

1

Experimente zur Coulombkraft – Teil 1

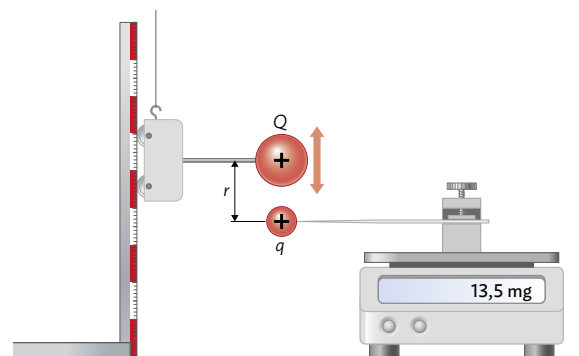
Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler **bestätigen anhand von Messwerten durch Regression den Term für die Coulombkraft.**

Voraussetzung: Überlagerung von Feldern (Kapitel 1.3 im Buch)

Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen

Zur Bestimmung der Kraftwirkung auf eine Probeladung q im statischen Feld einer Feldladung Q kann wie im vergleichbaren Fall des Plattenkondensators vorgegangen werden (vgl. B1 im Buch auf S.20). Statt der beiden Platten wird eine positiv geladene Kugel als felderzeugende Ladung über der ebenfalls positiv geladenen Probekugel platziert – beide Kugeln werden hierbei als punktförmig angenommen (eine Begründung dafür erfolgt in AB6 „Analogien zwischen Coulomb- und Gravitationsfeld“). Die Änderung der Kraft auf die Probekugel ist hier wieder auf die elektrostatische Kraft zwischen den beiden Kugeln zurück zu führen und zeigt sich in der Zunahme der von der Waage angezeigten „Masse“.



B1 | Skizze des Versuchsaufbaus

Die Aufnahme und Auswertung der Messergebnisse bei Änderung von einer der Messgrößen und Konstanthaltung der anderen Größen erfolgt dann beispielsweise so:

- Die Ladung Q der felderzeugenden Kugel sowie die Ladung q der Probekugel werden mit einem empfindlichen Ladungsmessgerät bestimmt und konstant gehalten.
- Der Abstand r zwischen den Mittelpunkten der beiden Kugeln wird variiert.

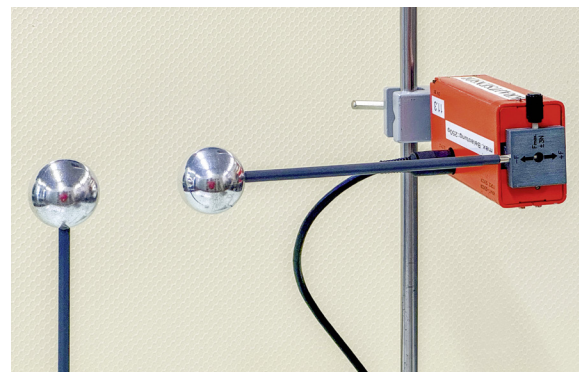
Nachteil bei diesem Aufbau des Experiments ist neben der ungenauen Ladungsbestimmung auch die geringe Änderung der Kraft bzw. der Massenanzeige an der Waage.

Versuch 1: Untersuchung der Abhängigkeit von r

Im ersten Versuch wird nun die Abhängigkeit der Kraft vom Abstand der beiden Kugeln untersucht und daher, wie oben beschrieben, die Ladung der beiden Kugeln konstant gehalten.

Die Kraftmessung kann genauer erfolgen, wenn statt der Waage ein Sensor verwendet wird, der auch noch sehr kleine Kräfte erfassen kann (vgl. Abb. B2). Wird zusätzlich der Abstand der beiden Kugeln elektronisch erfasst, lassen sich alle Messdaten bequem exportieren und weiter auswerten.

Im Folgenden werden mögliche Ergebnisse des Versuchs, sowie die Durchführung der darauf basierenden Regressionsanalyse dargestellt.



B2 | Kraftmessung durch Sensor

Messergebnisse

Bei einem wie oben beschriebenen Versuch wurden folgende Messwerte aufgezeichnet:

r in m	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300	0,350	0,400	0,500	0,750
F_{el} in mN	8,5	3,6	2,1	1,3	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1

Berücksichtigung von Messunsicherheiten

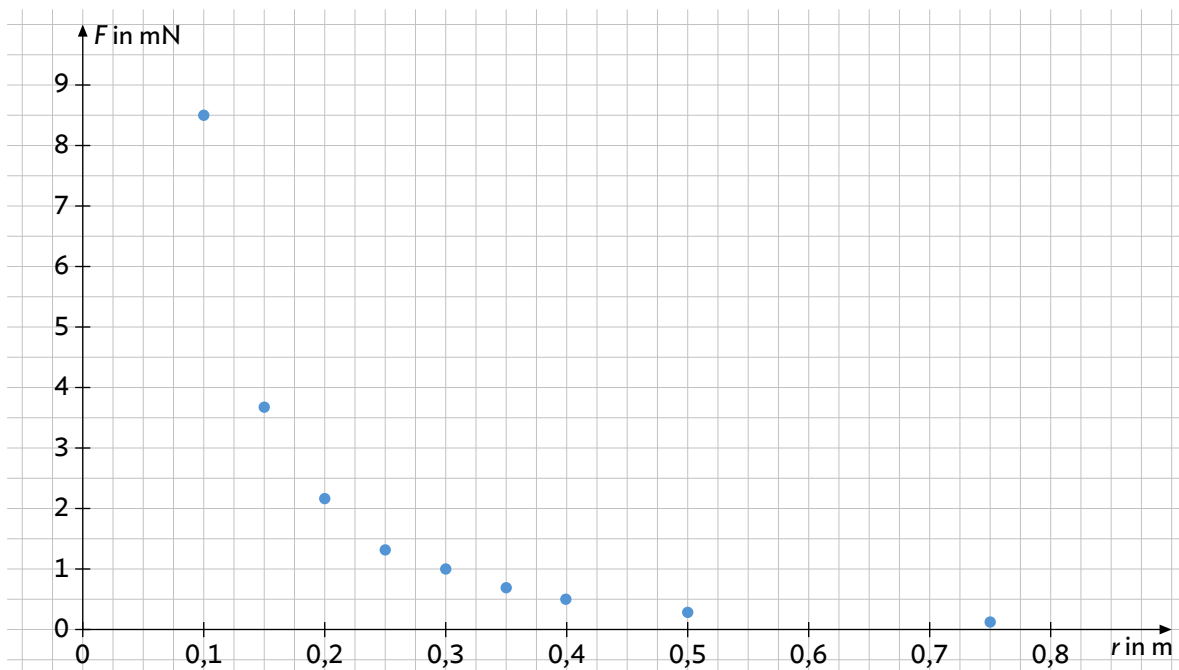
Sollen Gesetzmäßigkeiten aus der Durchführung eines Versuchs hergeleitet werden, spielt die Genauigkeit der Messwerte eine wichtige Rolle. Vor der Datenanalyse müssen daher Messunsicherheiten erfasst und möglichst klein gehalten werden.

In unserem Fall lässt sich die Entfernung der Probeladung von der Hohlkugel auf Millimeter genau ablesen, was jeweils zu einer Messunsicherheit von $\pm 0,001$ m führt. Die Kraft kann mit einer Genauigkeit von 0,1 mN gemessen werden. Die Messunsicherheit beträgt daher jeweils $\pm 0,1$ mN. Alternativ können für jedes Wertepaar mehrere Messungen (im gleichen Abstand, aber an einer anderen Position) durchgeführt und der Durchschnittswert dieser Messungen als Messwert verwendet werden. Die Spannweite der Messwerte, also die größte Abweichung einer Einzelmessung vom Mittelwert (vgl. Buch Seite 11), wird in der Tabelle dann als Unsicherheitswert angegeben.

Grundsätzlich sind bei Messungen in der Physik stets auch die Messunsicherheiten mit zu dokumentieren.

Visualisierung der Messwerte

Das Diagramm der Messwerte offenbart, dass kein linearer Zusammenhang zwischen dem Abstand r und der Kraft F besteht – wir können keine sinnvolle Ausgleichsgerade durch die Messpunkte ziehen.



B3 | r-F-Diagramm mit Messpunkten

Hingegen wären Zusammenhänge wie $F \sim \frac{1}{r}$ oder $F \sim \frac{1}{r^2}$ möglich, da die (gedachte) Kurvenform eine indirekte Proportionalität nahelegt. Um zu beurteilen, ob diese Hypothesen zutreffen, kommen verschiedene Möglichkeiten in Betracht.

Exkurs: Möglichkeit 1: Algebraische Auswertung mit geeigneter Tabelle

Um die Berechnung von Messunsicherheiten zu verdeutlichen, erfolgt die Auswertung der Daten zunächst mithilfe einer Tabelle. Im weiteren Verlauf soll sich dann aber insbesondere auf die Auswertung mithilfe der Regression fokussiert werden. Die Messwerttabelle wird nun um die berechneten Werte für $F \cdot r$ bzw. $F \cdot r^2$ erweitert. Ergibt sich für einen der beiden Terme ein konstanter Wert, so kann damit die entsprechende Hypothese als bestätigt gelten. Natürlich wird man nicht erwarten, dass diese Bedingung exakt erfüllt ist. Dies führt auf die Frage, welche Abweichungen denn noch tolerierbar sind, um die Hypothese als erfüllt anzusehen. Dazu muss auch für die zusammengesetzten Werte $F \cdot r$ bzw. $F \cdot r^2$ eine Unsicherheit angegeben werden; das Verfahren dazu wird im **Methodenkasten** behandelt.

r [m]	$0,100 \pm 0,001$	$0,150 \pm 0,001$	$0,200 \pm 0,001$	$0,250 \pm 0,001$	$0,300 \pm 0,001$	$0,350 \pm 0,001$	$0,400 \pm 0,001$	$0,500 \pm 0,001$	$0,750 \pm 0,001$
F_{el} [mN]	$8,5 \pm 0,1$	$3,6 \pm 0,1$	$2,1 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$	$0,9 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	$0,5 \pm 0,1$	$0,3 \pm 0,1$	$0,1 \pm 0,1$
$F \cdot r$ [mNm]	$0,85 \pm 0,02$	$0,54 \pm 0,02$	$0,42 \pm 0,02$	$0,33 \pm 0,03$	$0,27 \pm 0,03$	$0,25 \pm 0,04$	$0,20 \pm 0,04$	$0,15 \pm 0,05$	$0,08 \pm 0,08$
$F \cdot r^2$ [mNm ²]	$0,085 \pm 0,003$	$0,081 \pm 0,003$	$0,084 \pm 0,005$	$0,081 \pm 0,007$	$0,084 \pm 0,005$	$0,09 \pm 0,01$	$0,08 \pm 0,02$	$0,08 \pm 0,03$	$0,06 \pm 0,06$

Fazit: Vergleicht man nun die letzten beiden Zeilen der Tabelle, so muss aufgrund der Messwerte und ihrer Unsicherheiten die Hypothese $F \sim \frac{1}{r}$ verworfen werden, während die Hypothese $F \sim \frac{1}{r^2}$ als bestätigt betrachtet werden darf.

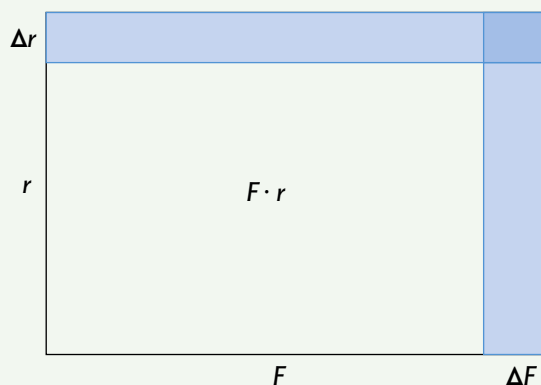
Methoden

Messunsicherheit bei zusammengesetzten Termen

Betrachten wir beispielhaft die gemessenen Größen F und r , zusammen mit ihren absoluten Messunsicherheiten ΔF und Δr . Häufig werden auch die zugehörigen relativen Unsicherheiten verwendet, das sind dann

$$\gamma_F = \frac{\Delta F}{F} \text{ und } \gamma_r = \frac{\Delta r}{r}.$$

Bei Summen und Differenzen addieren sich die absoluten Messunsicherheiten. Bei der Addition zweier Strecken $r_1 \pm \Delta r_1$ und $r_2 \pm \Delta r_2$ wären im „schlimmsten Fall“ die größten bzw. kleinsten Messergebnisse $(r_1 + r_2) + (\Delta r_1 + \Delta r_2)$ bzw. $(r_1 + r_2) - (\Delta r_1 + \Delta r_2)$.



B4 | Messunsicherheit bei Produkten

Bei Produkten und Quotienten addieren sich die relativen Messunsicherheiten. Dies lässt sich einsehen, wenn man z. B. ein Produkt wie $F \cdot r$ graphisch durch ein Rechteck dargestellt (vgl. Abb. B4). Im „schlimmsten Fall“ würde man einen zu großen Flächeninhalt $(F + \Delta F) \cdot (r + \Delta r)$ messen. Ausmultiplizieren ergibt:

$$(F + \Delta F) \cdot (r + \Delta r) = F \cdot r + \Delta F \cdot r + F \cdot \Delta r + \Delta F \cdot \Delta r$$

Den letzten Summanden kann man im Vergleich mit den restlichen Summanden vernachlässigen, die relative Messunsicherheit des Produkts wird

$$\gamma_{F \cdot r} = \frac{\Delta(F \cdot r)}{F \cdot r} = \frac{\Delta F \cdot r + F \cdot \Delta r}{F \cdot r} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta r}{r} = \gamma_F + \gamma_r.$$

Rechenbeispiel: Wir betrachten die erste Spalte der Tabelle oben, also $r = (0,100 \pm 0,001)$ m und $F_{el} = (8,5 \pm 0,1)$ mN. Für die jeweiligen relativen Unsicherheiten gilt dann

$$\gamma_r = \frac{0,001 \text{ m}}{0,100 \text{ m}} = 0,01 \text{ und } \gamma_F = \frac{0,1 \text{ mN}}{8,5 \text{ mN}} = 0,0118.$$

Nun berechnet man die relative Unsicherheit von $F \cdot r$: $\gamma_{F \cdot r} = \gamma_F + \gamma_r = 0,0218$.

Abschließend ermittelt man die absolute Unsicherheit $\Delta(F \cdot r)$ – das ist der Wert, der in der Tabelle angegeben wird:

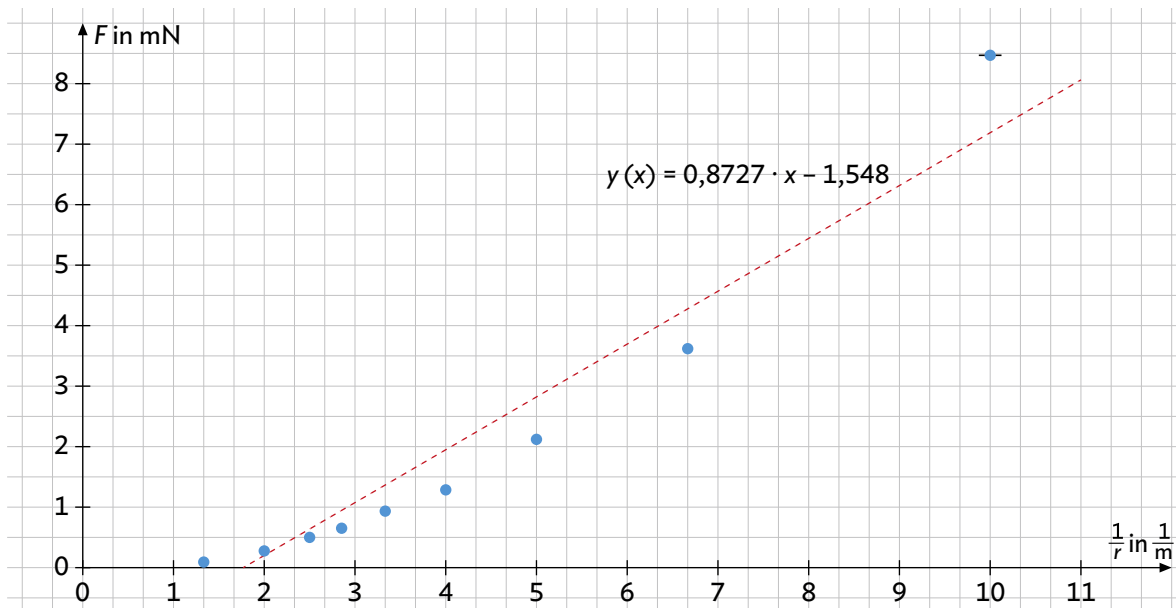
$$\Delta(F \cdot r) = \gamma_{F \cdot r} \cdot (F \cdot r) = 0,0218 \cdot 0,85 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}.$$

Die ungenaueste Messunsicherheit der Einzelgrößen ist mit 0,1 mN auf eine Nachkommastelle genau bestimmt. Da aber bei der zusammengesetzten Messunsicherheit die erste Nachkommastelle eine 0 ist, verwendet man die nächste, von 0 verschiedene Stelle – hier also die zweite Nachkommastelle.

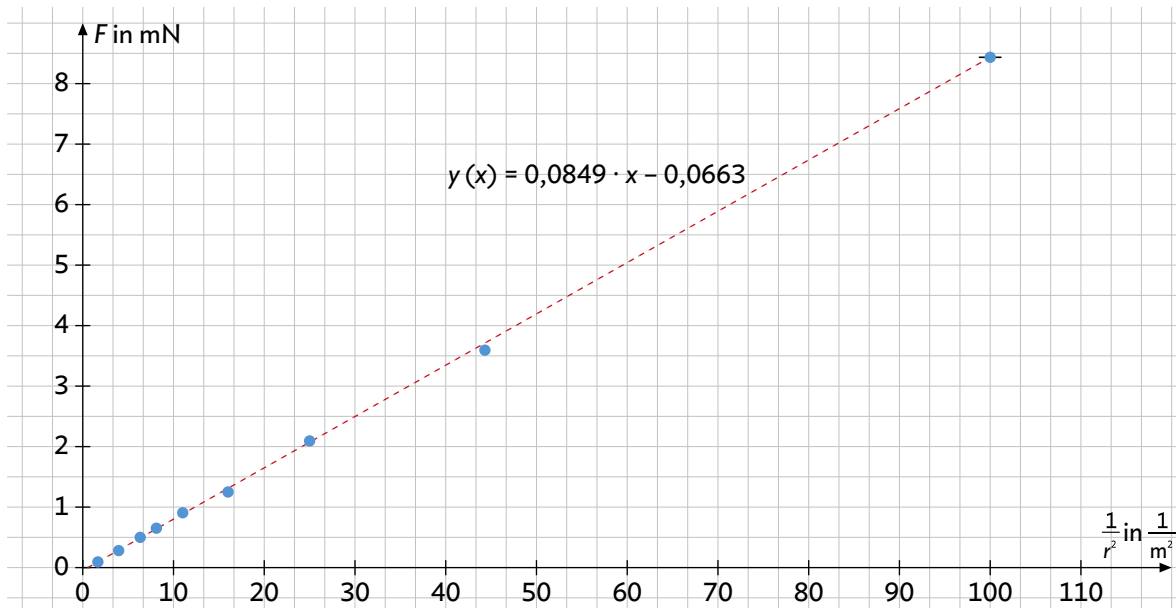
Möglichkeit 2: Graphische Auswertung durch Linearisierung

Diese Methode wurde bereits in früheren Jahrgangsstufen verwendet, wenn sich keine einfach erkennbare direkte Proportionalität zwischen zwei Messgrößen ergeben hatte. Aus dem Hyperbelgraph einer indirekten Proportionalität kann ein besser interpretierbarer linearer Graph einer direkten Proportionalität gewonnen werden. Dazu wird hier die x-Achse (Abszisse) statt mit r mit den daraus berechneten Werten von $\frac{1}{r}$ bzw. $\frac{1}{r^2}$ skaliert und darüber die davon abhängigen Werte der elektrischen Kraft F_{el} aufgetragen.

In unserem Fall stehen die beiden Hypothesen $F \sim \frac{1}{r}$ oder $F \sim \frac{1}{r^2}$ zur Auswahl, entsprechend müssen auf der x-Achse die Größen $\frac{1}{r}$ bzw. $\frac{1}{r^2}$ aufgetragen werden. Das Ergebnis (mit Unsicherheitsbalken) zeigen die folgenden beiden Diagramme. Außer beim letzten Datenwert sind die Unsicherheitsbalken allerdings nicht mehr zu erkennen.



B5 $\frac{1}{r}$ -F-Diagramm mit Ausgleichsgerade



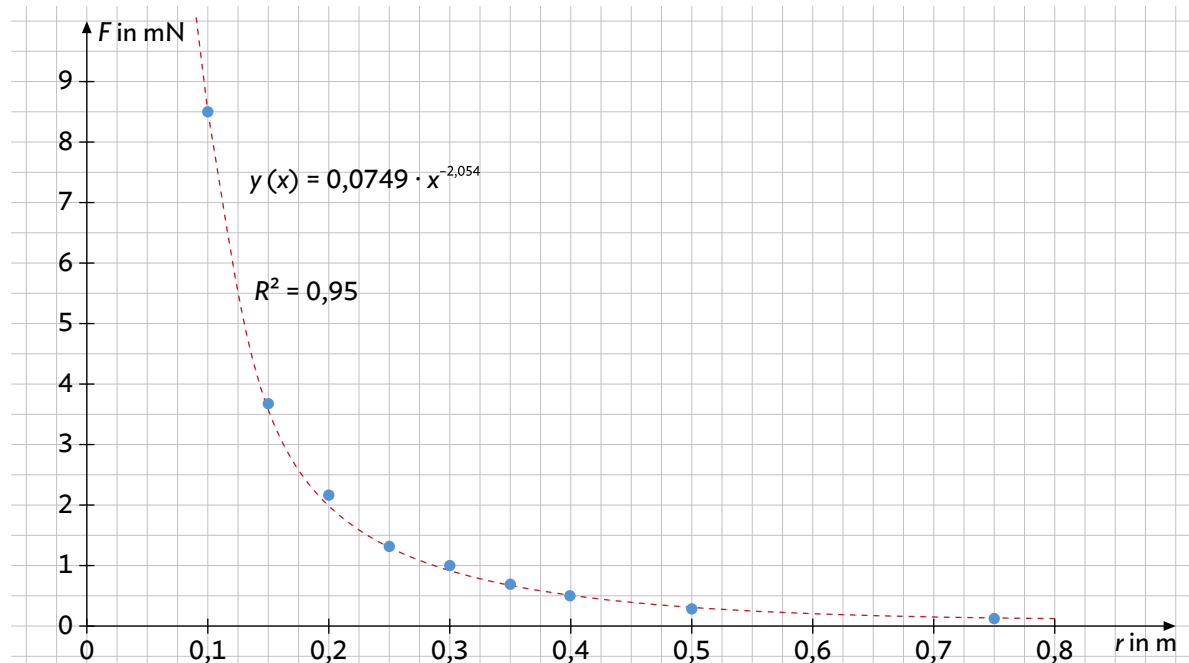
B6 $\frac{1}{r^2}$ -F-Diagramm mit Ausgleichsgerade

Fazit: Innerhalb der Unsicherheitsbereiche lässt sich im ersten Fall sicher keine Ursprungsgerade durch die Messwerte legen, im zweiten Fall (näherungsweise) schon. Dadurch wird die Hypothese $F \sim \frac{1}{r}$ verworfen und die Hypothese $F \sim \frac{1}{r^2}$ bestätigt.

1 Experimente zur Coulombkraft – Teil 1

Das mathematische Verfahren, um durch eine Reihe von Datenpunkten den „besten“ Funktionsgraphen (innerhalb einer bestimmten Klasse von Funktionen) zu legen, heißt Regression. Genaueres dazu findet sich bei der **Methode** im Schulbuch auf S. 47.

Im vorliegenden Fall muss die Funktionsklasse „Potenzfunktionen“ ausgewählt werden; das Ergebnis zeigt das folgende Diagramm.



B7 r-F-Diagramm mit Graph der Regressionsfunktion

Das Bestimmtheitsmaß $R^2 = 0,95$ bedeutet, dass alle Datenpunkte nahezu exakt auf dem Funktionsgraphen liegen. Bei einem Bestimmtheitsmaß von $R^2 = 1$ liegen die Punkte genau auf dem Graphen, bei $R^2 = 0$ gibt es keine Korrelation zwischen Datenpunkten und Funktionsgraph.

Der Exponent $-2,05$ unterscheidet sich nur geringfügig vom einfacheren Exponenten -2 .

Fazit: Anhand dieser Vorgehensweise lässt sich ein Funktionsterm angeben. Dieser bestätigt in guter Näherung die Hypothese $F \sim \frac{1}{r^2}$.

Versuch 2: Untersuchung der Abhängigkeit von Q

In einem zweiten Versuch wird nun die Abhängigkeit der Kraft F von der Größe der felderzeugenden Ladung Q untersucht. Hier wird nun also der Abstand der beiden Kugeln konstant gehalten und der Betrag der felderzeugenden Ladung Q variiert.

Die Auswertung in diesem Fall ist einfacher; es ergibt sich eine direkte Proportionalität: $F \sim Q$.

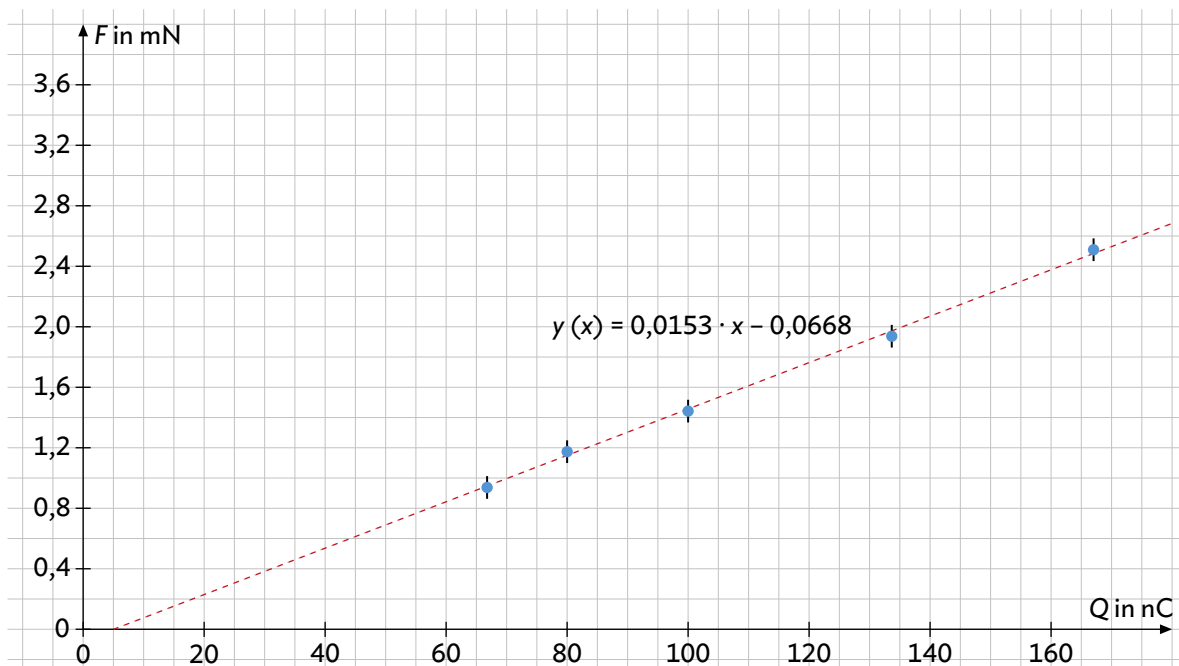
Hinweis: Aus Symmetriegründen (aufgrund des 3. Newtonschen Gesetzes) liegt ebenso eine direkte Proportionalität zu q vor, also $F \sim q$.

Messbeispiel:

Der Abstand $r = 0,200\text{ m}$ sowie der Wert der Probeladung $q = 70,0\text{ nC}$ bleiben während der Messung unverändert. Die Aufladespannung U wird variiert und die zugehörige Ladung Q sowie die Kraft F_{el} auf die Probeladung werden gemessen. Eventuelle Entladeverluste (z. B. durch zu hohe Luftfeuchtigkeit) wurden hierbei nicht berücksichtigt. Die aufgebrauchte Ladungsmenge sollte während der Messung immer wieder überprüft werden, um so festzustellen, ob eine ungewünschte Entladung erfolgt – und die Messung dann ggf. wiederholt werden.

Q in nC	$66,7 \pm 0,5$	$80,1 \pm 0,5$	$100,1 \pm 0,5$	$133,5 \pm 0,5$	$166,8 \pm 0,5$
F_{el} in mN	$0,95 \pm 0,05$	$1,18 \pm 0,05$	$1,45 \pm 0,05$	$1,95 \pm 0,05$	$2,50 \pm 0,05$

Das Diagramm zeigt die graphische Auswertung der Messdaten:



B8 | Q-F-Diagramm mit Ausgleichsgerade

Fazit: Innerhalb der Unsicherheitsbereiche lässt sich (näherungsweise) eine Ursprungsgerade durch die Messwerte zeichnen. Dadurch wird die Hypothese $F \sim Q$ bestätigt.

Zusammenführung der Ergebnisse

Im Buch wurde in Kapitel 1.2 bei der Definition der elektrischen Feldstärke ausgenutzt, dass die Kraft auf eine Probeladung im elektrischen Feld direkt proportional zur Größe dieser Probeladung q ist. Dies gilt allgemein, also auch im Fall des radialsymmetrischen Feldes: $F_{\text{el}} \sim q$.

Damit können wir zusammen mit den Ergebnissen der beiden Versuche die Aussage treffen, dass die elektrische Kraft F_{el} , die zwischen zwei geladenen Kugeln wirkt, direkt proportional zu den Ladungen Q bzw. q ist und indirekt proportional zu r^2 , also dem Quadrat des Abstands r .

Zusammenfassend gilt also $F_{\text{el}} \sim \frac{Q \cdot q}{r^2}$ bzw. $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \Leftrightarrow k = F_{\text{el}} \cdot \frac{r^2}{Q \cdot q}$.

Die Proportionalitätskonstante k lässt sich ermitteln, wenn Q und q mit einem möglichst empfindlichen Ladungsmessgerät bestimmt werden.

Die Tabelle zeigt eine Messreihe, bei der der Abstand von $r = 0,300 \pm 0,001$ m konstant gehalten wird und sowohl Q als auch q (und entsprechend auch F_{el}) variiert und gemessen werden. Anhand von $k = F_{\text{el}} \cdot \frac{r^2}{Q \cdot q}$ wird daraus dann die letzte Zeile der Tabelle berechnet.

Q in nC	102,5 ± 0,5	127,0 ± 0,5	142,5 ± 0,5	158,5 ± 0,5	191 ± 0,5
q in nC	42,0 ± 0,5	109,5 ± 0,5	75 ± 0,5	141 ± 0,5	91,5 ± 0,5
F_{el} in mN	0,40 ± 0,05	1,32 ± 0,05	0,99 ± 0,05	2,14 ± 0,05	1,57 ± 0,05
k in 10⁹ $\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$	8,36 ± 1,24	8,54 ± 0,45	8,34 ± 0,45	8,62 ± 0,32	8,09 ± 0,38

Die absoluten Unsicherheiten in der letzten Zeile ergeben sich so, wie bereits oben in der [Methode](#) beschrieben. Wie zu erwarten, sind die Zahlenwerte im Rahmen der Messgenauigkeit konstant. Man erhält k dann aus dem Mittelwert der Einzelmessungen (die Unsicherheit ergibt sich als Mittelwert der relativen Unsicherheiten):

$$k = (8,39 \pm 0,59) \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}.$$

Aus Gründen, die in späteren Kapiteln behandelt werden, schreibt man den endgültigen Zusammenhang nicht als $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, sondern – scheinbar komplizierter – als $F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$.

Die Konstante ϵ_0 heißt elektrische Feldkonstante; aus unseren Messungen finden wir mit

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Leftrightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}:$$

$$\epsilon_0 = (9,48 \pm 0,66) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = (9,48 \pm 0,66) \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}.$$

Die Messunsicherheit für ϵ_0 wurde berechnet, indem zunächst die relative Unsicherheit von k bestimmt wurde: $\gamma_k = \frac{\Delta k}{k} = \frac{0,59}{8,39} = 0,070 = 7,0\%$.

Da ϵ_0 nur von k abhängt, muss die relative Messunsicherheit γ_{ϵ_0} dieselbe wie bei k sein. Daher gilt dann für die absolute Messunsicherheit: $\Delta\epsilon_0 = \gamma_k \cdot \epsilon_0 = 0,070 \cdot 9,48 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 0,66 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

In der Formelsammlung ist der Wert nach den genauesten Labormessungen angegeben zu

$\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$. Unser experimentell ermittelter Wert stimmt also unter Berücksichtigung der ermittelten Messunsicherheiten mit dem Literaturwert überein. Die relative Unsicherheit des durch die Messung ermittelten Werts ist allerdings vergleichsweise groß. In Aufgabe 4 können Sie sich genauer mit der Thematik befassen.

Die elektrische Kraft F_{el} zwischen zwei Kugelladungen mit den Größen Q und q , die sich in einem Abstand r der Kugelmitten voneinander befinden, wird als Coulombkraft bezeichnet. Sie tritt immer in radialsymmetrischen elektrischen Feldern auf. Es gilt:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Arbeitsauftrag

- 1 \ Der Versuch 2 (Aufbau s. o.) wird bei konstanter Ladung Q der felderzeugenden Kugel und konstantem Abstand r mit Variation der Probekugelladung q durchgeführt. Dabei soll die Hypothese $F_{el} \sim q$ untersucht werden.
Nachstehend die Messergebnisse.

q in nC	52,5	79,0	110,0	153,0	200,5
F_{el} in mN	1,9	2,8	4,0	5,5	7,2

- a) Zeigen Sie rechnerisch mithilfe einer Tabelle, dass die Hypothese anhand der Messwerte plausibel erscheint.
- b) Das verwendete Coulombmeter hat eine Genauigkeit von $\pm 0,5$ nC, der Kraftmesser eine Genauigkeit von $\pm 0,5$ mN. Erstellen Sie ein Diagramm mit den Messwerten und zeichnen Sie dort die sich ergebenden Unsicherheitsbalken mit ein.
- c) Stellen Sie mithilfe einer Tabellenkalkulation die Gleichung einer Ausgleichsgeraden der Messpunkte im Diagramm auf und zeichnen Sie diese ins Diagramm ein.
- d) Beurteilen Sie die Aussagekraft des Experiments im Hinblick auf den Term der Coulombkraft.
- 2 \ Erläutern Sie anhand einer Kurzpräsentation Ihre Vorgehensweise bei der Erstellung einer Trendlinie in einem Tabellenkalkulationsprogramm. Verwenden Sie beispielsweise die Messwerte von Versuch 2 oder die aus Aufgabe 1.
- 3 \ Zeigen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels auf, wie aus einer indirekten Proportionalität zweier Messgrößen ein Diagramm mit einer linearen Messkurve entwickelt werden kann.
- 4 \ Geben Sie mögliche Gründe dafür an, dass der Wert von ϵ_0 bei der Zusammenführung der Ergebnisse von der vorherigen Seite vom Wert aus der Formelsammlung abweicht.
Hinweis: Denken Sie dabei zum Beispiel an den Einfluss der Umgebung auf die Ladungen und den Einfluss, den Influenzeffekte auf die Kraft zwischen den Kugeln haben könnten.
- 5 \
- a) Führen Sie die in Versuch 1 und Versuch 2 beschriebenen Experimente durch, inklusive einer vollständigen Betrachtung der Messunsicherheiten.
Hinweis: Hierbei bieten sich beispielsweise Torsionskraftmesser im mN-Bereich an, die eine Genauigkeit im Bereich von 0,1 mN aufweisen.
- b) Bestimmen Sie die prozentuale Messabweichung Ihres Ergebnisses für ϵ_0 von dem Wert aus der Formelsammlung.
- 6 \ Bestimmen Sie die elektrische Kraft, die auf eine Punktladung $q = 4,5$ nC wirkt, wenn sich in 8,0 cm Abstand dazu eine weitere Punktladung mit $Q = 30$ nC befindet.