des schuleigenen methodisch-didaktischen Curriculums durch die Kennzeichnung von Methoden und optionaler Inhalte.

## Medieneinsatz und CAS

- ▶ **mathe.delta Einführungsphase** setzt konsequent auf die Arbeit mit einem Computeralgebrasystem. Zur optimalen Vorbereitung auf das Abitur werden hierzu gezielte Aufgabenformate zur Verfügung gestellt.
- ▶ Integrierte GeoGebra-Applets bieten den Schülerinnen und Schülern weiterführende Lern- und Anwendungsmöglichkeiten.

## So geht es nach **mathe.delta Einführungsphase** weiter:

Die Reihe wird mit **mathe.delta Qualifikationsphase** – einem Gesamtband für den Grund- und Leistungskurs – fortgesetzt. Dabei ist präzise gekennzeichnet, welche Themen nur für die Schülerinnen und Schüler des Leistungskurses vorgesehen sind. Die Differenzierung erfolgt dabei auf Aufgaben-, Seiten- oder Kapitelebene.



Titel	ISBN 978-3-661- / Bestellnr.	Ladenpreis	Lieferbarkeit
 mathe.delta Einführungsphase	63051-9	ca. 32,50 €	2. Quartal 2024
 click & study Einführungsphase Digitale Ausgabe des Schülerbands	WEB 630511 Bestellbar auf <a href="http://www.ccbuchner.de">www.ccbuchner.de</a>	ca. 8,50 €	2. Quartal 2024
 Trainingsband Einführungsphase	63052-6	ca. 12,- €	3. Quartal 2024
 click & teach Einführungsphase Digitales Lehrermaterial	WEB 630531 Diese und weitere Lizenzarten finden Sie auf <a href="http://www.ccbuchner.de">www.ccbuchner.de</a>	ca. 33,- €	2. Quartal 2024 sukzessive

# Der Kapitelaufbau in mathe.delta Einführungsphase

Alle Kapitel haben dieselbe Struktur und sind aus denselben Gliederungseinheiten aufgebaut.

## Startklar

- Basiskompetenzen zu Beginn einer Lerneinheit
- mit Lösungen

**2 Startklar**

**1.1 Potenzen und Wurzeln rechnen**  
 Die Potenz ist eine Kurzschreibweise für ein Produkt aus gleichen Zahlen oder Variablen. Die Bedeutung der Potenzen besteht nur aus den Wurzeln (Radikalen).

**1.2 Funktionen verstehen**  
 Eine eindeutige Zuordnung heißt Funktion, wenn jedem Element aus dem Definitionsbereich höchstens ein Element aus dem Wertebereich zugeordnet ist.

**1.3 Potenzen und Wurzeln rechnen**  
 Die Potenzgesetze für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{Z}$  sind:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^0 = 1$

**1.4 Funktionen verstehen**  
 Die Symmetrie beschreibt, ob der Graph einer Funktion symmetrisch ist. Man unterscheidet zwischen Achsensymmetrie und Punktsymmetrie.

**1.5 Funktionen verstehen**  
 Die Nullstellen einer Funktion sind die Stellen, an denen der Funktionswert Null ist.

**1.6 Funktionen verstehen**  
 Die Ableitung einer Funktion beschreibt die Steigung der Tangente an einem Punkt des Graphen.

## Entdecken

- handlungsorientierte Lernsituation
- Medienkompetenz und CAS-Einsatz

**2 Entdecken**

**1.1 Potenzen und Wurzeln rechnen**  
 Potenzen können helfen, einen die Zusammenhänge zwischen zwei Größen oder Variablen besser zu verstehen. Oftmals kann man diese Werte aus einem Funktionsgraphen ablesen.

**1.2 Funktionen verstehen**  
 Jede Funktion hat eine charakteristische Form. Man kann sie durch die Beschreibung ihrer Eigenschaften beschreiben.

**1.3 Potenzen und Wurzeln rechnen**  
 Die Potenzgesetze sind die Grundlage für die Berechnung von Potenzen und Wurzeln.

**1.4 Funktionen verstehen**  
 Die Ableitung einer Funktion ist die Steigung der Tangente an einem Punkt des Graphen.

**1.5 Funktionen verstehen**  
 Die Nullstellen einer Funktion sind die Stellen, an denen der Funktionswert Null ist.

**1.6 Funktionen verstehen**  
 Die Symmetrie einer Funktion beschreibt, ob der Graph symmetrisch ist.

## Unterkapitel

- klar strukturierte Doppelseiten
- Aufgaben zum **Üben, Anwenden** und **Vernetzen**
- Kennzeichnung hilfsmittelfreier Aufgaben durch **oHiMi**

**2 2.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten**

**Entdecken**  
 Anne und Luca stellen die Graphen einiger Funktionen der Form  $f(x) = a \cdot x^n$  ( $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ ) dar. Anne sagt: „Hier müssen wir für Ordnung sorgen, ich stelle die Graphen zu Funktionen mit geradem Exponenten dar, du die mit ungeradem.“

**Vernetzen**  
 Manche Funktionsgraphen im Einstieg hatten (abhängig vom Exponenten) einen ähnlichen Verlauf.

**Merke**  
 Eine Funktion  $f$  der Form  $f(x) = a \cdot x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  heißt **Potenzfunktion mit ganzzahligen Exponenten**. Man unterscheidet folgende Fälle:

	gerader Exponent $n$	ungerader Exponent $n$
$n > 0$		
$n < 0$		

**Beispiel**  
 Betrachten Sie die Graphen der Funktionen  $f, g, h$  und  $i$  mit folgenden Gleichungen:  
 $f(x) = x^2, g(x) = x^3, h(x) = x^{-2}, i(x) = x^{-3}$

**Nachfrage**  
 Begründen Sie, dass alle Potenzfunktionen  $f$  der Form  $f(x) = a \cdot x^n$  mit ganzzahligen Exponenten durch den Punkt  $P(1|1)$  verlaufen.

**Aufgaben**  
 1. Die Graphen 1 bis 6 stellen Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten dar. a) Entscheiden Sie jeweils, ob der Exponent positiv/negativ bzw. geradzahlig/ungeradzahlig ist. b) Geben Sie jeweils eine Funktionsgleichung für die Funktionen 1 bis 6 an. c) Beschreiben Sie den Verlauf der Funktionen mit Hilfe folgender Begriffe: Definitionsbereich und Wertebereich, Definitionslücke, Symmetrie, gemeinsame Punkte, Monotonie.

**oHiMi**  
 2. Die Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion  $f$ . Berechnen Sie fehlende Koordinaten.

a) $f(x) = x^2$	A(1 4)	B(-2;5)	C(20;2)	D(1;1)
b) $f(x) = x^3$	A(-2;8)	B(4;1)	C(1;2)	D(1;-1)
c) $f(x) = x^{-2}$	A(-1;1)	B(2;1)	C(-1;1)	D(1;1)
d) $f(x) = x^{-3}$	A(1;1)	B(-1;1)	C(1;1)	D(1;1)

**3. Ermitteln Sie alle gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$ .**

a)  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x^3$       b)  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x^{-2}$   
 c)  $f(x) = x^3$  und  $g(x) = x^{-3}$       d)  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x^{-3}$

**4. Entscheiden Sie begründet, welche Wertebereiche zu welcher Funktionsgleichung gehört.**

a) $g: g(x) = x^2$	b) $k: k(x) = x^3$	c) $h: h(x) = x^{-2}$
--------------------	--------------------	-----------------------

- Zwischentest
- Argumentieren und Begründen
- Methoden



## Inhaltsverzeichnis

---

Mathematische Zeichen und Abkürzungen . . . . .	6
---	---

### 1 Wiederholung bekannter Funktionen

<b>Startklar</b> . . . . .	8
Entdecken . . . . .	10
1.1 Lineare Funktionen . . . . .	12
1.2 Quadratische Funktionen . . . . .	18
1.3 Lineare und quadratische Gleichungen. . . . .	24
1.4 Gleichungen lösen. . . . .	28
1.5 Sinusfunktion. . . . .	30
1.6 Einfluss von Parametern auf die Sinusfunktion . . . . .	32
Trainingsrunde . . . . .	34
Auf einen Blick. . . . .	38
<b>Auf dem Weg zum Abitur</b> . . . . .	40

### 2 Potenzfunktionen

<b>Startklar</b> . . . . .	44
Entdecken . . . . .	46
2.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten . . . . .	48
2.2 Wurzelfunktionen . . . . .	52
2.3 Funktionsgraphen transformieren . . . . .	54
2.4 Verhalten im Unendlichen . . . . .	58
Trainingsrunde . . . . .	60
Auf einen Blick. . . . .	64
<b>Auf dem Weg zum Abitur</b> . . . . .	66



## Inhaltsverzeichnis

### 3 Ganzrationale Funktionen

<b>Startklar</b> .....	70
Entdecken .....	72
3.1 Ganzrationale Funktionen erkennen .....	74
3.2 Monotonie und Globalverhalten .....	78
3.3 Besondere Punkte .....	82
3.4 Symmetrie .....	84
3.5 Nullstellen .....	86
3.6 Mehrfache Nullstellen .....	90
Trainingsrunde .....	94
Auf einen Blick .....	98
<b>Auf dem Weg zum Abitur</b> .....	100

### 4 Steigung und Ableitung

<b>Startklar</b> .....	104
Entdecken .....	106
4.1 Mittlere Änderungsrate .....	108
4.2 Lokale Änderungsrate .....	112
4.3 Ableitungsfunktion .....	116
4.4 Ableitungsregeln: Potenz- und Faktorregel .....	120
4.5 Ableitungsregeln: Summenregel .....	122
4.6 Tangente und Normale .....	124
Trainingsrunde .....	128
Auf einen Blick .....	132
<b>Auf dem Weg zum Abitur</b> .....	134

## Inhaltsverzeichnis

### 5 Funktionsuntersuchung

<b>Startklar</b> .....	138
Entdecken .....	140
5.1 Monotonie und erste Ableitung .....	142
5.2 Lokale Extrempunkte und Sattelpunkte .....	144
5.3 Extrempunkte mit Hilfe der zweiten Ableitung .....	148
5.4 Globale Extrempunkte .....	150
5.5 Krümmungsverhalten und Wendepunkte .....	154
5.6 Wendepunkte mit Hilfe der dritten Ableitung .....	158
5.7 Kurvendiskussion .....	160
Trainingsrunde .....	166
Auf einen Blick .....	170
<b>Auf dem Weg zum Abitur</b> .....	172

### 6 Grundlagen der vektoriellen Geometrie

<b>Startklar</b> .....	176
Entdecken .....	178
6.1 Orientierung im Raum .....	180
6.2 Vektoren .....	184
6.3 Rechnen mit Vektoren .....	188
6.4 Betrag eines Vektors .....	192
6.5 Geraden und Strecken im Raum .....	194
6.6 Lagebeziehungen von Geraden .....	198
Trainingsrunde .....	206
Auf einen Blick .....	210
<b>Auf dem Weg zum Abitur</b> .....	212

### Anhang

Lösungen .....	215
Operatoren .....	230
Stichwortverzeichnis .....	231
Bildnachweis .....	233



### Einstieg

Professionelle Basketballspielerinnen und -spieler nutzen Videoanalysen, um ihre Würfe zu optimieren. Dabei entstehen Bilder, die mathematisch ausgewertet werden können.

- Geben Sie an, mit welchen der Ihnen bekannten Funktionstypen sich eine Kurve wie die abgebildete beschreiben lässt.
- Schätzen Sie die in der Abbildung auftretenden Größen und Abstände und skizzieren Sie die Bahnkurve des Basketballs in einem entsprechenden Koordinatensystem.

# 2

## Potenzfunktionen

### Ausblick

Am Ende dieses Kapitels haben Sie gelernt, ...

- die **Eigenschaften** von **Potenzfunktionen**, abhängig vom Exponenten in der Funktionsgleichung, **anzugeben**.
- die **Wurzelfunktion** als **Umkehrfunktion** einer Potenzfunktion zu **untersuchen**.
- den **Einfluss von Parametern** auf den Graphen einer Potenzfunktion zu **beschreiben**.
- das **Verhalten** von Potenzfunktionen im **Unendlichen** zu **beschreiben**.

## 2

## Startklar

## Vorwissen 1

## Mit Potenzen und Wurzeln rechnen

Die **Potenz** ist eine Kurzschreibweise für ein Produkt aus gleichen Zahlen oder Variablen.

Die **Umkehrung des Potenzierens** bezeichnet man als **Wurzelziehen** (Radizieren).

Potenzgesetze für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0$ )
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  ( $a \neq 0$ )
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  ( $a > 0, n \in \mathbb{N}$ )
- $a^1 = a; a^0 = 1$  ( $a \neq 0$ )
- $0^0$  ist nicht definiert.

5 gleiche Faktoren	Potenz
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$= 2^5$

$$a \xrightarrow{\text{Potenzieren}} a^n$$

$$a \xleftarrow{\text{Wurzelziehen}} a^n$$

$$\sqrt[3]{729} = 9, \text{ denn } 9^3 = 729$$



$$(-3)^3 \cdot (-3)^2 = (-3)^{3+2} = (-3)^5$$

$$(-3)^3 : (-3)^2 = (-3)^{3-2} = (-3)^1 = -3$$

## Vorwissen 2

## Funktionen darstellen

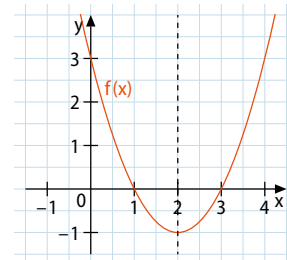
Eine eindeutige Zuordnung heißt **Funktion**.  
Jedem Element  $x$  aus dem **Definitionsbereich  $D$**  wird genau ein Wert  $y$  zugeordnet.  
Alle möglichen  $y$ -Werte einer Funktion bilden den **Wertebereich  $W$** .

Funktionen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden, beispielsweise mit einer **Funktionsgleichung**, in einer **Wertetabelle** oder als **Graph**.

Im Funktionsgraphen sieht man, dass jedem **Argument** ( $x$ -Wert) nur **genau ein Funktionswert** ( $y$ -Wert) zugeordnet wird. Umgekehrt aber kann ein  $y$ -Wert von mehreren  $x$ -Werten erreicht werden.

$$f(x) = (x-2)^2 - 1$$

x	0	1	2	3	4
y	3	0	-1	0	3



$$D = \mathbb{R} \quad W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$$

An den Stellen  $x=0$  und  $x=4$  hat die Funktion denselben Funktionswert:

$$f(0) = 3 \text{ und } f(4) = 3$$

## Vorwissen 3

## Eigenschaften von Funktionen bestimmen

- Die **Symmetrie** beschreibt, ob der Graph der Funktion achsen- oder punktsymmetrisch ist – oder ob keine Symmetrie vorliegt.
- Die **Monotonie** beschreibt, ob die Funktion nach oben oder nach unten verläuft.
- Die **Nullstellen** sind die  $x$ -Werte, für die der Funktionswert null ist.
- Der  $y$ -Wert, an der der Graph die  $y$ -Achse schneidet, heißt  **$y$ -Achsenabschnitt**.

$$f(x) = (x-2)^2 - 1$$

- $f$  ist achsensymmetrisch zur Achse  $x=2$ .
- $f$  ist monoton fallend für  $x < 2$  und monoton steigend für  $x > 2$ .
- $x_1 = 1$  und  $x_2 = 3$  sind Nullstellen von  $f$ , denn  $f(1) = f(3) = 0$ .
- $f$  schneidet die  $y$ -Achse im Punkt  $(0|3)$ , denn  $f(0) = 3$ . Der  $y$ -Achsenabschnitt ist also 3.

**Aufgaben 1**

- 1 Vereinfachen Sie so weit wie möglich.
- a)  $x^3 \cdot x^7$                       b)  $y^4 \cdot y^{-1}$                       c)  $(-z)^5 \cdot (-z)^2$   
 d)  $a^{-4} : a^{-1}$                       e)  $7b^3 \cdot 2b^2$                       f)  $4 \cdot (-c)^{-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-c)^2$
- 2 Schreiben Sie als Quotient und geben Sie das Ergebnis ohne Potenz an.
- a)  $2^{-3}; 5^{-1}; 4^{-2}; 10^{-1}$                       b)  $(-2)^{-1}; (-3)^{-3}; (-5)^{-2}; -5^{-2}$                       c)  $0,2^{-3}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}; 0,1^{-5}; \left(\frac{2}{3}\right)^2$
- 3 Vereinfachen Sie den Term und notieren Sie ihn anschließend in Wurzelschreibweise.
- a)  $x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$                       b)  $8a^{\frac{5}{3}} : 2a$                       c)  $y^{\frac{1}{8}} \cdot 4y^{\frac{1}{4}} \cdot 9y^{\frac{1}{8}}$                       d)  $\sqrt[3]{2m^2n} \cdot (mn)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$

**Aufgaben 2**

4 a) Ordnen Sie Funktionsgleichungen, Wertetabellen und Graphen einander zu.

- 1  $y = -x^2 + 2$                       2  $y = (x + 1)^2 - 2$   
 3  $y = (x + 1)^2 - 1$                       4  $y = 2x + 3$

A

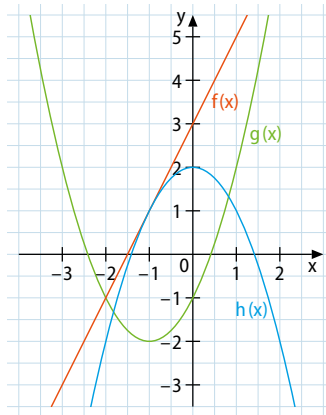
x	-2	-1	0	1	2
y	-2	1	2	1	-2

B

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-2	-1	2	7

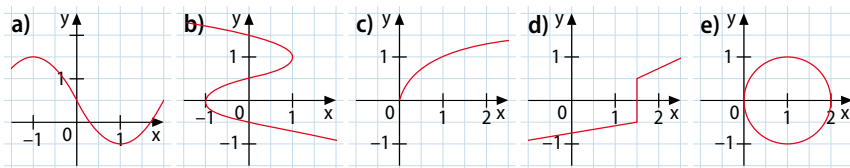
C

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7



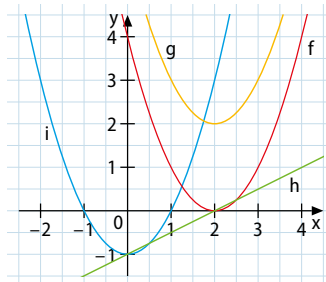
- b) Ergänzen Sie zur Gleichung, die übrig bleibt, die Wertetabelle und den Graphen.  
 c) Geben Sie den Wertebereich aller Funktionen an.

5 Entscheiden und begründen Sie, ob es sich um den Graphen einer Funktion handelt.



**Aufgaben 3**

6 Beschreiben Sie jeweils den Verlauf der Graphen der Funktionen f bis i. Gehen Sie dabei auf die Eigenschaften der Funktionen ein.



7 Zeichnen Sie den Graphen einer Funktion, die folgende Eigenschaften erfüllt.

- a) monoton steigend für  $x < -1$ , monoton fallend für  $x > -1$   
 b) Nullstelle bei  $x = 2$ , achsensymmetrisch zur y-Achse  
 c) monoton wachsend im gesamten Definitionsbereich, keine lineare Funktion

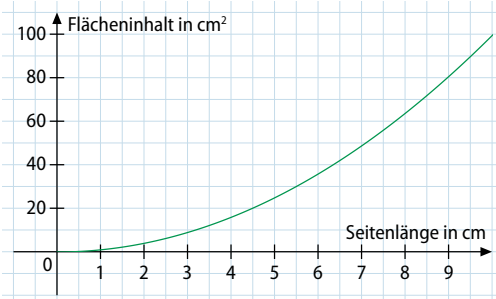
## 2

## Entdecken

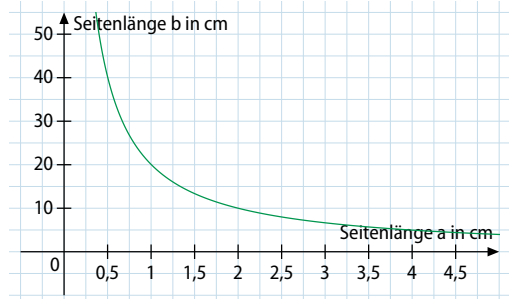
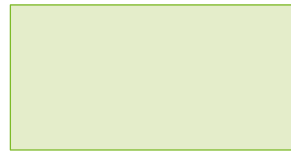
## Mit Funktionen Vorhersagen machen

Funktionen können helfen, anhand des Zusammenhangs zwischen zwei Größen unbekannte Werte zu bestimmen. Oftmals kann man diese Werte aus einem Funktionsgraphen ablesen.

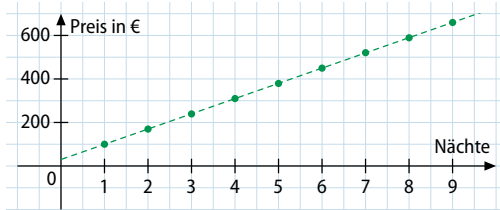
- 1 Jeder Seitenlänge eines Quadrats wird sein Flächeninhalt zugeordnet.



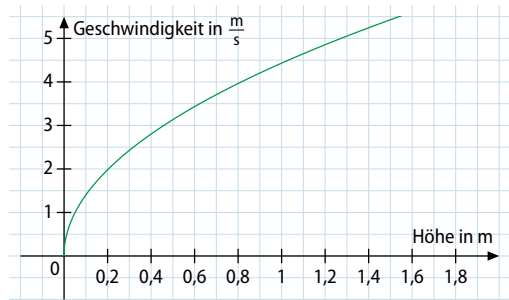
- 2 Rechtecken mit einem Flächeninhalt von  $20 \text{ cm}^2$  wird der einen Seitenlänge die andere zugeordnet.



- 3 Für eine Ferienwohnung wird der Anzahl der Übernachtungen der zu zahlende Gesamtpreis zugeordnet.



- 4 Jeder Höhe, aus der ein kleiner Stein fallen gelassen wird, wird die Geschwindigkeit zugeordnet, mit der er auf dem Boden aufkommt.



- Beschreiben Sie jeweils den Zusammenhang zwischen den dargestellten Größen.
- Beantworten Sie mit Hilfe der entsprechenden Graphen folgende Fragen:

- 1 Für welche Seitenlänge hat ein Quadrat einen Flächeninhalt von  $20 \text{ cm}^2$ ?
- 2 Wie lang ist eine Seite des Rechtecks, wenn die andere Seite  $0,5 \text{ cm}$  lang ist?
- 3 Wie viel kostet die Ferienwohnung für eine Woche?
- 4 Aus welcher Höhe wurde ein Stein fallen gelassen, der mit  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  auf dem Boden aufschlägt?

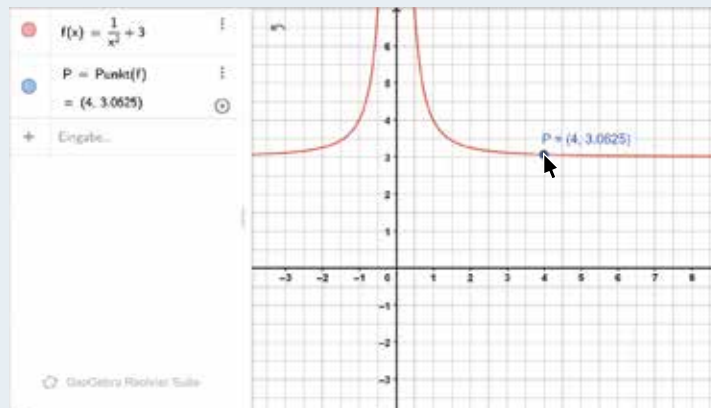
Medien & Werkzeuge

Punkte verfolgen und das Verhalten von Funktionen beschreiben

Funktionsgraphen lassen sich mit einem CAS besonders gut untersuchen.

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 3$ . Setzen Sie einen Punkt  $P$  auf den Graphen und lassen Sie sich die Koordinaten von  $P$  anzeigen.
- Bestimmen Sie nun die fehlenden Koordinaten von  $P$  und geben Sie jeweils an, ob die Lösung eindeutig oder mehrdeutig ist.

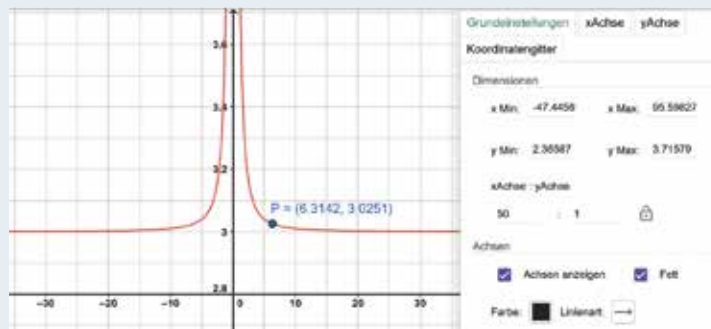
- 1 P (2| )
- 2 P (-1| )
- 3 P ( |4)
- 4 P ( |3,2)



$P$  soll nun nach rechts bewegt werden, so dass sich seine  $y$ -Koordinate dem Wert 3 nähert.

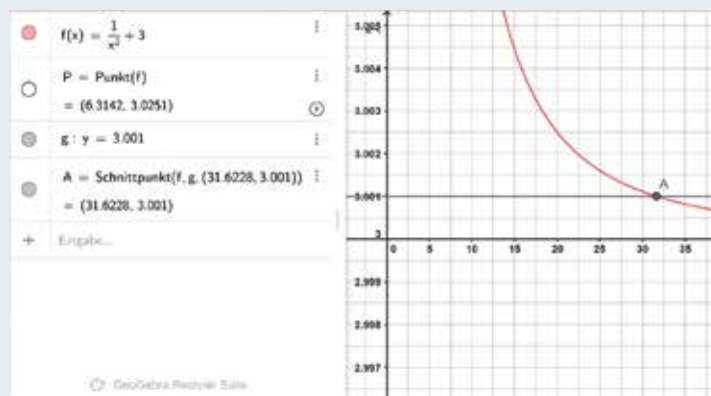
- Skalieren Sie die Koordinatenachsen geeignet und ermitteln Sie die  $x$ -Werte, ab denen die folgenden  $y$ -Werte erstmals unterschritten werden.

$y < \dots$	3,1	3,05	3,01	3,001
$x > \dots$				



Sucht man einen  $x$ -Wert für einen ganz bestimmten  $y$ -Wert der Funktion  $f$ , z. B. für  $y = 3,001$ , kann man mit dem CAS die Gerade  $y = 3,001$  zeichnen und dann den Schnittpunkt der Geraden mit dem Graphen von  $f$  bestimmen. Ggf. muss im CAS eingestellt werden, dass mehr als zwei Dezimalstellen angezeigt werden.

- Prüfen Sie Ihre in den letzten beiden Aufgaben ermittelten Zahlenwerte auf diese Weise.
- Wählen Sie eine eigene Funktion und erzeugen Sie deren Graphen.
- Entwickeln Sie eigene Aufgaben zu Ihrer Funktion und lassen Sie diese von einer Mitschülerin oder einem Mitschüler lösen.



## 2

## 2.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

## Entdecken

Anne und Luca stellen die Graphen einiger Funktionen der Form  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) dar. Anne sagt: „Hier müssen wir für Ordnung sorgen. Ich stelle die Graphen zu Funktionen mit geradem Exponenten dar, du die mit ungeradem.“

- Zeichnen Sie mit Hilfe eines CAS die Graphen folgender Funktionen (jeweils drei):

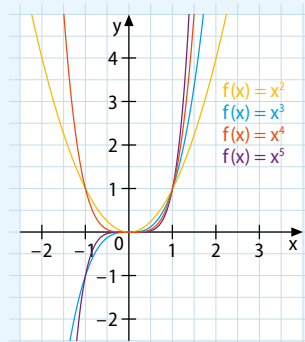
1  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = x^4$ ;  $h(x) = x^6$

2  $f(x) = x^1$ ;  $g(x) = x^3$ ;  $h(x) = x^5$

3  $f(x) = x^{-2}$ ;  $g(x) = x^{-4}$ ;  $h(x) = x^{-6}$

4  $f(x) = x^{-1}$ ;  $g(x) = x^{-3}$ ;  $h(x) = x^{-5}$

- Vergleichen Sie die Schaubilder. Nennen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Formulieren Sie eine Vermutung, wie der Graph der nächsten Funktion in der Reihe verlaufen könnte. Überprüfen Sie Ihre Vermutung mit einem CAS.
- Beschreiben Sie gemeinsame Eigenschaften aller dargestellten Funktionsgraphen.



## Verstehen

Manche Funktionsgraphen im Einstieg hatten (abhängig vom Exponenten) einen ähnlichen Verlauf.

## Merke

Eine Funktion  $f$  der Form  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  heißt **Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten**. Man unterscheidet folgende Fälle:

	gerader Exponent $n$	ungerader Exponent $n$
$n > 0$		
Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$	Wertebereich $W = \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$	Wertebereich $W = \mathbb{R}$
$n < 0$		
Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	Wertebereich $W = \mathbb{R}$ mit $y > 0$	Wertebereich $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Symmetrie	Achsensymmetrie zur y-Achse	Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung $O(0 0)$
gemeinsame Punkte	$(-1 1)$ und $(1 1)$	$(-1 -1)$ und $(1 1)$

Statt Definitions- und Wertebereich sind auch die Begriffe Definitionsbereich und Wertemenge gebräuchlich.

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  steht für die Menge der reellen Zahlen ohne die Null.

Ist eine Funktion an einer Stelle nicht definiert, so liegt eine Definitionslücke vor.

Statt „ $\mathbb{R}$  mit  $y > 0$ “ (positive reelle Zahlen) kann man auch  $\mathbb{R}^+$  schreiben. Soll die Null auch zur Menge gehören, schreibt man  $\mathbb{R}_0^+$ .



**Beispiel**

Betrachten Sie die Graphen der Funktionen f, g, h und i mit folgenden Gleichungen:

$f(x) = x^4$        $g(x) = x^{-1}$        $h(x) = x^{-2}$        $i(x) = x^3$

Geben Sie diejenigen Funktionen an, deren Graph ...

- a) punktsymmetrisch zum Ursprung O (0|0) ist.
- b) durch den Punkt A (-1|1) verläuft.
- c) eine Definitionslücke an der Stelle 0 hat.
- d) den Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  hat.

**Lösung:**

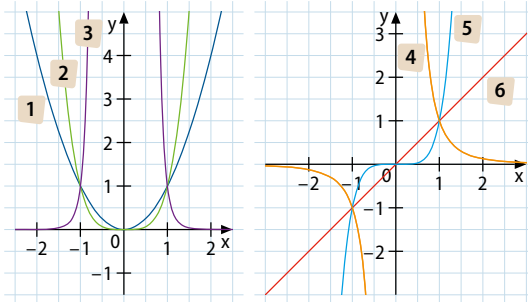
- a) g und i
- b) f und h
- c) g und h
- d) f und i

Stellen Sie die Graphen mit einem CAS dar.

**Nachgefragt**

- Begründen Sie, dass alle Potenzfunktionen f der Form  $f(x) = x^n$  mit ganzzahligem Exponenten durch den Punkt B (1|1) verlaufen.
- Jan behauptet: „Der Wertebereich der Funktion f mit  $f(x) = x^6$  ist  $W = \mathbb{R}^+$ .“ Erläutern Sie, ob Jans Aussage stimmt.

- 1** Die Graphen **1** bis **6** stellen Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten dar.
- a) Entscheiden Sie jeweils, ob der Exponent positiv/negativ bzw. gerade/ungerade ist.
  - b) Geben Sie jeweils eine Funktionsgleichung für die Funktionen **1** bis **6** an.
  - c) Beschreiben Sie den Verlauf der Funktionen mit Hilfe folgender Begriffe: Definitions- und Wertebereich, Definitionslücke, Symmetrie, gemeinsame Punkte, Monotonie



- 2** Die Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion f. Berechnen Sie fehlende Koordinaten.

a)	$f(x) = x^2$	A (3   a)	B (-2,5   b)	C (c   20,25)	D (d   $\frac{9}{64}$ )
b)	$f(x) = x^3$	A (-2   a)	B (1,4   b)	C (c   0,125)	D (d   $-3^9$ )
c)	$f(x) = x^5$	A ( $-\frac{1}{2}$   a)	B (5   b)	C (c   -215)	D (d   $\frac{1}{243}$ )
d)	$f(x) = x^{-2}$	A (3   a)	B ( $-\frac{3}{4}$   b)	C (c   $\frac{1}{9}$ )	D (d   16)

- 3** Ermitteln Sie alle gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen f und g.
- a)  $f(x) = x^3$  und  $g(x) = x^{-1}$
  - b)  $f(x) = x^5$  und  $g(x) = x^8$
  - c)  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x^{-2}$
  - d)  $f(x) = x^2$  und  $g(x) = x^5$

- 4** Entscheiden Sie begründet, welche Wertetabelle zu welcher Funktionsgleichung gehört.

**1**

x	-2	2	3
y	-32	32	243

A  $g(x) = x^8$

**2**

x	-2	2	3
y	-128	128	2187

B  $k(x) = x^5$

**3**

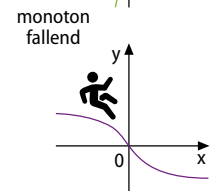
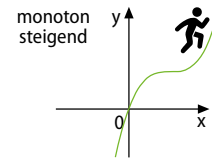
x	-2	2	3
y	256	256	6561

C  $h(x) = x^7$

**Aufgaben**

**oHiMi**

1



Achten Sie bei Potenzen auf die Klammern:  
 $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$   
 $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -2 \cdot 2 = -4$

## 2

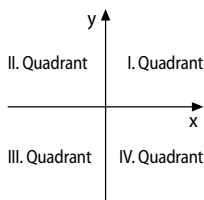
## 2.1 Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten

Alles klar?

- 5 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^{-3}$ . Ergänzen Sie die Wertetabelle in Ihrem Heft und zeichnen Sie den Graphen der Funktion so genau wie möglich.

x	-2	-1,5	-1,2	-1	-0,7	0	0,4	1	1,3	1,5
f(x)	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

- 6 Begründen Sie, warum Sie mit Hilfe der Wertebelle aus Aufgabe 5 unmittelbar einige weitere Punkte des Funktionsgraphen angeben können, ohne dafür rechnen zu müssen.



- 7 Kim zeichnet den Graphen einer Potenzfunktion  $f$  der Form  $f(x) = x^n$  mit ganzzahligem Exponenten, der u. a. durch den III. Quadranten verläuft.
- Nennen Sie alle Informationen zu der Funktion, die sich daraus erschließen lassen.
  - Stellen Sie allgemeingültige Aussagen zum Verlauf von Graphen von Potenzfunktionen zu folgenden Satzanfängen auf: „Ist der Exponent einer Potenzfunktion ...“
    - gerade und positiv, dann ...“
    - ungerade und positiv, dann ...“
    - gerade und negativ, dann ...“
    - ungerade und negativ, dann ...“

### 8 Argumentieren und Begründen

Toni sucht eine Potenzfunktion  $f$  der Form  $f(x) = x^n$  mit ganzzahligem Exponenten, die sowohl achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist als auch durch den Punkt  $P(2|8)$  verläuft. Begründen Sie, warum es eine solche Funktion nicht geben kann.

Ideen:

- Setzen Sie die Koordinaten des Punktes in die Funktionsgleichung ein.
- Beachten Sie den Einfluss des Exponenten auf die Symmetrie.
- Nutzen Sie gegebenenfalls ein CAS zum Experimentieren.

Die Funktionsgraphen von Potenzfunktionen der Form  $y = x^n$  mit positiven ganzzahligen Exponenten werden **Parabeln  $n$ -ter Ordnung** genannt, die mit negativen ganzzahligen Exponenten heißen **Hyperbeln  $n$ -ter Ordnung**.

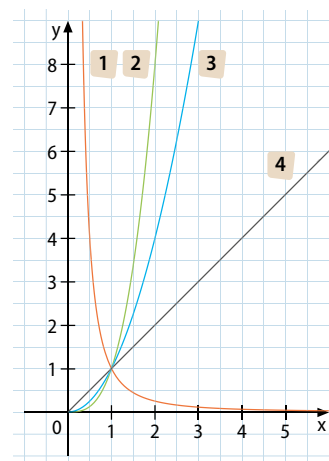
- 9 Die Graphen 1 bis 4 stellen Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten dar und wurden nur im I. Quadranten gezeichnet.

- Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an.
- Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

Jonas: Bei den Graphen 2 und 3 sehe ich sofort, dass sie dieselbe Symmetrie haben müssen.

Tarek: Graph 4 kann nicht achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse sein, weil er sonst einen Knick hätte, was Potenzfunktionen aber nicht haben.

Pia: Graph 1 ist eine Hyperbel, also ist der Exponent negativ.



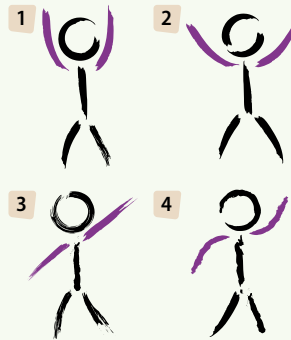
Obwohl  $0^0$  nicht definiert ist, hat  $f(x) = 1$  trotzdem den Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$ .

- 10 Erläutern Sie, warum eine Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = 1$  ebenfalls als eine Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten aufgefasst werden kann.

Methoden

**Bewegte Mathematik: Der „Parabelmove“**

Die Parabeln n-ter Ordnung lassen sich auch mit den Armen bei einem „Parabelmove“ darstellen. Auf diese Weise können Sie das Verhalten der Funktionen, abhängig vom Exponenten n in der Funktionsgleichung  $y = x^n$ , qualitativ darstellen. **Beispiel:**



- Beschreiben Sie, welche Exponenten von den Personen **1** bis **4** dargestellt sein könnten. Erläutern Sie insbesondere den Unterschied zwischen **1** und **2**.
- Nennen Sie sich gegenseitig Funktionsgleichungen und stellen Sie die Funktionen im passenden „Parabelmove“ dar.
- Stellen Sie eine Choreographie von mehreren Parabeln zusammen und lassen Sie sie von anderen Mitschüler:innen in Funktionsgleichungen „übersetzen“.
- Bilden Sie Zweierteams: Ein Teammitglied nennt in schneller Folge 7 Potenzfunktionen, das andere macht den zugehörigen „Parabelmove“.

- 11 a)** Stellen Sie die Graphen von zwei verschiedenen Potenzfunktionen mit positivem, geradem, ganzzahligem Exponenten dar und ermitteln Sie mit dem CAS die gemeinsamen Punkte der beiden Funktionsgraphen.



- b)** Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede, wenn Sie nun zwei verschiedene Potenzfunktionen mit positivem, ungeradem, ganzzahligem Exponenten darstellen und mit dem CAS gemeinsame Punkte ermitteln.
- c)** Geben Sie die Nullstelle einer Potenzfunktion der Form  $y = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  an.
- d)** Begründen Sie, warum eine Potenzfunktion mit negativem Exponenten keine Nullstelle haben kann.

- 12** Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten lassen sich in gerade und ungerade Funktionen einteilen.

- 1** Eine Funktion f heißt gerade, wenn für jedes  $x \in D$  gilt:  $f(x) = f(-x)$ .
- 2** Eine Funktion f heißt ungerade, wenn für jedes  $x \in D$  gilt:  $f(x) = -f(-x)$ .

- a)** Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion ...
- 1** f mit  $f(x) = x^2$  gerade ist.
  - 2** g mit  $g(x) = x^3$  ungerade ist.
- b)** Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen geraden / ungeraden Funktionen und der Symmetrie von Funktionen. Nutzen Sie hierfür auch selbst gewählte Beispiele.
- c)** Deuten Sie die Bezeichnungen „gerade Funktion“ und „ungerade Funktion“ mit Hilfe Ihrer Kenntnisse über Potenzfunktionen.
- d)** Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion h mit  $h(x) = x^4 + x^{-2}$  achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

Eine **Nullstelle** einer Funktion ist ein x-Wert, für den der Funktionswert  $f(x) = 0$  wird. Der Graph schneidet oder berührt an dieser Stelle die x-Achse.

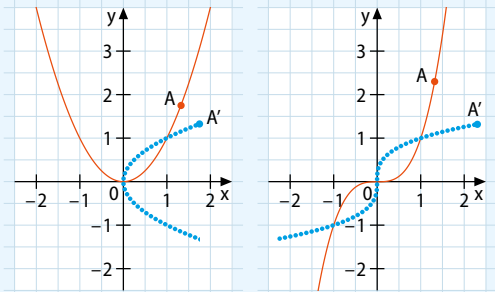
Eine ausführliche Darstellung zur Symmetrie finden Sie auf Seite xx.

## 2

## 2.2 Wurzelfunktionen

## Entdecken

- Zeichnen Sie mit einem CAS den Graphen einer Potenzfunktion der Form  $y = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  und setzen Sie einen Punkt A auf den Graphen.
- Erstellen Sie den Punkt A', bei dem die x- und y-Koordinaten von A vertauscht sind, z. B. über den Befehl  $A' = (y(A) | x(A))$ .
- Bewegen Sie A und untersuchen Sie, ob die Spur von A' auch den Graphen einer Funktion zeichnet.



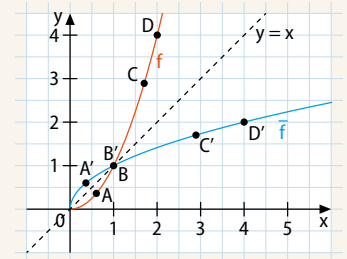
## Verstehen

In manchen Fällen lässt sich durch Vertauschen von x und y wieder eine Funktion erzeugen, in manchen Fällen nicht, weil die Zuordnung dann nicht mehr eindeutig ist.

## Merke

Da x und y vertauscht werden, entsteht der Graph der Umkehrfunktion  $\bar{f}$ , indem man den Graphen von f an der Geraden  $y = x$  spiegelt.

Eine Funktion f heißt **umkehrbar**, wenn nicht nur jedem x-Wert (Argument) eindeutig ein y-Wert (Funktionswert) zugeordnet werden kann, sondern auch jedem y-Wert eindeutig ein x-Wert. Die Funktion, deren Gleichung dann durch Vertauschen von x und y entsteht, heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit  $\bar{f}$  bezeichnet.



Bei vielen Funktionen, die erst einmal nicht umkehrbar sind, kann man den Definitionsbereich so einschränken, dass sie zumindest in diesem Bereich umkehrbar sind.

## Merke

Potenzfunktionen der Form  $y = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit dem **eingeschränkten Definitionsbereich**  $D = \mathbb{R}_0^+$  sind umkehrbar. Vertauscht man x und y in der Funktionsgleichung und löst diese nach y auf, erhält man die Funktionsgleichung  $y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ . Daher heißt die so erhaltene Umkehrfunktion auch **Wurzelfunktion**.

## Beispiel

Bestimmen Sie zur Funktion f mit  $f(x) = x^4$  mit  $D = \mathbb{R}_0^+$  die Gleichung der Umkehrfunktion und geben Sie für beide Funktionen das Monotonieverhalten an.

**Lösung:**

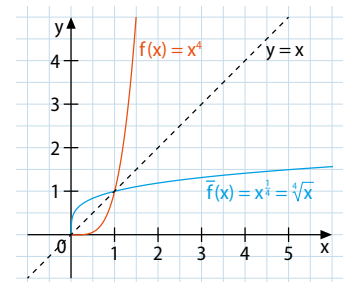
Gleichung von f:  $f(x) = y = x^4$

Vertauschen von x und y:  $x = y^4$

Umformen nach y:  $y = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

Gleichung von  $\bar{f}$ :  $\bar{f}(x) = y = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

Beide Funktionen sind monoton wachsend.



**Nachgefragt**

- Erläutern Sie, ob es auch bei Potenzfunktionen mit ungeradem ganzzahligem Exponenten notwendig ist, den Definitionsbereich einzuschränken, um die Umkehrfunktion zu bilden.
- Begründen Sie, warum Wurzelfunktionen der Form  $y = \sqrt[n]{x}$  auch Potenzfunktionen sind.

**Aufgaben**

**1** Bestimmen Sie rechnerisch die Umkehrfunktion zu folgenden Funktionen f. Stellen Sie sie anschließend paarweise in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

a)  $f(x) = x^2; x \geq 0$       b)  $f(x) = \sqrt[3]{x}; x \geq 0$       c)  $f(x) = x; x \geq 0$

**2** Stellen Sie mit einem CAS die folgenden Funktionen im gleichen Koordinatensystem dar und beschreiben Sie die Gemeinsamkeiten aller Funktionsgraphen.

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$        $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$        $h(x) = x^{\frac{1}{6}}$

**3** Ermitteln Sie für jeden der angegebenen Punkte, auf welchen Funktionsgraphen der Funktionen f, g, h und i dieser liegt.

E (1|1)

L (9|3)

T (4|4)

N (8|2)

U (16|2)

A (2,25|1,5)

O (2,5|2,5)

B ( $\frac{1}{27} | \frac{1}{3}$ )

W ( $\frac{81}{16} | \frac{3}{2}$ )

$f(x) = \sqrt{x}$

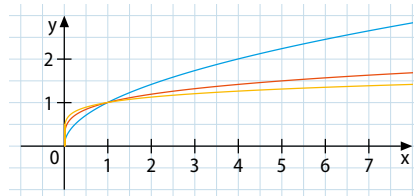
$g(x) = \sqrt[4]{x}$

$h(x) = x$

$i(x) = x^{\frac{1}{3}}$

**4** Entscheiden Sie, welches die passenden Funktionsgleichungen zu den Graphen sind.

$f(x) = \sqrt{x}$        $g(x) = \sqrt[4]{x}$        $g(x) = \sqrt[6]{x}$



**5 a)** Begründen Sie, warum folgende Funktionen im angegebenen Definitionsbereich nicht umkehrbar sind.

**1** f mit  $f(x) = x^2; D = [-2; +2]$

**2** g mit  $g(x) = x^4; D = \mathbb{R}$

**b)** Geben Sie jeweils eine Einschränkung des Definitionsbereichs so an, dass die Funktion darauf umkehrbar wird.

**6** Bisher sind Wurzelfunktionen mit Exponenten  $\frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) definiert. Potenzen haben wir aber allgemeiner mit  $\frac{m}{n}$  im Exponenten kennengelernt. Tatsächlich ist dies auch für Wurzelfunktionen möglich.

Sind m und n natürliche Zahlen und  $x \geq 0$ , so ist die Potenzfunktion f mit  $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$  eine **(allgemeine) Wurzelfunktion**.

**a)** Formulieren Sie Vermutungen und fertigen Sie Skizzen an, wie der Graph folgender Funktionen verlaufen könnte. Überprüfen Sie mit einem CAS.

**1**  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$        $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$        $h(x) = x^{\frac{3}{4}}$        $i(x) = x^{\frac{2}{5}}$

**2**  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$        $g(x) = x^{\frac{4}{3}}$        $h(x) = x^{\frac{5}{3}}$        $i(x) = x^{\frac{11}{4}}$

**b)** Beschreiben Sie gemeinsame Eigenschaften der Graphen in Abhängigkeit von den Exponenten.

2

2.3 Funktionsgraphen transformieren

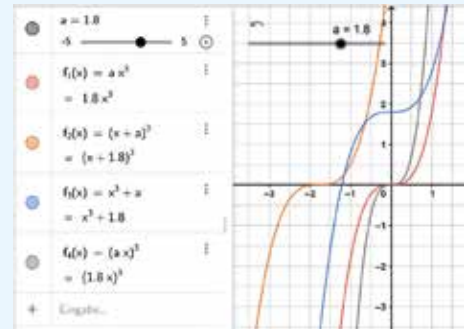
Entdecken

Die Abbildung zeigt die Graphen von Funktionen mit Parameter **a** 1 bis 4. Teilen Sie sich in vier Kleingruppen auf.

- Stellen Sie mit einem CAS den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$  sowie im selben Koordinatensystem ihre jeweilige Funktion mit Parameter dar:

1  $f_1(x) = a \cdot x^3$       2  $f_2(x) = (x + a)^3$   
 3  $f_3(x) = x^3 + a$       4  $f_4(x) = (a \cdot x)^3$

- Setzen Sie für  $a$  verschiedene Werte ein und untersuchen Sie, welchen Einfluss „Ihr“ Parameter auf den Verlauf des Graphen hat. Formulieren Sie Vermutungen.
- Überprüfen Sie Ihre Vermutungen mit anderen Potenzfunktionen, z. B.  $g(x) = x^{-1}$ .
- Vergleichen Sie die jeweiligen Gruppenergebnisse.



Verwenden Sie am besten einen Schieberegler.

Verstehen

Parameter in Funktionsgleichungen bewirken eine Streckung, Stauchung, Spiegelung oder Verschiebung des Graphen der ursprünglichen Funktion – in  $x$ - oder  $y$ -Richtung.

Merke

Der Term einer Ausgangsfunktion kann auch durch mehrere Parameter gleichzeitig transformiert werden. Der Graph von  $f$  mit  $f(x) = -2 \cdot (x + 2)^3 - 3$  geht aus dem Graphen von  $y = x^3$  hervor, indem er ...

- mit dem Faktor 2 gestreckt,
- an der  $x$ -Achse gespiegelt,
- um 2 Einheiten nach links und
- um 3 Einheiten nach unten verschoben wird.

Veränderung der Funktion

Term	Graph	Term	Graph
$a \cdot f(x)$	<b>Streckung</b> (für $ a  > 1$ ) oder <b>Stauchung</b> (für $ a  < 1$ ) des Graphen mit dem Faktor $ a $ in $y$ -Richtung, für $a < 0$ zusätzlich <b>Spiegelung</b> an der $x$ -Achse	$f(b \cdot x)$	<b>Streckung</b> (für $ b  < 1$ ) oder <b>Stauchung</b> (für $ b  > 1$ ) des Graphen in $x$ -Richtung, für $b < 0$ zusätzlich <b>Spiegelung</b> an der $y$ -Achse
$f(x) + c$	<b>Verschiebung</b> um $c$ Einheiten in $y$ -Richtung	$f(x - d)$	<b>Verschiebung</b> um $d$ Einheiten in $x$ -Richtung

## Beispiele

I. Beschreiben Sie, wie die Graphen der folgenden Funktionen aus dem Graphen von  $f(x) = x^3$  hervorgehen.

a)  $f_1(x) = -\frac{2}{3}x^3$     b)  $f_2(x) = x^3 + 0,25$     c)  $f_3(x) = (x + 2)^3$     d)  $f_4(x) = 2 \cdot (x - 3)^3 - 1$

**Lösung:**

a)  $f_1$ : Stauchung mit dem Faktor  $\frac{2}{3}$  entlang der y-Achse und Spiegelung an der x-Achse

b)  $f_2$ : Verschiebung um 0,25 Einheiten nach oben (in positive y-Richtung)

c)  $f_3$ : Verschiebung um 2 Einheiten nach links (in negative x-Richtung)

d)  $f_4$ : Streckung mit dem Faktor 2, Verschiebung um 3 Einheiten nach rechts (in positive x-Richtung) und um 1 Einheit nach unten (in negative y-Richtung)

II. Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an, deren Graph aus dem Graphen der Funktion f mit  $f(x) = x^{-3}$  hervorgeht, in dem er ...

a) um 2 Einheiten nach oben (in positive y-Richtung) verschoben wird.

b) um 3 Einheiten nach rechts (in positive x-Richtung) verschoben wird.

c) in y-Richtung mit dem Faktor 1,5 gestreckt wird.

**Lösung:**

a)  $g(x) = x^{-3} + 2$     b)  $g(x) = (x - 3)^{-3}$     c)  $g(x) = 1,5x^{-3}$

III. Der Graph einer transformierten Potenzfunktion der Form  $y = a \cdot x^n$  verläuft durch die Punkte A (2 | 32) und B (3 | 108). Geben Sie die Funktionsgleichung an.

**Lösung:**

I  $32 = a \cdot 2^n \Rightarrow I \ a = \frac{32}{2^n}$

II  $108 = a \cdot 3^n \Rightarrow II \ a = \frac{108}{3^n}$

gleichsetzen:  $\frac{32}{2^n} = \frac{108}{3^n} \Leftrightarrow 32 \cdot 3^n = 2^n \cdot 108 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{27}{8} \Leftrightarrow n = 3$

n in I:  $a = \frac{32}{2^3} = \frac{32}{8} = 4$ , also  $y = 4 \cdot x^3$

## Nachgefragt

■ Sie kennen bereits gemeinsame Punkte von Potenzfunktionen der Form  $y = x^n$  mit ganzzahligem Exponenten. Beschreiben Sie, wie sich diese Punkte unter folgenden Parametereinflüssen verändern:

1  $y = a \cdot x^n$     2  $y = (b \cdot x)^n$     3  $y = x^n + c$     4  $y = (x - d)^n$

■ Untersuchen Sie, welchen Einfluss die Parameter a, b, c und d haben, wenn sie 0 betragen.

■ Zeigen Sie mit einer Wertetabelle, dass der Graph der Funktion g mit  $g(x) = (x + 1)^2$  gegenüber dem der Funktion f mit  $f(x) = x^2$  um 1 Einheit nach links verschoben ist.

1 Skizzieren Sie per Hand die Graphen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie im Anschluss mit einem CAS.

a)  $f: f(x) = 2 \cdot x^2$     b)  $g: g(x) = (x - 2)^{-1}$     c)  $h: h(x) = x^3 - 2$     d)  $i: i(x) = 2x^{-2} + 2$

2 Der Graph einer transformierten Potenzfunktion der Form  $y = a \cdot x^n$  verläuft durch die Punkte A und B. Geben Sie jeweils die Funktionsgleichung an.

a) A (2 | -8); B (3 | -18)    b) A (1 | 4); B (-2 | -128)    c) A (2 | -24); B (1,5 | -10 $\frac{1}{8}$ )

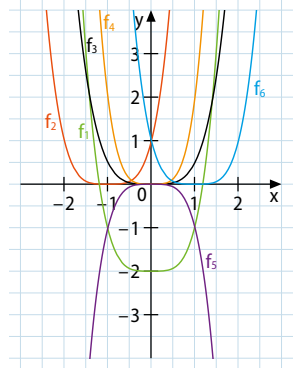
## Aufgaben

## 2

## 2.3 Funktionsgraphen transformieren

- 3 Es wurden Änderungen an der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^4$  durchgeführt. Ordnen Sie den Funktionsgraphen die Beschreibungen zu und geben Sie eine Funktionsgleichung an.

- A Verschiebung in x-Richtung um 1
- B Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2
- C Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$
- D Verschiebung in x-Richtung um  $-1$
- E Verschiebung in y-Richtung um  $-2$
- F Spiegelung an der x-Achse



- 4 Auf die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3$  wurden mehrere Parameter angewandt. Beschreiben Sie jeweils den Graphen der so entstandenen Funktion  $g$ . Überprüfen Sie mit einem CAS.
- a)  $g(x) = (x - 2)^3 + 1$
  - b)  $g(x) = 2 \cdot (x - 2)^3$
  - c)  $g(x) = -x^3 + 1$
  - d)  $g(x) = -(x - 1)^3$
  - e)  $g(x) = 2 \cdot (x - 1)^3 + 2$
  - f)  $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 2)^3 + 1$

Alles klar?

- 5 Die Tabelle zeigt einige Werte der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 + c$ . Ermitteln Sie, ohne zu zeichnen, den Wert von  $c$ .

a)

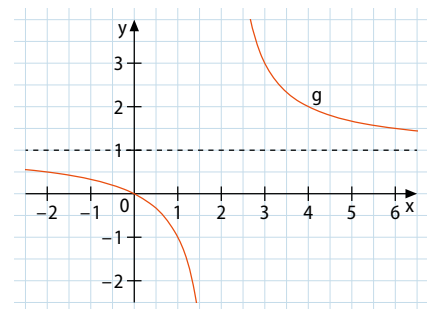
x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4,5	1,5	0,5	1,5	4,5

b)

x	1	2	3	4	5
f(x)	-2	1	6	13	22

- 6 Rayan behauptet, dass der Graph von  $g$  mit  $g(x) = (2x)^3$  durch Streckung entlang der y-Achse aus dem Graphen von  $f$ :  $f(x) = x^3$  hervorgeht. Beurteilen Sie, ob Rayan Recht hat.

- 7 Der Graph der Funktion  $g$  geht durch den Einfluss mehrerer Parameter aus dem Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^{-1}$  hervor. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von  $g$ .



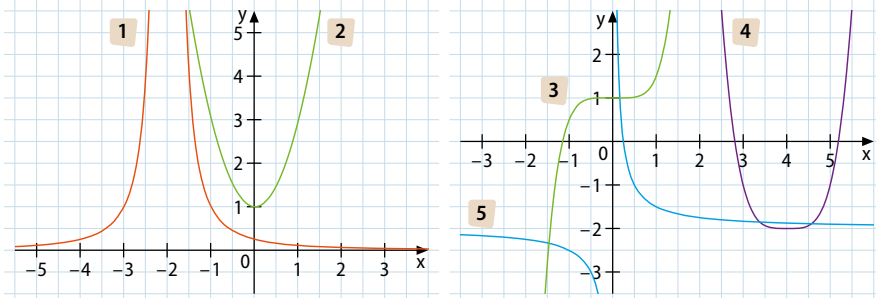
- 8 Erstellen Sie mit einem CAS den Graphen einer Funktion  $g$ , die durch zwei Parameter aus  $f$  mit  $f(x) = x^{-2}$  hervorgeht. Lassen Sie Ihren Partner oder Ihre Partnerin die Funktionsgleichung von  $g$  bestimmen.

- 9 Skizzieren Sie ausgehend vom Graphen von  $f$  den Graphen von  $g$ . Beschreiben Sie, wie der Graph von  $g$  aus demjenigen von  $f$  hervorgeht.

- a)  $f(x) = x^3$     $g(x) = 2 \cdot (x + 1,5)^3 - 2$
- b)  $f(x) = x^5$     $g(x) = 0,2 \cdot (x - 3)^5 + 2,5$
- c)  $f(x) = x^2$     $g(x) = -(x + 10)^2$
- d)  $f(x) = x^4$     $g(x) = 5 \cdot (x + 5)^4 + 1$
- e)  $f(x) = x^3$     $g(x) = -9 \cdot x^3 + 2$
- f)  $f(x) = x^4$     $g(x) = -4 \cdot (x - 3)^4 + 11$



10 Die Graphen zeigen Potenzfunktionen der Form  $y = a \cdot (x - d)^n + c$  mit  $n \in \mathbb{Z}$ .



- Geben Sie für jeden Graphen an, ob  $a$ ,  $d$  bzw.  $c$  positiv/null/negativ ist und ob  $n$  positiv/negativ bzw. gerade/ungerade ist.
- Ordnen Sie folgende Aussagen den Graphen 1 bis 5 zu. Der Funktionsgraph ...
  - A wurde um 4 Einheiten in  $x$ -Richtung verschoben.
  - B wurde in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $\frac{1}{2}$  gestaucht.
  - C ist punktsymmetrisch zu  $P(0 | 1)$ .
  - D wurde um 1 Einheit in  $y$ -Richtung verschoben.
  - E ist achsensymmetrisch zu  $x = 4$ .
  - F wurde in  $y$ -Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt.

*Manche Aussagen können mehreren Graphen zugeordnet werden.*

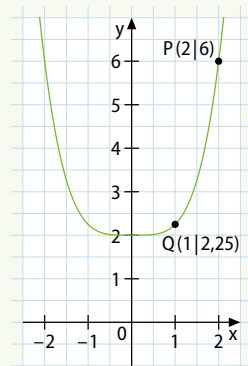
11 **Argumentieren und Begründen**

Die Abbildung zeigt den gestauchten Graphen einer um 2 Einheiten in  $y$ -Richtung verschobenen Potenzfunktion  $f$ .

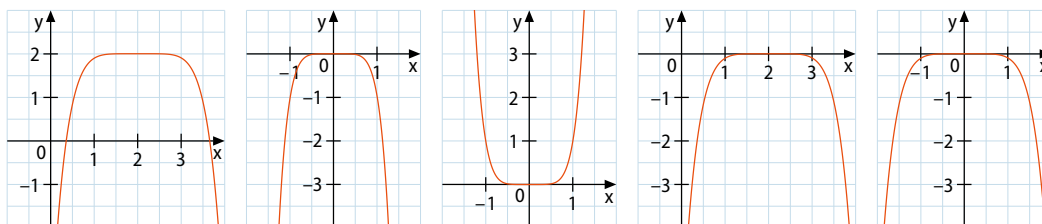
- Begründen Sie, dass der auf dem Graphen liegende Punkt  $P(2 | f(2))$  noch nicht ausreicht, um den Exponenten  $n$  zu bestimmen.
- Weisen Sie nach, dass zusätzlich der auf  $f$  liegende Punkt  $Q(1 | f(1))$  ausreicht, um nun  $n$  festzulegen.

**Idee:**

- Stellen Sie eine allgemeine Gleichung für den Graphen der Funktion  $f$  mit den relevanten Parametern auf.
- Setzen Sie in die allgemeine Gleichung zunächst die Koordinaten von  $Q$  ein und ermitteln Sie damit den Wert eines Parameters. Anschließend können Sie die Koordinaten von  $P$  nutzen, um  $n$  zu bestimmen.



12 Sie sehen eine Bilderfolge von Graphen, die schrittweise die Transformation der Funktion  $h$  mit  $h(x) = x^6$  zeigt. Bringen Sie die Bilder in eine sinnvolle Reihenfolge und notieren Sie zu jedem Graphen einen Funktionsterm.



## 2

## 2.4 Verhalten im Unendlichen

## Entdecken

- Übertragen Sie die Wertetabelle und füllen Sie sie aus.

	-1000	-100	-10	-1	-0,1	-0,01	0,01	0,1	1	10	100	1000
$f_1(x) = x^2$												
$f_2(x) = x^3$												
$f_3(x) = x^{-2}$												
$f_4(x) = x^{-3}$												

- Betrachten Sie anhand der Funktionswerte den Verlauf der Funktionsgraphen für immer kleiner bzw. größer werdende  $x$ -Werte. Erläutern Sie einen Zusammenhang zum Exponenten und überprüfen Sie Ihre Vermutungen an weiteren Funktionen.

## Verstehen

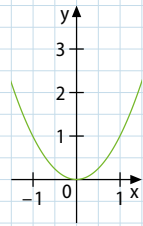
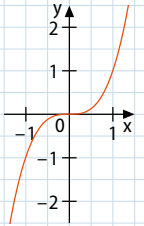
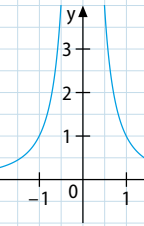
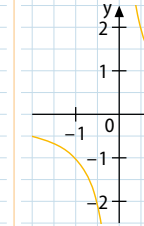
Statt Globalverhalten sagt man auch: „Man untersucht die Funktion bezüglich ihres Verhaltens im Unendlichen.“

## Die Schreibweise

„für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ “ bedeutet, dass die Funktionswerte von  $f$  für immer größere  $x$ -Werte gegen unendlich streben, die Funktion also beliebig große  $y$ -Werte annimmt.

Das Verhalten einer Potenzfunktion der Form  $y = x^n$  für beliebig große und kleine  $x$ -Werte, also ihr Globalverhalten, hängt vom Exponenten der Potenzfunktion ab.

## Merke

Exponent	positiv, gerade	positiv, ungerade	negativ, gerade	negativ, ungerade
				
für $x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow 0$ (Die $x$ -Achse ist Asymptote.)	
für $x \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$	$f(x) \rightarrow +\infty$		

Eine **Asymptote** ist eine Gerade, an die sich ein Funktionsgraph im Unendlichen immer weiter annähert.

Den Vorgang, dass Zahlen immer größer oder kleiner werden, beschreibt man als „strebt gegen plus/minus unendlich“; in Zeichen:  $x \rightarrow +\infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ .

## Beispiele

- I. Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion  $f$  im Unendlichen.

a)  $f(x) = x^7$     b)  $f(x) = x^{-5}$     c)  $f(x) = x^{28}$     d)  $f(x) = x^{-12}$

## Lösung:

- a) Der Exponent ist positiv und ungerade: Die Funktionswerte streben für immer kleiner werdende  $x$ -Werte gegen  $-\infty$ , für größer werdende  $x$ -Werte gegen  $+\infty$ .
- b) Der Exponent ist negativ und ungerade, also streben die Funktionswerte für immer kleiner werdende  $x$ -Werte gegen 0 und für immer größer werdende  $x$ -Werte ebenfalls.
- c) Der Exponent ist positiv und gerade, also streben die Funktionswerte für immer kleiner und für immer größer werdende  $x$ -Werte gegen  $+\infty$ .
- d) Der Exponent ist negativ und gerade, also streben die Funktionswerte für immer kleiner werdende  $x$ -Werte gegen 0 und für immer größer werdende  $x$ -Werte ebenfalls.

II. Geben Sie für das Globalverhalten jeweils drei verschiedene Funktionsgleichungen an.

- a) für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow 0$       b) für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$
- c) für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$       d) für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow 0$
- e) für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$

**Lösungsmöglichkeit:**

- a)  $f_1(x) = x^{-5}; f_2(x) = x^{-2}; f_3(x) = x^{-17}$  (Exponent negativ)
- b)  $f_1(x) = x^5; f_2(x) = x^2; f_3(x) = x^{17}$  (Exponent positiv)
- c)  $f_1(x) = x^6; f_2(x) = x^8; f_3(x) = x^{22}$  (Exponent positiv und gerade)
- d)  $f_1(x) = x^{-8}; f_2(x) = x^{-13}; f_3(x) = x^{-48}$  (Exponent negativ)
- e)  $f_1(x) = x^7; f_2(x) = x^{21}; f_3(x) = x^{73}$  (Exponent positiv und ungerade)

**Nachgefragt**

- Begründen Sie, dass eine Verschiebung des Funktionsgraphen in y- und in x-Richtung keinen Einfluss auf das Globalverhalten der Funktion hat.
- Erläutern Sie, ob der Streckungsparameter in y-Richtung Einfluss auf das Globalverhalten der Funktion hat.

*Achten Sie hier besonders auf den Faktor  $a \cdot f(x)$  für  $a < 0$ .*

1 Ordnen Sie Funktionsgraph und Funktionsgleichung begründet einander zu.

1

2

3

4

5

6

7

8

A  $f(x) = x^4$

B  $f(x) = \frac{1}{x^6}$

C  $f(x) = \frac{1}{x^{12}}$

D  $f(x) = \frac{1}{x^9}$

E  $f(x) = \frac{1}{x^{13}}$

F  $f(x) = x^{12}$

G  $f(x) = x^{19}$

H  $f(x) = x^7$

2 Beschreiben Sie das Globalverhalten der Funktionen in der Randspalte, wenn der Ausgangsgraph an der x-Achse gespiegelt wird.

3 Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen, ohne sie zu zeichnen.

- a)  $f(x) = x^{-7} + 3$       b)  $f(x) = 2 \cdot x^{-7} + 3$       c)  $f(x) = 2 \cdot (x^{-7} + 3)$       d)  $f(x) = (x + 2)^{-7} + 3$
- e)  $f(x) = -3 \cdot x^6 - 2$       f)  $f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x^4 + 1$       g)  $f(x) = 4 \cdot (x - 4)^3$       h)  $f(x) = -x^5 - 2$

**Aufgaben**

**oHiMi**  
1, 2, 3

$f(x) = x^3$

$f(x) = -x^3$

$f(x) = x^4$

$f(x) = -x^4$

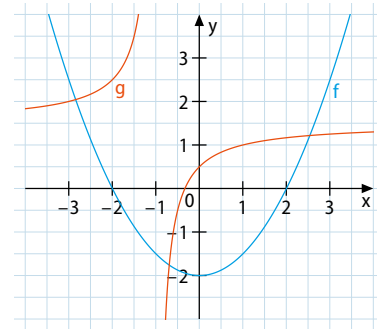
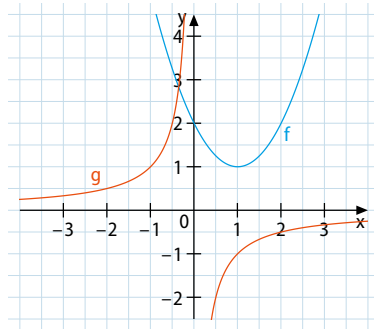
## 2

## Trainingsrunde

## Differenzierte Basisaufgaben

Die folgenden Aufgaben behandeln alle Themen, die Sie in diesem Kapitel kennengelernt haben. Die Basisaufgaben auf dieser Seite sind in zwei Spalten unterteilt. Die **grünen** Aufgaben auf der linken Seite sind etwas einfacher als die **blauen** auf der rechten. Entscheiden Sie selbst, welche Aufgaben Sie bearbeiten.

- 1 Beschreiben Sie die Eigenschaften (Definitions- und Wertebereich, Symmetrie, Monotonie, charakteristische Punkte) der dargestellten Funktionen. Geben Sie jeweils mögliche Funktionsgleichungen zu den Graphen an.



- 2 Die Punkte A, B und C liegen auf dem Graphen der Funktion f. Berechnen Sie die fehlenden Koordinaten.

a)  $f(x) = x^2$     A (3 | ); B ( | 0); C (-1 | )  
 b)  $f(x) = x^{-3}$     A (1 | ); B ( |  $\frac{1}{8}$ ); C ( |  $-\frac{1}{8}$ )

a)  $f(x) = x^3$     A (2 | ); B ( | 0); C ( | -27)  
 b)  $f(x) = x^{-4}$     A (-1 | ); B ( |  $\frac{1}{16}$ ); C (-5 | )

- 3 Skizzieren Sie eine Potenzfunktion der Form  $y = x^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) mit folgender Eigenschaft. Geben Sie Ihr gewähltes  $n$  an.

- a)  $n$  ungerade  
 b) punktsymmetrisch zu O (0 | 0), verläuft durch (0,5 | 2)

- a) verläuft durch (2 | 8)  
 b) verläuft durch den II. Quadranten, enthält keine Definitionslücke

- 4 Entscheiden Sie, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich umkehrbar ist, und geben Sie gegebenenfalls die Gleichung der Umkehrfunktion an.

a)  $f(x) = x^2$ ;  $D = \mathbb{R}$     b)  $f(x) = x$ ;  $D = \mathbb{R}_0^+$

a)  $f(x) = x^4$ ;  $D = [-7; 7]$     b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $D = \mathbb{R}_0^+$

- 5 Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht. Skizzieren Sie auch den Graphen von g.

a)  $f(x) = x^3$ ;  $g(x) = 2x^3 + 5$   
 b)  $f(x) = x^{-2}$ ;  $g(x) = (x-4)^{-2}$

a)  $f(x) = x^2$ ;  $g(x) = (x+3)^2 - 1,5$   
 b)  $f(x) = x^{-3}$ ;  $g(x) = 2 \cdot (-x)^{-3}$

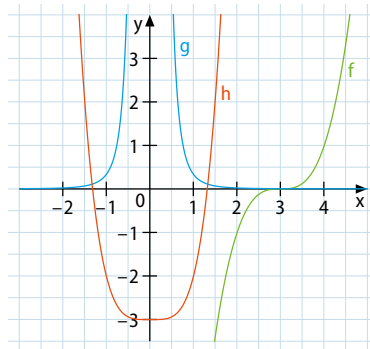
Weiterführende Aufgaben

Dieser Teil der Trainingsrunde enthält weiterführende und vernetzende Aufgaben, die sich ebenfalls auf das gesamte Kapitel beziehen.

oHiMi  
6-9

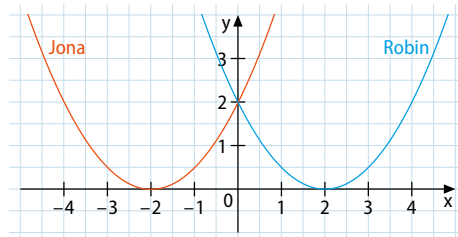
- 6 Ordnen Sie den Graphen ihre Funktionsgleichungen zu. Geben Sie den Definitions- und Wertebereich und die Symmetrie der Funktionen an.

- A  $y = x^4 - 3$
- B  $y = (x - 3)^3$
- C  $y = \frac{1}{3}x^{-4}$

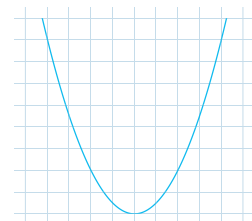


- 7 Beantworten und begründen Sie: Gibt es bei Potenzfunktionen einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen und dem Grad der Funktion, also der höchsten Potenz von x?

- 8 Robin und Jona sollten den Graphen der Funktion  $y = \frac{1}{2} \cdot (x + 2)^2$  zeichnen.  
 a) Beurteilen Sie, ob die Lösungen richtig sind.  
 b) Geben Sie, sofern eine Lösung falsch ist, die Gleichung der dargestellten Funktion an.



- 9 Zeichnen Sie auf Kästchenpapier ohne ein Koordinatensystem eine Normalparabel (z. B. mit Hilfe einer Parabelschablone). Zeichnen Sie nun so ein Koordinatensystem auf das Blatt, dass die Parabel den Graphen der Funktion f darstellt.  
 a)  $f(x) = x^2 - 3$     b)  $f(x) = (x + 1,5)^2$     c)  $f(x) = 2x^2$



- 10 a) Zeichnen Sie mit einem CAS die Graphen der Funktionen f und g mit  $f(x) = x^3 + 2$  und  $g(x) = (x - 1)^2$  sowie die Gerade  $y = x$ .  
 b) Spiegeln Sie die Graphen von f und g an der Geraden  $y = x$  und beurteilen Sie damit, ob f und g eine Umkehrfunktion besitzen.  
 c) Geben Sie, wenn notwendig, eine geeignete Einschränkung des Definitionsbereichs an, auf dem eine Umkehrfunktion existiert.  
 d) Bestimmen Sie rechnerisch für die Umkehrfunktionen von f und g jeweils die Funktionsgleichung sowie den Definitions- und Wertebereich.

- 11 Geben Sie die Gleichung von Potenzfunktionen an, die mindestens zwei der folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllen. Überprüfen Sie mit einem CAS.

1 symmetrisch zur y-Achse

2 an der x-Achse gespiegelt

3 mit dem Faktor 2 in y-Richtung gestreckt

3 um 4 Einheiten in negative y-Richtung verschoben

## 2

## Trainingsrunde

Wenn sich zwei Funktionen an einer Stelle  $x$  schneiden, stimmen auch ihre  $y$ -Werte an dieser Stelle überein.

- 12 Gegeben sind die Funktionen  $f_a$  und  $g_a$ , auf die beide der Parameter  $a \in \mathbb{R}$  wirkt.

$$f_a(x) = (x - a)^3 + a \quad g_a(x) = -x + 2a$$

- Zeichnen Sie mit einem CAS die Graphen beider Funktionen für verschiedene Werte von  $a$  in ein gemeinsames Koordinatensystem. Sie können auch  $a$  variieren und sich dabei die Spur von  $f_a$  und  $g_a$  anzeigen lassen.
- Die Funktionsgraphen schneiden sich in einem Punkt  $P_a$ . Bestimmen Sie die Koordinaten von  $P_a$ , abhängig von  $a$ .
- Wenn man den Parameter  $a$  verändert, verläuft  $P_a$  entlang einer Geraden. Begründen Sie, dass es sich dabei um die Gerade  $y = x$  handelt.

13

- achsensymmetrisch zu  $x = 2$
  - negativer Exponent
  - $y = 3$  waagrechte Asymptote

- ungerader Exponent
  - verläuft durch  $(-1 | -2)$
  - achsensymmetrisch zu  $x = 0$

- überall monoton wachsend
  - punktsymmetrisch zu  $(3 | 2)$
  - verläuft durch  $(2 | 1)$
  - besitzt keine Asymptote

- verläuft durch  $(-3 | 0)$
  - gerader Exponent
  - besitzt Symmetrieachse
  - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$

- Entscheiden Sie für jeden Steckbrief, ob es eine Potenzfunktion gibt, die alle Eigenschaften des Steckbriefes erfüllen kann.
- Erläutern Sie bei den Steckbriefen, für die es keine Potenzfunktion gibt, welche Eigenschaften sich gegenseitig widersprechen.
- Erstellen Sie selbst einen Steckbrief und lassen Sie Ihren Partner oder Ihre Partnerin begründet entscheiden, ob es eine derartige Potenzfunktion geben kann.



Beachten Sie beim Abstand auch den Erdradius (6371 km).

- 14 Das vom englischen Physiker Isaac Newton (1643 – 1727) formulierte Gravitationsgesetz beschreibt die Gravitationskraft  $F$ , mit der sich zwei Körper der Massen  $m_1$  und  $m_2$  anziehen, deren Körperschwerpunkte sich im Abstand  $r$  voneinander befinden. Dabei gilt:

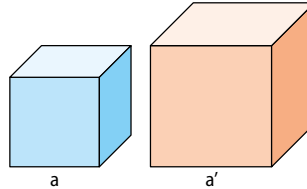
$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Betrachtet wird nun ein Starlink-Satellit ( $m_1 = 260 \text{ kg}$ ), der sich um die Erde ( $m_2 = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ) bewegt.

- Begründen Sie, dass es sich bei der Funktion, die für jeden Abstand  $r$  die Gravitationskraft  $F$  berechnet, um eine Potenzfunktion handelt.
- Stellen Sie die Funktion  $F(r)$  mit einem CAS in einem geeigneten Ausschnitt dar.
- Die Starlink-Satelliten fliegen in etwa 550 km Höhe. Bestimmen Sie die Gravitationskraft, die auf einen solchen Satelliten wirkt, und vergleichen Sie sie prozentual mit der Gravitationskraft, die auf den Satelliten direkt auf der Erdoberfläche wirken würde.
- Würde sich der Satellit nicht auf einer Kreisbahn bewegen, würde ihn die Gravitationskraft wieder in Richtung Erde ziehen. Erst, wenn die auf ihn wirkende Kraft weniger als ein Millionstel der Gravitationskraft auf der Erdoberfläche beträgt, wäre der Satellit quasi schwerelos. Bestimmen Sie den Abstand vom Erdmittelpunkt, ab dem dies der Fall wäre, und vergleichen Sie diesen mit dem Abstand des Mondes von der Erde.



- 15 Verändert man die Kantenlänge  $a$  eines Würfels, so ändern sich auch dessen Oberflächeninhalt  $A_0$  und sein Volumen  $V$ .
- Beschreiben Sie  $A_0$  und  $V$  jeweils mit einer Funktionsgleichung in Abhängigkeit von  $a$ .
  - Bilden Sie die Umkehrfunktion von  $A_0(a)$  und interpretieren Sie die so erhaltene Funktionsgleichung.
  - Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion  $V(A_0)$ , mit der man zu einem vorgegebenen Oberflächeninhalt das Volumen des entsprechenden Würfels berechnen kann. Stellen Sie die Funktion  $V(A_0)$  grafisch mit einem CAS dar.
  - Für eine Kugel gilt analog zu c):  $V = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} A_0^{\frac{3}{2}}$ . Stellen Sie diese Funktion im selben Koordinatensystem dar und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum Würfel.



Ist ein doppelt so breiter Würfel auch doppelt so schwer?

Aufgaben für Lernpartner

- Bearbeiten Sie die Aufgaben zuerst alleine.
- Erklären Sie einer Partnerin oder einem Partner Ihre Lösungen. Tauschen Sie die Rollen.
- Korrigieren Sie gegebenenfalls Ihre Antwort(en).

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründen Sie.

- Potenzfunktionen der Form  $y = x^n$  mit positivem Exponenten sind immer symmetrisch zur  $y$ -Achse.
- Die Funktionen  $y = x^2$ ,  $y = x^{-7}$  und  $y = \sqrt{x}$  verlaufen alle durch den Punkt  $P(1|1)$ .
- Beim Bilden der Umkehrfunktion vertauschen sich Definitions- und Wertebereich.
- Die Wurzelfunktion  $y = \sqrt[5]{x}$  hat das umgekehrte Monotonieverhalten der Potenzfunktion  $y = x^5$ .
- Der Graph von  $y = (x + 2)^3$  entsteht, indem der Graph von  $y = x^3$  um 2 Einheiten auf der  $x$ -Achse nach rechts verschoben wird.
- Der Wertebereich von  $y = x^4 + 3$  ist  $W = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$ .
- Die Funktion  $y = -x^{-7} - 7$  hat eine Definitionslücke bei  $x = 7$ .
- Es gilt, dass  $f$  mit  $f(x) = x^2 - 1,5$  für  $x \rightarrow -\infty$  gegen 1,5 geht.

Ich kann ...	Aufgabe	Hilfe	Bewertung
die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten bestimmen.	1, 3, 6, A	S. 48	😊 😐 😞
rechnerisch mit der Gleichung einer Potenzfunktion arbeiten.	2, 7, 11, 13, 14, B	S. 48	😊 😐 😞
die Wurzelfunktion als Umkehrfunktion der Potenzfunktion beschreiben.	4, 10, C, D	S. 52	😊 😐 😞
den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften einer Potenzfunktion beschreiben.	5, 8, 9, 10, 12, 15, E, F, G	S. 54	😊 😐 😞
anhand transformierter Potenzfunktionen die Parameter im Funktionsterm bestimmen.	13	S. 54	😊 😐 😞
das Verhalten von Potenzfunktionen im Unendlichen untersuchen.	H	S. 58	😊 😐 😞

# 1 Auf einen Blick

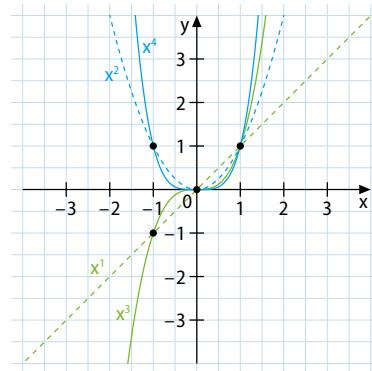
Seite 48

## Eigenschaften von Potenzfunktionen mit positivem Exponenten

Potenzfunktionen  $f$  mit  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ 

- Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}$

n gerade	n ungerade
<ul style="list-style-type: none"> <li>Wertebereich <math>W = \mathbb{R}_0^+</math></li> <li>Achsensymmetrie zur y-Achse</li> <li>verläuft durch <math>(-1 1)</math>, <math>O(0 0)</math> und <math>(1 1)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Wertebereich <math>W = \mathbb{R}</math></li> <li>Punktsymmetrie zum Ursprung <math>O(0 0)</math></li> <li>verläuft durch <math>(-1 -1)</math>, <math>O(0 0)</math> und <math>(1 1)</math></li> </ul>



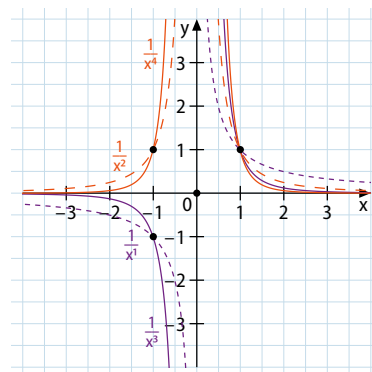
Seite 48

## Eigenschaften von Potenzfunktionen mit negativem Exponenten

Potenzfunktionen  $f$  mit  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ 

- Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

n gerade	n ungerade
<ul style="list-style-type: none"> <li>Wertebereich <math>W = \mathbb{R}^+</math></li> <li>Achsensymmetrie zur y-Achse</li> <li>verläuft durch <math>(-1 1)</math>, <math>O(0 0)</math> und <math>(1 1)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Wertebereich <math>W = \mathbb{R} \setminus \{0\}</math></li> <li>Punktsymmetrie zum Ursprung <math>O(0 0)</math></li> <li>verläuft durch <math>(-1 -1)</math> und <math>(1 1)</math></li> <li><math>y = 0</math> und <math>x = 0</math> Asymptoten</li> </ul>

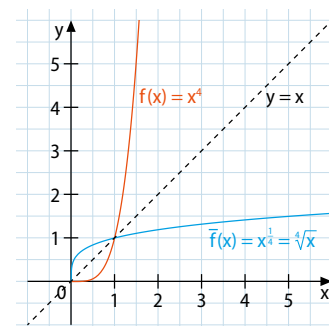


Seite 52

## Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Für  $x \geq 0$  besitzt die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^n$  die Umkehrfunktion  $\bar{f}$  mit  $\bar{f}(x) = \sqrt[n]{x}$ .

Eine Gleichung der Umkehrfunktion erhält man, wenn man  $x$  und  $y$  in der Funktionsgleichung vertauscht und wieder nach  $y$  auflöst. Der Graph von  $\bar{f}$  entsteht, indem der Graph von  $f$  an der Geraden  $y = x$  gespiegelt wird.





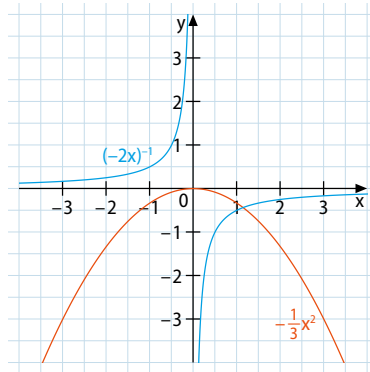
**Einfluss von Streckungsparametern**

Seite 54

Die Parameter  $a$  und  $b$  in der Funktionsgleichung  $y = a \cdot (b \cdot x)^n$  bewirken, dass der Graph von  $y = x^n$  **gestreckt** oder **gestaucht** und ggf. **gespiegelt** wird.

- Der Graph wird in **y-Richtung** für  $|a| > 1$  gestreckt, für  $|a| < 1$  gestaucht und für  $a < 0$  an der **x-Achse gespiegelt**.
- Der Graph wird in **x-Richtung** für  $|b| > 1$  gestreckt, für  $|b| < 1$  gestaucht und für  $b < 0$  an der **y-Achse gespiegelt**.

Hinweis: Bei nicht verschobenen Potenzfunktionen kann jeder Parameter  $b$  in einen Parameter  $a$  umgewandelt werden.



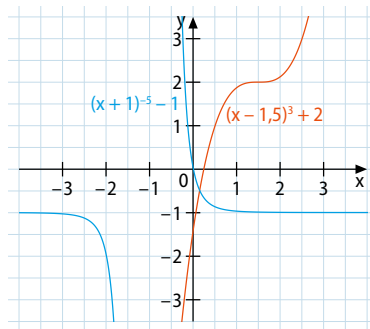
**Einfluss von Verschiebeparametern**

Seite 54

Die Parameter  $c$  und  $d$  in der Funktionsgleichung  $y = (x - d)^n + c$  bewirken, dass der Graph von  $y = x^n$  **verschoben** wird.

- Der Graph wird in **y-Richtung** um  $c$  Einheiten verschoben.
- Der Graph wird in **x-Richtung** um  $d$  Einheiten verschoben.

Hinweis:  $-d$  in der Funktionsgleichung bewirkt für  $d > 0$  eine Verschiebung um  $d$  Einheiten in **positive x-Richtung**.



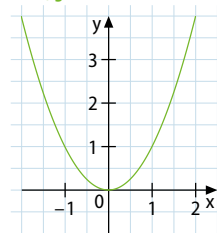
**Verhalten im Unendlichen**

Seite 58

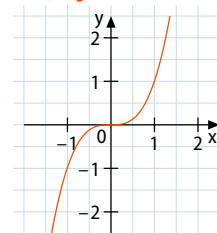
Das Verhalten einer Potenzfunktion der Form  $y = x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  für beliebig große und kleine  $x$ -Werte, Globalverhalten genannt, hängt davon ab, ob der Exponent der Potenzfunktion gerade oder ungerade, positiv oder negativ ist.

- Exponent positiv und gerade: Für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ .
- Exponent positiv und ungerade: Für  $x \rightarrow -\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow -\infty$ . Für  $x \rightarrow +\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow +\infty$ .
- Exponent negativ (ungerade und gerade): Für  $x \rightarrow \pm\infty$  gilt  $f(x) \rightarrow 0$ . Die  $x$ -Achse ist also (waagrechte) Asymptote.

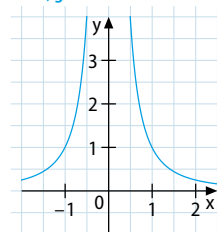
$n > 0$ , gerade



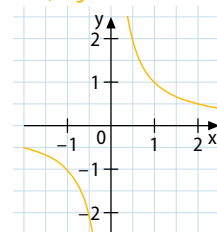
$n > 0$ , ungerade



$n < 0$ , gerade



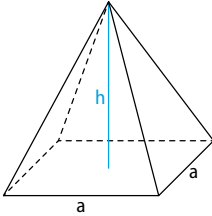
$n < 0$ , ungerade



## 2

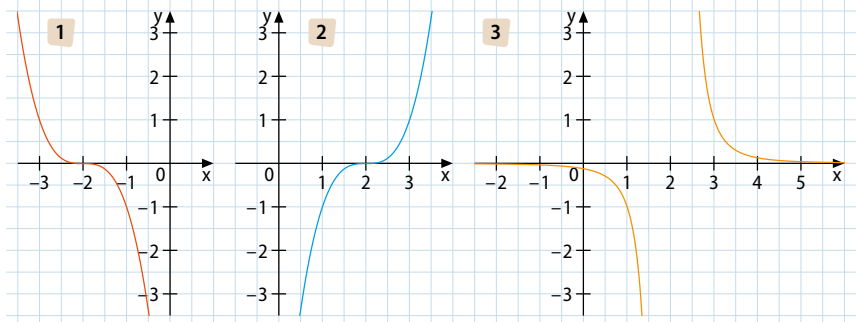
## Auf dem Weg zum Abitur

## Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel



- 1 Für das Volumen der abgebildeten, quadratischen Pyramide gilt:  $V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$ .
- a) Erläutern Sie, inwieweit diese Formel als Potenzfunktion mit einem Parameter aufgefasst werden kann.
- b) Skizzieren Sie Ihre in a) erläuterte Funktion für drei verschiedene Parameter.

- 2 Gegeben ist die Funktion  $f_a$  mit dem Parameter  $a$  und  $f_a(x) = (x - a)^3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
- a) Betrachten Sie für  $a = 2$  zunächst die Funktion  $f_2(x) = (x - 2)^3$ . Einer der folgenden Graphen **1**, **2** oder **3** stellt  $f_2$  dar. Geben Sie die Graphen an, die dafür nicht infrage kommen, und begründen Sie Ihre Angabe.



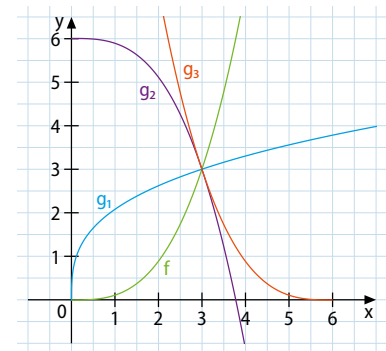
- b) Bestimmen Sie die Nullstelle von  $f_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .
- c) Ermitteln Sie, für welchen Wert von  $a$  die Funktion  $f_a$  durch den Punkt  $P(1|8)$  verläuft.
- d) Für  $a = 0$  soll die Funktion  $f_0(x) = x^3$  auf den Definitionsbereich  $D = \mathbb{R}_0^+$  eingeschränkt werden. Skizzieren Sie  $f_0$  sowie ihre Umkehrfunktion in dasselbe Koordinatensystem und geben Sie die Gleichung der Umkehrfunktion von  $f_0$  an.

- 3 Betrachten Sie die Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{x^2} + 3$ .
- a) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zum Graphen von  $g$  wahr oder falsch sind.
- 1** verläuft durch alle vier Quadranten      **2** ist achsensymmetrisch  
**3** verläuft durch  $(-2|2)$       **4**  $y = 3$  waagrechte Asymptote
- b) Begründen Sie Ihre Entscheidung bei den Aussagen **2** und **3**.
- c) Genau eine der folgenden Funktionen erfüllt alle der Eigenschaften **1** bis **4**. Welche?

$$h(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + 3 \quad i(x) = \frac{2}{x^2} + 1,5 \quad k(x) = 3 - \frac{1}{x^2}$$

- 4 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion  $f$  für  $x \geq 0$  sowie die Graphen dreier weiterer Funktionen  $g_1$ ,  $g_2$  und  $g_3$ .

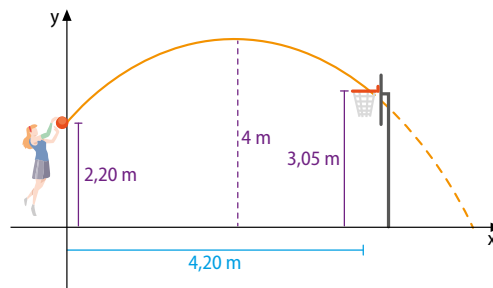
- a) Entscheiden Sie, welche der Funktionen  $g_1$ ,  $g_2$  oder  $g_3$  die Umkehrfunktion von  $f$  darstellt.
- b) Erklären Sie, wie Sie den Graphen der Umkehrfunktion von  $f$  mit Hilfe des Graphen von  $f$  ermitteln können, ohne die Funktionsgleichung von  $f$  zu kennen.
- c) Für  $f$  gilt:  $f(x) = \frac{1}{9} x^3$ . Geben Sie die Gleichung der Umkehrfunktion von  $f$  an.



**Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln**

- 5 Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -2 \cdot (x - 3)^{-4} - 5$ .
- Geben Sie den Definitions- und Wertebereich, die Monotonie und das Symmetrieverhalten von  $f$  an.
  - Beschreiben Sie das Verhalten der Funktion  $f$  im Unendlichen.
  - Die verschiedenen Punkte  $P$  und  $Q$  liegen auf dem Graphen von  $f$ . Erklären Sie, wie Sie die  $x$ -Koordinate von  $Q$  anhand der  $x$ -Koordinate von  $P$  bestimmen können, wenn Sie wissen, dass die  $y$ -Koordinaten von  $P$  und  $Q$  übereinstimmen.

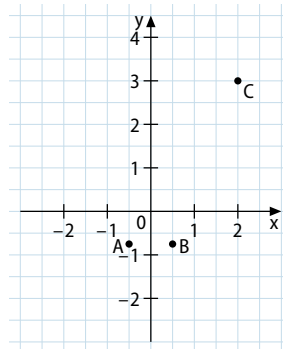
- 6 Der Wurf eines Basketballs kann mit Hilfe einer Potenzfunktion der Form  $f(x) = a \cdot (x - b)^2 + c$  modelliert werden. Die Abbildung zeigt die Modellierung mit einer geeigneten Wahl des Koordinatenursprungs (1 LE  $\triangleq$  1 m, Abbildung nicht maßstäblich).



- Beschreiben Sie, welchen Einfluss die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  auf den Graphen der Funktion haben, und geben Sie an, ob diese im Fall der hier dargestellten Modellierung jeweils positiv oder negativ sind. Ein Basketballkorb befindet sich üblicherweise auf einer Höhe von 3,05 m. Die Entfernung zum Korb beträgt von der Freiwurflinie etwa 4,20 m. Bei einem Freiwurf wurde der Ball aus einer Höhe von etwa 2,20 m abgeworfen und hat eine maximale Höhe von 4 m erreicht.
- Begründen Sie, dass anhand dieser Informationen  $c = 4$  gefolgert werden kann.
- Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen die Situation modelliert.
  - $f(x) = -0,2 \cdot (x - 2,02)^2 + 4$
  - $f(x) = -0,25 \cdot (x - 2,68)^2 + 4$
  - $f(x) = -0,3 \cdot (x - 2,43)^2 + 4$
- Bestimmen Sie für diesen Wurf die Entfernung von der Freiwurflinie, in der der Ball auf dem Boden aufgekommen wäre, wenn der Korb seitlich verpasst worden wäre (gestrichelte Linie in der Abbildung).
- Erläutern Sie, u. a. mit Hilfe einer Skizze, wie sich die Wurfbahn verändern könnte, wenn die Voraussetzung der Maximalhöhe von 4 m nicht gegeben wäre, und welchen Einfluss dies auf die Chance eines Korbtreffers haben würde.

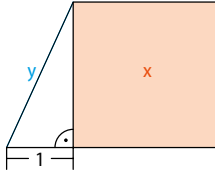
- 7 Potenzfunktion der Form  $y = a \cdot x^n + c$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sollen durch die Punkte  $A(-0,5 | -0,75)$ ,  $B(0,5 | -0,75)$  und  $C(2 | 3)$  verlaufen.

- Entscheiden Sie, ob  $n$  gerade oder ungerade ist.
- Begründen Sie, dass es mindestens zwei Funktionen gibt, die die geforderten Eigenschaften erfüllen.
- Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes an, der auf den Graphen aller Funktionen liegt, die die geforderten Eigenschaften erfüllen.
- Ermitteln Sie Werte für die Parameter  $a$  und  $c$  für eine Funktion, die die geforderten Eigenschaften erfüllt.



## 2


## Auf dem Weg zum Abitur

- 8 Betrachten Sie die nebenstehende Figur, wobei  $y$  die Länge der Hypotenuse des Dreiecks (in LE) und  $x$  den Flächeninhalt des Quadrates (in FE) beschreibt. Die Funktion  $f$  soll  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  hinsichtlich der dargestellten Figur beschreiben.
- 
- Weisen Sie nach, dass  $f(x) = \sqrt{x+1}$  gilt.
  - Geben Sie den Definitions- und Wertebereich von  $f$  an und skizzieren Sie den Graphen.
  - Erläutern Sie, wie Sie mit Hilfe des Graphen von  $f$  ermitteln können, für welchen Flächeninhalt des Quadrates die Länge der Hypotenuse 5 LE beträgt.
  - Geben Sie den bei Aufgabe c) gesuchten Flächeninhalt an.
- 9 Geben Sie eine Funktionsgleichung einer Potenzfunktion an, die zu der Aussage passt.
- Der zugehörige Graph ist symmetrisch zur  $y$ -Achse.
  - Der zugehörige Graph geht durch den Punkt  $P(1|3)$ .
  - Die zugehörigen Funktionswerte sind alle positiv oder null.
  - Verdoppelt sich der  $x$ -Wert, so verachtfacht sich der zugehörige  $y$ -Wert.
- 10 Gegeben ist die Funktion  $f_b$  mit dem Parameter  $b$  und  $f_b(x) = \frac{1}{(x-b)^3} + b$  mit  $b \in \mathbb{R}$ .
- Begründen Sie, dass  $f_b$  höchstens eine Nullstelle hat.
  - Zeigen Sie, dass für  $b = -1$  der Graph der Funktion  $f_{-1}$  durch  $O(0|0)$  verläuft.
  - Bestimmen Sie rechnerisch für  $b = 8$  die Nullstelle der Funktion  $f_8$ .
  - Geben Sie eine Formel an, mit Hilfe derer man allgemein die Nullstelle von  $f_b$  berechnen kann und interpretieren Sie diese Formel hinsichtlich Aufgabe a).
  - Gegeben ist weiterhin die Gerade  $g_b$  mit  $g_b(x) = x + b$ , die den Graphen von  $f_b$  in genau zwei Punkten schneidet. Weisen Sie nach, dass keiner der Schnittpunkte auf der  $y$ -Achse liegt.

## Reflexion

Arbeitsaufträge und Fragen zur Vorbereitung auf das Abitur	Hilfe
Beschreiben Sie den Einfluss des Exponenten einer Potenzfunktion auf ihre Eigenschaften.	S. 48
Erklären Sie, warum die Funktion $f$ mit $f(x) = x^a$ mit $a < 0$ für null nicht definiert ist.	S. 48
Erklären Sie, was man unter einer geraden bzw. ungeraden Funktion versteht, und welchen Einfluss diese Unterscheidung auf die Symmetrie des entsprechenden Funktionsgraphen hat.	S. 51
Erklären Sie, wie die Umkehrfunktion einer Funktion grafisch bestimmt werden kann, und welche Voraussetzungen dafür gelten müssen.	S. 52
Beschreiben Sie den Einfluss von Parametern in der Funktionsgleichung einer Potenzfunktion auf ihren Graphen.	S. 54
Begründen Sie, dass der Graph von Wurzelfunktionen keine Symmetrie aufweist.	S. 52
Geben Sie alle gemeinsamen Punkte der Funktionen der Form $y = a \cdot (x - b)^n$ für gerade $n$ an.	S. 54
Erklären Sie, was es bedeutet, wenn man eine Funktion auf ihren Globalverlauf untersucht.	S. 58
Erläutern Sie: „Der Graph jeder Potenzfunktion mit negativem Exponenten verhält sich asymptotisch.“	S. 58

Mathematische Zeichen und Abkürzungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$ a $	Betrag der Zahl a
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$y, f(x)$	Funktionssterm
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$x_0$	Nullstelle einer Funktion
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$m$	Steigung einer Funktion
$D$	Definitionsmenge	$b$	y-Achsenabschnitt einer Funktion
$L$	Lösungsmenge	$P(x y)$	Punkt P mit den Koordinaten x und y
$\{\}$	Leere Menge	$g, h, \dots$	Geraden, Halbgeraden (Strahlen)
$\{a; b; c\}$	Menge mit den Elementen a, b und c	$PQ$	Gerade durch die Punkte P und Q
$\mathbb{Q} \setminus \{a; b\}$	Menge $\mathbb{Q}$ ohne die Elemente a und b	$\overline{PQ}$	Strecke mit den Endpunkten P und Q
$a \in \mathbb{Q}$	a ist Element von $\mathbb{Q}$	$ \overline{PQ} $	Länge der Strecke $\overline{PQ}$
$=$	gleich	$A$	Flächeninhalt
$\approx$	ungefähr gleich	$U$	Umfangslänge
$>$	größer als	$O$	Oberflächeninhalt eines Körpers
$\geq$	größer oder gleich	$V$	Volumen eines Körpers
$<$	kleiner als	$\pi$	Kreiszahl Pi
$\leq$	kleiner oder gleich	$\perp$	orthogonal (senkrecht) zu
$\cong$	entspricht	$\parallel$	parallel zu
$\sim$	ähnlich zu		Rechter Winkel
$\cap$	geschnitten mit	$\sin \alpha$	Sinuswert des Winkels $\alpha$
$\cup$	vereinigt mit	$\cos \alpha$	Kosinuswert des Winkels $\alpha$
$a^n$	Potenz: „a hoch n“	$\tan \alpha$	Tangenswert des Winkels $\alpha$
$\sqrt{a}$	Quadratwurzel aus a	$\tilde{x}$	Median
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a	$x_{\text{mod}}$	Modus
$\frac{a}{b}$	Bruch mit Zähler a und Nenner b	$\bar{x}$	arithmetisches Mittel
$\log_b a$	Logarithmus von a zur Basis b	$d$	mittlere absolute Abweichung
$\lg a$	Logarithmus generalis von a (b = 10)	$\Omega$	Ergebnismenge eines Zufallsexperiments
$\%$	Prozent	$E$	Ereignis
$P$	Prozentwert	$\bar{E}$	Gegenereignis des Ereignisses E
$p\%$	Prozentsatz	$P(E)$	Wahrscheinlichkeit für Ereignis E
		$P_B(A)$	bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter Bedingung B



## click & study

Digitale Ausgabe des Schülerbands



## Tauchen Sie ein in die digitale Lern- und Lehrwelt von C.C.Buchner

Lernen Sie unsere digitalen Lösungen für Ihren zeitgemäßen Unterricht kennen: Mit click & study – der digitalen Ausgabe des Schülerbands – und click & teach – dem digitalen Lehrermaterial – werden die Unterrichtsvorbereitung und die Schulstunde selbst einfacher als je zuvor.

### ► Einfach in der Navigation:

Im Mittelpunkt von click & study und click & teach steht immer die digitale Schulbuchausgabe, um die sich alle eingebundenen Materialien und Funktionen gruppieren. So behalten Sie stets den Überblick und finden alle Inhalte genau dort, wo sie benötigt werden.

### ► Einfach in der Bedienung:

Bei der Gestaltung der Menüs und der Bedienelemente haben wir darauf geachtet, dass diese nicht überladen werden und selbsterklärend bleiben. Nichtsdestotrotz haben Sie und Ihre Schülerinnen und Schüler die Auswahl an einer Fülle von nützlichen Funktionen – für einen modernen Unterricht mit digitaler Interaktion.

# click & teach

Digitales Lehrermaterial



## ► Einfach im Zugriff:

click & study und click & teach können Sie überall und mit jedem Endgerät nutzen, auf dem ein aktueller Internetbrowser installiert ist. Oder Sie laden sich einfach die kostenfreie App für die digitale Ausgabe des Schülerbands und das digitale Lehrermaterial herunter – so können Sie auch offline arbeiten. Damit Sie schnell mit dem digitalen Lehrermaterial arbeiten können, erscheint click & teach frühestmöglich mit einem Teil der Materialien und wird sukzessive ergänzt.

## ► Einfach in der Lizenzierung:

Egal ob Print Plus, Einzellizenz, Einzellizenz Box, Einzellizenz flex oder Kollegiumslizenz – wir haben für jeden Bedarf ein passendes Angebot. Bestellen können Sie ausschließlich auf [www.ccbuchner.de](http://www.ccbuchner.de). Die digitale Schulbuchausgabe click & study kann zudem via [www.bildungslogin.de](http://www.bildungslogin.de) genutzt werden.

## ► Einfach für alle:

click & study und click & teach können miteinander verknüpft werden. So funktioniert der Unterricht bei Bedarf komplett digital – ideal für Tablet-Klassen und den digitalen Materialaustausch zwischen Lehrenden und Lernenden.

Interaktives  
Inhaltsverzeichnis



Digitale  
Arbeitsseite



Lehrermaterial  
(nur in click & teach)

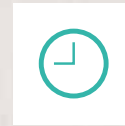


The screenshot displays the Click & Teach chemistry application. On the left, there is a navigation menu with categories like 'Grundlagen aus Klasse 8-10', 'Stoffe, ihre Eigenschaften und ihr Aufbau', and 'Reaktionsgeschwindigkeit und chemische Gleichgewichte'. The main content area shows a lesson titled 'Chemie - eine Naturwissenschaft' with a sub-heading 'Was beobachtet man in chemischen Experimenten?'. Below this, there are images of a beaker with blue liquid and a test tube with a white precipitate. The right sidebar contains various icons for navigation and interaction, including a search icon, a home icon, and a refresh icon. A red pencil icon is overlaid on the main content area, and a document icon is overlaid on the right sidebar. A circular arrow icon is overlaid on the bottom right corner of the tablet screen.

Digitale Ausgabe des  
C.C. Buchner-Lehrwerks









Persönlicher Unterrichtsplaner  
(nur in click & teach)

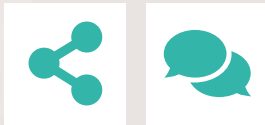




## click &amp; study und click &amp; teach bieten:

		click & study	click & teach
	<p><b>Digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks</b></p> <p>Das jeweilige Schülerbands von C.C.Buchner ist als vollständige digitale Ausgabe in click &amp; study und in click &amp; teach enthalten. Sie können mit verschiedenen Endgeräten (PC, Mac, Tablet) online und auch offline via App darauf zugreifen.</p> <p> Verfügbar in Ihrem App Store</p>	✓	✓
	<p><b>Interaktives Inhaltsverzeichnis</b></p> <p>Das Inhaltsverzeichnis ermöglicht einen schnellen Überblick über die Inhalte der digitalen Ausgabe des Schulbuchs und die Navigation zwischen den Kapiteln. Wird es nicht benötigt, lässt es sich einfach einklappen.</p>	✓	✓
	<p><b>Digitale Arbeitsseite</b></p> <p>Durch das Einfügen digitaler Arbeitsseiten besteht die Möglichkeit, auf einer zusätzlichen leeren Seite eigene Texte, Bilder, Links und Freihandzeichnungen zu hinterlegen.</p>	✓	✓
	<p><b>Umfangreiches Lehrermaterial</b></p> <p>click &amp; teach bietet zahlreiche digitale Zusatzmaterialien. Hier erhalten Sie Zugriff auf perfekt abgestimmte Inhalte wie zum Beispiel Lösungen, didaktische Hinweise, digitale Lernanwendungen, Animationen, Arbeitsblätter, Kopiervorlagen, Tafelbilder und vieles mehr.</p>	—	✓
	<p><b>Unterrichtsplaner</b></p> <p>Der Unterrichtsplaner sorgt dafür, dass Sie in click &amp; teach alle Materialien immer in der gewünschten Abfolge griffbereit haben. Strukturieren, kommentieren und präsentieren Sie die Materialien ganz nach Ihren Wünschen.</p>	—	✓

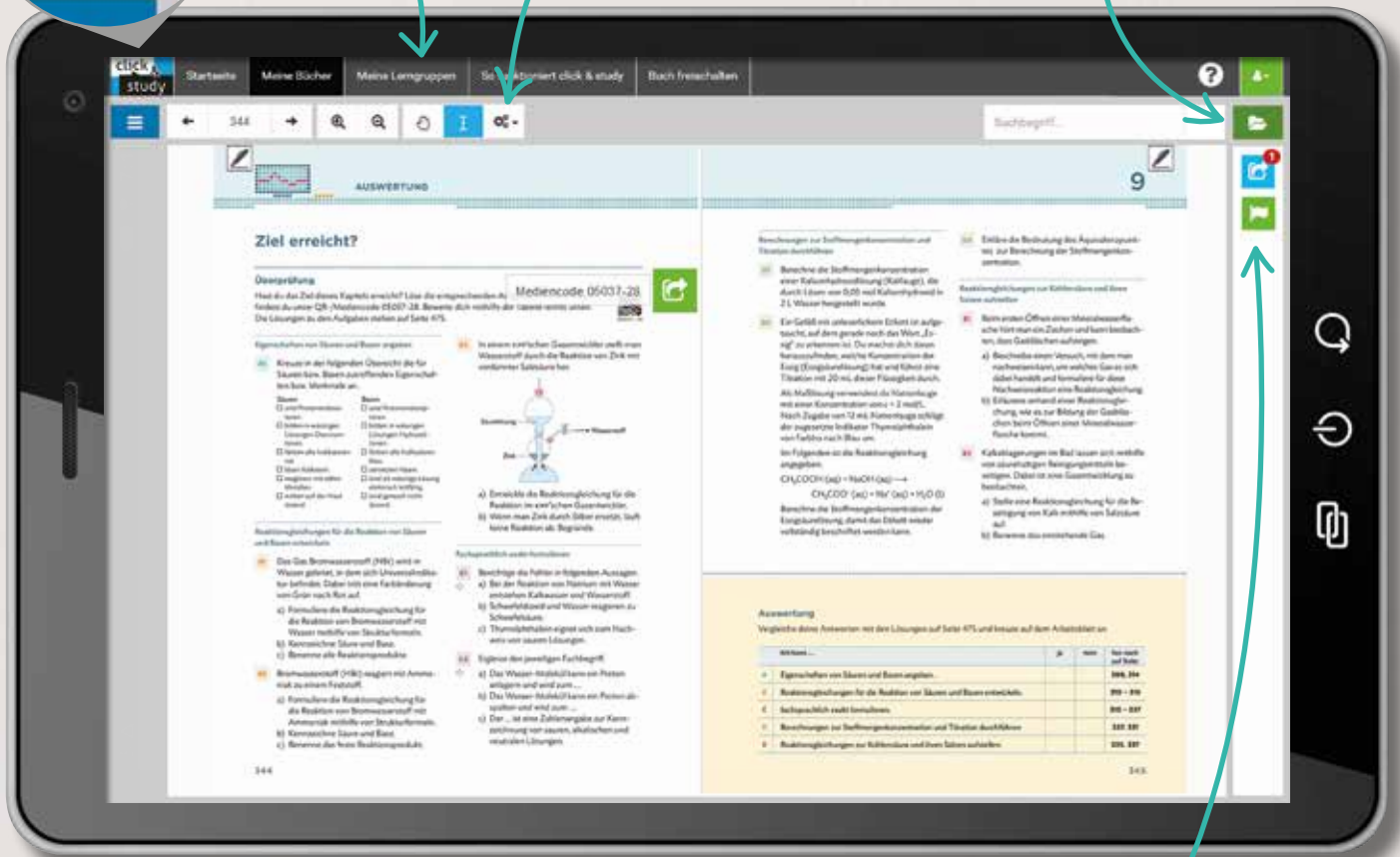
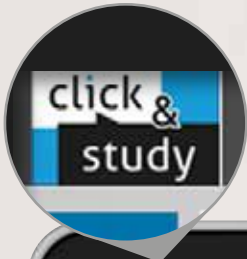
Aufgabenpool und Forum



Toolbar mit zahlreichen Funktionen



Digitales Zusatzmaterial



Materialimport und -freischaltung (nur in click & teach)



## click &amp; study und click &amp; teach bieten:

		click & study	click & teach
	<p><b>Digitale Inhalte und Links</b></p> <p>Über Spots erhalten Schülerinnen und Schüler Zugriff auf Links und Zusatzmaterialien, die im gedruckten Schulbuch über Mediacodes zugänglich sind. So lassen sich z. B. Erklärvideos, gestufte Hilfen oder interaktive Lernanwendungen einfach in das Unterrichtsgeschehen integrieren.</p>	✓	✓
	<p><b>Toolbar mit vielen nützlichen Funktionen</b></p> <p>Der moderne Reader bietet Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern nützliche Bearbeitungsfunktionen wie Markieren, Kopieren, Zoomen und Suchen. Dazu gibt es das Lesezeichen sowie einen Freihandstift für Skizzen und Notizen.</p>	✓	✓
	<p><b>Materialfreischaltung</b></p> <p>Als Lehrkraft haben Sie in click &amp; teach die Möglichkeit, Materialien für eine ausgewählte Lerngruppe oder für einzelne Lernende in click &amp; study freizuschalten und so schnell zu übermitteln.</p>	✓	✓
	<p><b>Aufgabenpool</b></p> <p>In diesem Bereich können die Lernenden Aufgaben digital empfangen und wieder abgeben. Schülerinnen oder Schüler sehen beim Hochladen der Aufgaben immer nur ihre eigenen Dateien. Den Überblick über den gesamten Aufgabenpool hat ausschließlich die Lehrkraft.</p>	✓	✓
	<p><b>Forum</b></p> <p>Das Forum ist das digitale Pendant zum gemeinsamen Gespräch im Klassenzimmer und funktioniert wie ein Gruppenchat. So können sich Lernende und Lehrende unkompliziert austauschen.</p>	✓	✓
	<p><b>Materialimport</b></p> <p>Das umfangreiche digitale Lehrermaterial können Sie mit Ihren eigenen Dokumenten wie Bildern, Audios, Videos oder Textdokumenten anreichern. Mit dem Materialimport laden Sie diese Dateien hoch und platzieren sie mit einem eigenen Spot auf den digitalen Schulbuchseiten.</p>	—	✓

## Lizenzmodelle click & teach

In click & teach sind immer die vollständige digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks und umfangreiches Lehrermaterial enthalten. Die Laufzeit jeder click & teach-Lizenz gilt, solange das C.C.Buchner-Lehrwerk als gedrucktes Schulbuch lieferbar ist, in der Regel sind das mehrere Jahre. Inhaltlich sind alle Lizenzformen identisch.

click & teach	Einzellizenz	Einzellizenz Box	Einzellizenz flex	Kollegiums-lizenz
<b>Lizenz-anzahl</b>	1	1	1	beliebig viele Lizenzen für Ihr Fachkollegium (inkl. Referendare)
<b>Weitergabe</b>	nicht übertragbar	nicht übertragbar	übertragbar*	für das komplette Fachkollegium (inkl. Referendare)
<b>Zugang</b>	digitaler Freischaltcode per E-Mail	Box inkl. Karte mit Freischaltcode per Post	direkte Freischaltung im Schulkonto	direkte Freischaltung im Schulkonto
<b>Verfüg-barkeit</b>	im persönlichen Nutzerkonto	im persönlichen Nutzerkonto	im verknüpften Schulkonto	im verknüpften Schulkonto

\*Die Einzellizenz flex kann beliebig oft an eine andere Person übertragen werden.

### Schulkonto

Auf [www.ccbuchner.de](http://www.ccbuchner.de) können sich Lehrkräfte (auch jene im Referendariat) mit ihrem Schulkonto verknüpfen und folgende Funktionen nutzen:

#### ► click & teach-Lizenzen erwerben und nachkaufen

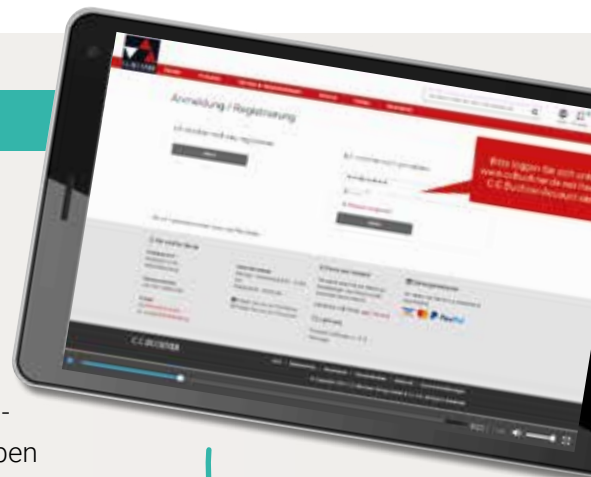
In wenigen Schritten können über die Auswahl des Fachs und des Bundeslands die Kollegiumslicenz sowie die Einzellizenzen flex per Rechnung an die hinterlegte Schule erworben werden. So kann click & teach direkt genutzt werden – ohne Wartezeit!

#### ► click & teach-Lizenzen verwalten und übertragen

Daneben kann die Zuordnung der Lizenzen zu Mitgliedern des Fachkollegiums eingesehen und verwaltet werden. Fachfremden Lehrkräften kann ebenfalls manuell eine Lizenz zugewiesen werden. Wurde eine Einzellizenz flex erworben, erfolgt im Schulkonto die Zuordnung bzw. die Übertragung.

#### ► Zugriffsrechte verwalten

Im Schulkonto können für alle verknüpften Kolleginnen und Kollegen die Rechte (*Lizenzen kaufen, Lizenzen verwalten, Zugriffsrechte bearbeiten, Schuldaten bearbeiten und Schulkollegium verwalten*) individuell vergeben werden.



Erklärvideos  
Schulkonto

## Lizenzmodelle click & study

Auch in click & study ist immer die vollständige digitale Ausgabe des C.C.Buchner-Lehrwerks enthalten. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Zugang zur digitalen Ausgabe über einen Freischaltcode, der per E-Mail an sie verschickt wird. Verfügbar ist click & study dann im persönlichen Nutzerkonto der Schülerinnen und Schüler. Die Lizenzen sind nicht übertragbar.

click & study	Einzellizenz	Einzellizenz Print Plus
<b>Preis</b>	Normalpreis	Wenn das gedruckte Schulbuch eingeführt ist, ist pro Buch eine Jahreslizenz ab 1,90 € erhältlich.
<b>Laufzeit</b>	12 + 1 Monat ab Freischaltung	12 + 1 Monat ab Freischaltung
<b>Lizenzanzahl</b>	1	1 pro eingeführtem Schulbuch

Stand: 01.01.2024

### Sie haben Fragen?

Unsere Schulberatung und die Kolleginnen und Kollegen in der Digital-Beratung helfen Ihnen gern.

**E-Mail:** [click-and-teach@ccbuchner.de](mailto:click-and-teach@ccbuchner.de) | [click-and-study@ccbuchner.de](mailto:click-and-study@ccbuchner.de)

**Telefon:** +49 951 16098333 | Mo, Mi, Fr: 10:00 – 11:30 Uhr | Di, Do: 14:00 – 15:30 Uhr

#### Weitere Informationen:

[www.click-and-study.de](http://www.click-and-study.de)

[www.click-and-teach.de](http://www.click-and-teach.de)

[www.ccbuchner.de/schulkonto](http://www.ccbuchner.de/schulkonto)



Erklärvideos click & study  
und click & teach



## Unsere WebSeminare für Nordrhein-Westfalen

Wir unterstützen und begleiten Sie beim Umsetzen des aktuellen Kernlehrplans – und das nicht nur mit unseren neuen Lehrwerken. Wir möchten Ihnen Anregungen bieten, Materialien vorstellen und Gelegenheit zum Gedankenaustausch geben.

**Deshalb bieten wir Ihnen WebSeminare an, für die Sie auch eine Teilnahmebestätigung erhalten.**

Natürlich finden Sie uns ebenfalls auf überregionalen Messen und Kongressen.



Detaillierte Informationen und Termine finden Sie auf [www.ccbuchner.de/veranstaltungen](http://www.ccbuchner.de/veranstaltungen).

Wir freuen uns auf spannende Veranstaltungen, auf gute Gespräche und vor allem auf Sie!



Nichts mehr verpassen:  
Unser Newsletter  
mit allen aktuellen Terminen

Abonnieren Sie jetzt unseren Veranstaltungsnewsletter!  
Damit sind Sie fächerübergreifend immer über die aktuellen Termine von C.C.Buchner informiert und können sich Ihren Platz sichern.

# Ihr Schulberatungsteam in Nordrhein-Westfalen



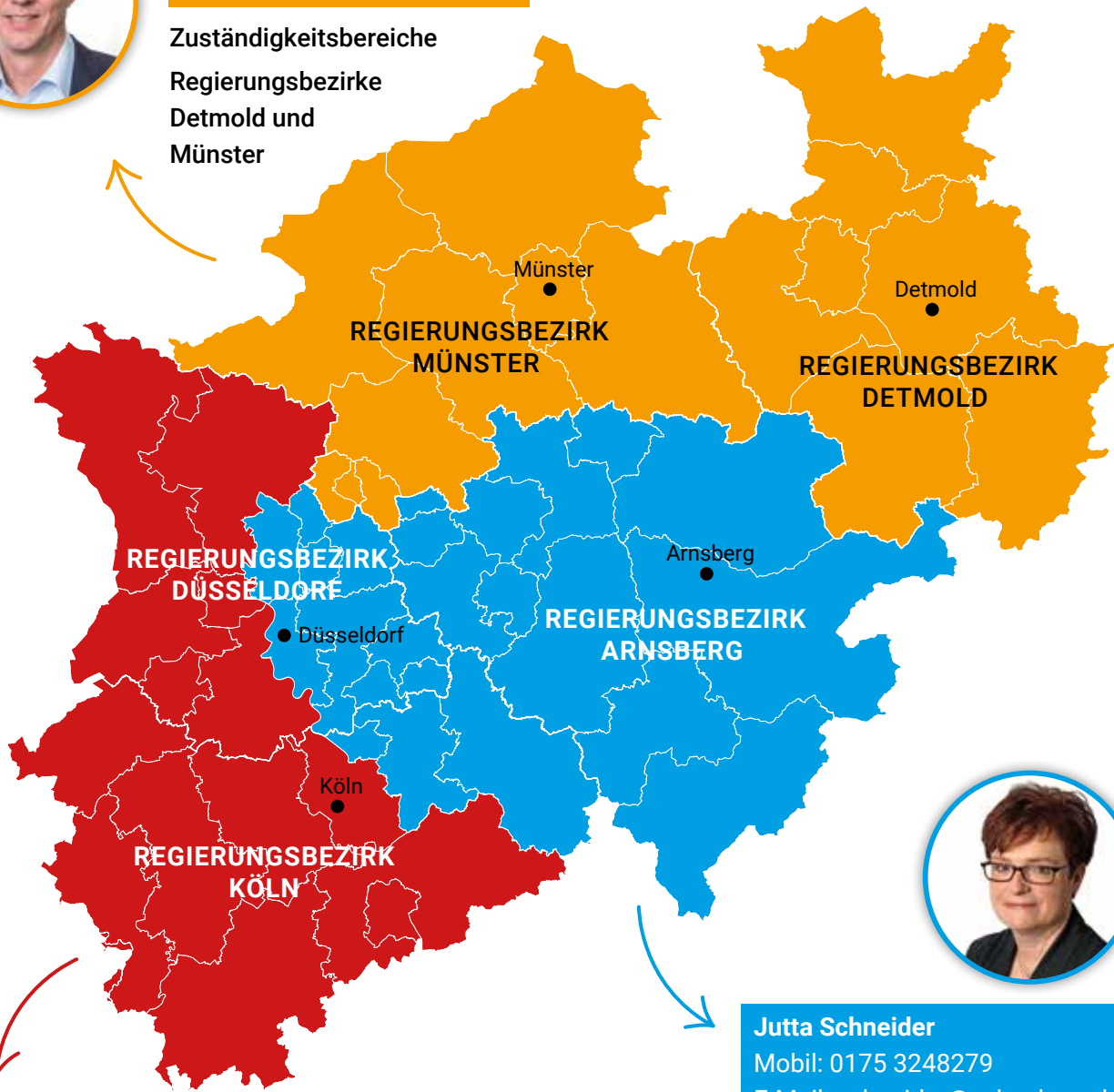
**Jörn Thielke**

Mobil: 0160 1728354

E-Mail: thielke@ccbuchner.de

**Zuständigkeitsbereiche**

**Regierungsbezirke  
Detmold und  
Münster**



**Jutta Schneider**

Mobil: 0175 3248279

E-Mail: schneider@ccbuchner.de

**Zuständigkeitsbereiche**

**Regierungsbezirk Köln:** Kreise  
Leverkusen, Oberbergischer Kreis,  
Rheinisch Bergischer Kreis

**Regierungsbezirk Düsseldorf:**

Kreise Duisburg, Düsseldorf,  
Essen, Mettmann, Mülheim,  
Oberhausen, Remscheid, Solingen,  
Wuppertal

**Regierungsbezirk Arnsberg**



**Monika Labmeier**

Mobil: 0171 6357092

E-Mail: labmeier@ccbuchner.de

**Zuständigkeitsbereiche**

**Regierungsbezirk Köln:**

Kreise Aachen, Bonn, Düren, Euskirchen,  
Heinsberg, Köln, Rhein-Erft, Rhein-Sieg

**Regierungsbezirk Düsseldorf:**

Kreise Kleve, Krefeld, Mönchengladbach,  
Rhein-Kreis Neuss, Viersen, Wesel

**Sie wünschen persönliche Beratung?  
Unser Schulberatungsteam für Nordrhein-Westfalen ist für Sie da  
– vor Ort, telefonisch und online:**



**Monika Labmeier**

Mobil: 0171 6357092

E-Mail: labmeier@ccbuchner.de



**Jutta Schneider**

Mobil: 0175 3248279

E-Mail: schneider@ccbuchner.de



**Jörn Thielke**

Mobil: 0160 1728354

E-Mail: thielke@ccbuchner.de

**Sie benötigen weitere Exemplare  
dieser Leseprobe\* für Ihre Fachkonferenz?**

**1**

Geben Sie auf [www.ccbuchner.de](http://www.ccbuchner.de) die Bestellnummer **L63051** in die Suchleiste ein.



**2**

Legen Sie die kostenfreie Leseprobe (1 Exemplar pro Person) und ggf. weitere Produkte in Ihren **Warenkorb**.



**3**

Folgen Sie den weiteren Anweisungen, um den Bestellvorgang abzuschließen.

\*Nur solange der Vorrat reicht.



**Oder  
direkt über:**

