

1

Experimente zur Coulombkraft – Teil 2

Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler **bestätigen anhand von Messwerten durch Regression den Term für die Coulombkraft.**

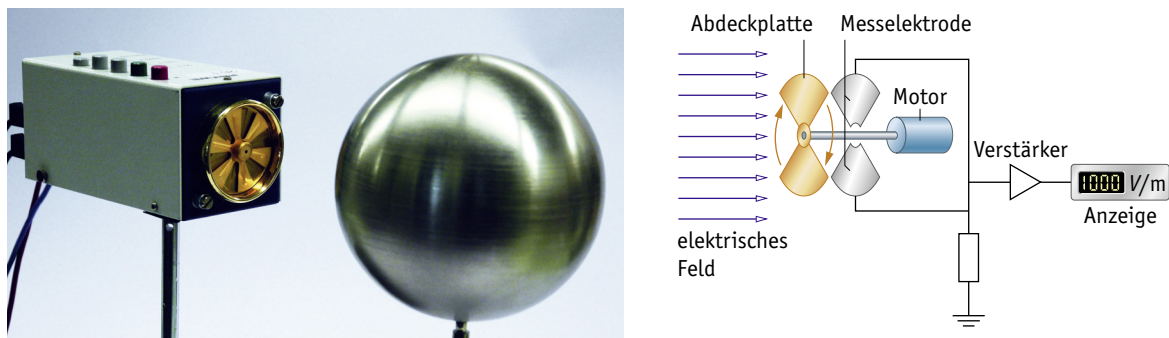
Feldstärke für das elektrische radialsymmetrische Feld

Im Arbeitsblatt „*Experimente zur Coulombkraft – Teil 1*“ wird die Wirkung des elektrischen Feldes einer geladenen Kugel anhand der Kraftwirkung zwischen einer felderzeugenden Kugelladung und einer Probeladungskugel untersucht. Das elektrische Feld einer Kugelladung kann aber auch direkt untersucht werden – mithilfe eines Elektrofeldmeters.

Quantitative Ergebnisse für das elektrische Feld in der Umgebung einer felderzeugenden Kugelladung lassen sich auch mathematisch aus dem Term für die Coulombkraft herleiten – das geschieht dann in AB5. Hier soll nun erstmal die experimentelle Untersuchung anhand des Elektrofeldmeters im Vordergrund stehen.

Versuch: Elektrofeldmeter

Ein Elektrofeldmeter ist ein Gerät, mit dem direkt elektrische Felder vermessen werden können (vgl. B1). Dazu sind an der Vorderseite Flügelräder angebracht. Diese werden vergoldet, da Gold eine sehr große Leitfähigkeit aufweist. Das vordere Flügelrad gibt bei der Drehung periodisch Öffnungen frei und verschließt diese wieder. Das hintere Flügelrad dient als Messelektrode. Wenn es abgedeckt ist, befindet sich die Messelektrode in einem feldfreien Faradayschen Käfig. Wenn sich das vordere Flügelrad bewegt, kann das elektrische Feld ins Innere eindringen und sorgt an der Messelektrode für Influenz. Dabei fließen Ladungen über den Widerstand ab und können mit einem Verstärker gemessen werden. Diese influenzierte Ladung ist proportional zur elektrischen Feldstärke. Dadurch kann das Elektrofeldmeter einen Wert für die elektrische Feldstärke am jeweiligen Ort in der Einheit $\frac{V}{m}$ anzeigen.



B1 | Links: Foto eines Elektrofeldmeters; Rechts: Aufbau eines Elektrofeldmeters

Mithilfe des Elektrofeldmeters kann nun also das Feld einer Kugelladung untersucht werden. Dafür werden zwei unterschiedliche Messreihen aufgenommen:

- *Messreihe 1:* Der Abstand r zwischen Kugel und Elektrofeldmeter wird konstant gehalten. Die elektrische Feldstärke E wird in Abhängigkeit von der Kugelladung Q gemessen. Die Kugelladung wird dabei nicht direkt bestimmt, sondern aufgrund von $Q = C \cdot U$ als direkt proportional zur Aufladespannung U angenommen. Gemessen wird also die Aufladespannung, nicht die Ladung.
- *Messreihe 2:* Die Kugelladung Q wird konstant gehalten. Die elektrische Feldstärke E wird in Abhängigkeit vom Abstand r gemessen.

Messergebnisse

Messreihe 1 ($r = (30,0 \pm 0,1)$ cm; U (und damit Q) wird variiert und E jeweils gemessen):

U in kV	$5,00 \pm 0,05$	$8,00 \pm 0,05$	$12,00 \pm 0,05$	$15,00 \pm 0,05$	$20,00 \pm 0,05$
E in $\frac{\text{kV}}{\text{m}}$	17 ± 1	28 ± 1	42 ± 1	53 ± 1	72 ± 1

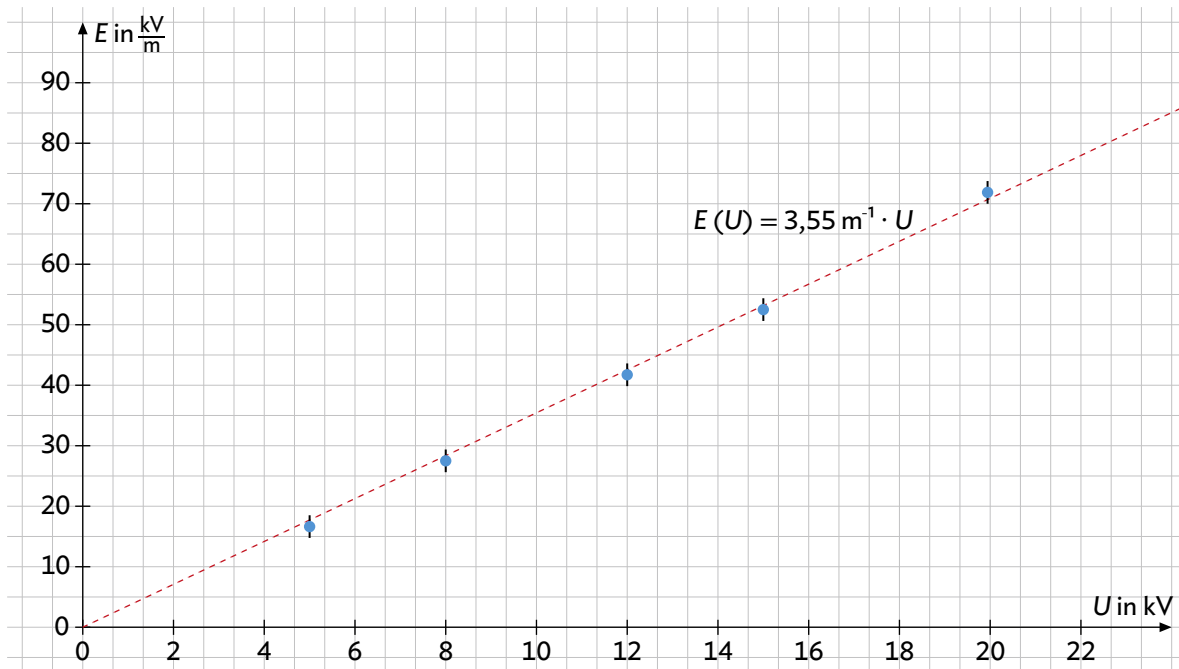
Messreihe 2 ($U = (8,0 \pm 0,1)$ kV; $Q = (245 \pm 1)$ nC; r wird variiert und E jeweils gemessen):

r in m	$0,100 \pm 0,001$	$0,200 \pm 0,001$	$0,300 \pm 0,001$	$0,400 \pm 0,001$	$0,500 \pm 0,001$
E in $\frac{\text{kV}}{\text{m}}$	220 ± 1	64 ± 1	28 ± 1	16 ± 1	10 ± 1

Auswertung

Das mathematische Verfahren, um durch eine Reihe von Datenpunkten den „besten“ Funktionsgraphen (innerhalb einer bestimmten Klasse von Funktionen) zu legen, heißt Regression. Genaueres dazu findet sich bei der **Methode** im Schulbuch auf S. 47.

Das folgende U - E -Diagramm stellt die Daten aus der *Messreihe 1* dar:

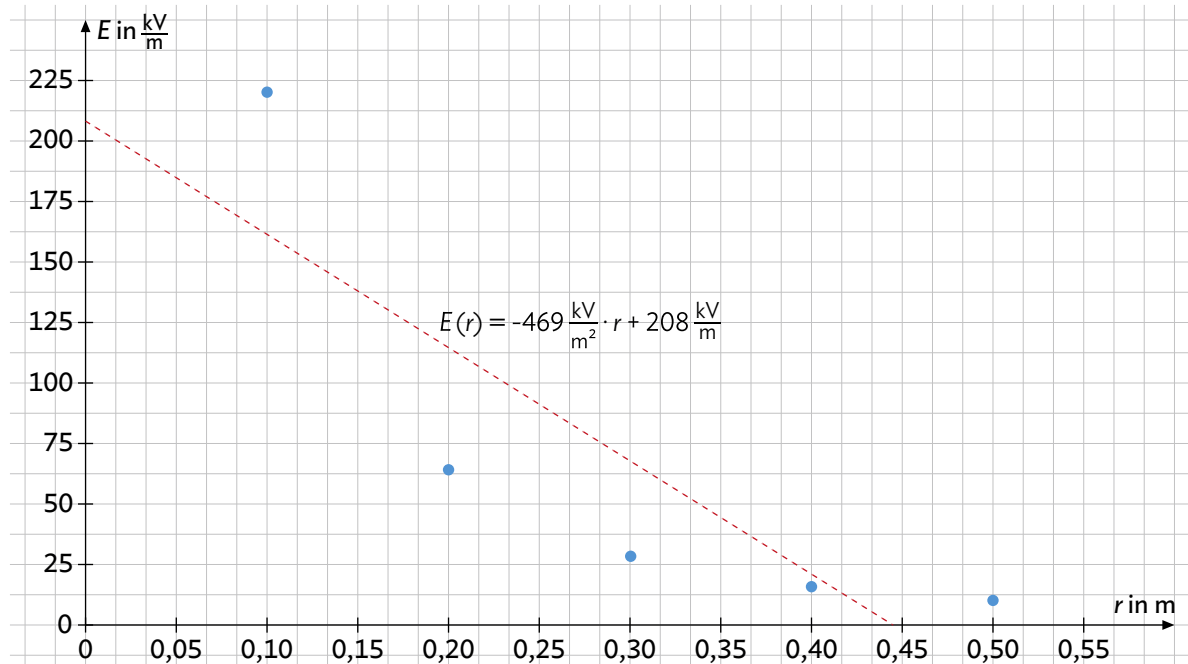


B2 U-E-Diagramm mit Regressionsgerade.

Fazit: Man kann erkennen, dass sich unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten eine Ursprungsgerade der Form $E(U) = 3,55 \text{ m}^{-1} \cdot U$ durch die Messwerte legen lässt. Die direkte Proportionalität $E \sim U$ und somit auch $E \sim Q$ wird damit bestätigt.

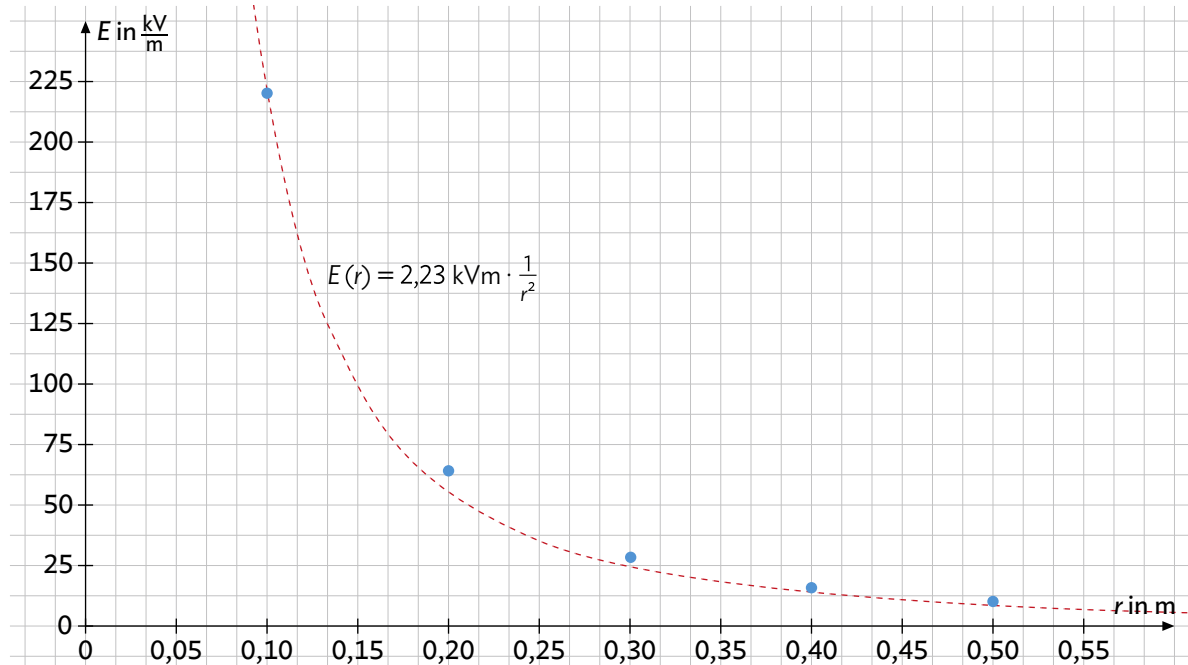
1 Experimente zur Coulombkraft – Teil 2

Das folgende r - E -Diagramm stellt die Daten aus der Messreihe 2 dar, hier zunächst wieder mit dem Versuch, die direkte Proportionalität $E \sim r$ nachzuweisen:



B3 r - E -Diagramm mit Ausgleichsgerade.

Man erkennt leicht: Die Ausgleichsgerade stimmt überhaupt nicht mit den Messwerten überein. In Analogie zum Kraft-Experiment aus „Experimente zur Coulombkraft – Teil 1“ wird nun stattdessen die Proportionalität $E \sim \frac{1}{r^2}$ überprüft:



B4 r^2 - E -Diagramm mit Ausgleichskurve.

Fazit: Die Ausgleichskurve der Form $E(r) = 2,23 \text{ kVm} \cdot \frac{1}{r^2}$ stellt unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten dar. Die vermutete Proportionalität $E \sim \frac{1}{r^2}$ kann also als bestätigt angesehen werden.

Zusammenführung der Ergebnisse

Die beiden durchgeführten Messreihen haben gezeigt, dass die elektrische Feldstärke einer geladenen Kugel direkt proportional zur Ladung der Kugel ist ($E \sim Q$) und indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes von der Kugel ($E \sim \frac{1}{r^2}$)

Zudem ist bereits aus Kapitel 1.2 des Buchs bekannt, dass in einem elektrischen Feld die elektrische Kraft F_{el} auf eine Probeladung q mit der elektrischen Feldstärke E wie folgt zusammenhängt: $F_{\text{el}} = E \cdot q$

Führen wir diese beiden Erkenntnisse zusammen, können wir einen Term für die auf eine Probeladung ausgeübte elektrische Kraft herleiten: $F_{\text{el}} = E \cdot q \sim \frac{Q \cdot q}{r^2}$

Und damit $E = k \cdot \frac{Q}{r^2}$ sowie $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$.

Die Proportionalitätskonstante $k = E \cdot \frac{r^2}{Q}$ können wir aus unseren Messungen zumindest näherungsweise bestimmen. Hierfür nutzen wir exemplarisch die Werte der ersten Messung aus *Messreihe 2*:

$U = (8,0 \pm 0,1) \text{ kV}$; $r = (0,100 \pm 0,001) \text{ m}$; $E = (220 \pm 1) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$; $Q = (245 \pm 1) \text{ nC}$

$$\Rightarrow k = E \cdot \frac{r^2}{Q} = 220 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \cdot \frac{(0,100 \text{ m})^2}{245 \text{ nC}} = 8,980 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$$

Die Messunsicherheit für k wird bestimmt, indem die relativen Messunsicherheiten der Einzelgrößen addiert und mit k multipliziert werden, vgl. [Methode](#) zur Messunsicherheit in AB1 „Experimente zur Coulombkraft – Teil 1“.

Insgesamt erhalten wir dann: $k = (8,980 \pm 0,078) \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$.

Aus Gründen, die in späteren Kapiteln behandelt werden, schreibt man den endgültigen Zusammenhang nicht als $F_{\text{el}} = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, sondern – scheinbar komplizierter – als $F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$.

Die Konstante ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante; aus unseren Messungen finden wir dann:

$$k = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \Leftrightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot k}$$

$$\epsilon_0 = (8,862 \pm 0,077) \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} = (8,862 \pm 0,077) \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

In der Formelsammlung ist der Wert nach den genauesten Labormessungen angegeben zu

$$\epsilon_0 = 8,8541878128 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Die elektrische Kraft zwischen zwei geladenen Kugeln mit den Ladungen Q und q , die sich in einem Abstand r der Kugelmitten voneinander befinden, wird **Coulombkraft** genannt. Sie tritt immer in radialsymmetrischen elektrischen Feldern auf. Es gilt:

$$F_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Die elektrische Feldstärke E eines radialsymmetrischen Feldes der Punktladung Q im Abstand r lautet:

$$E = \frac{F_{\text{el}}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Kritische Betrachtung der Messunsicherheiten

Kommen wir nochmal auf unsere auf Basis der Messwerte durchgeführte Berechnung der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 zurück:

$$U = (8,0 \pm 0,1) \text{ kV}; r = (0,100 \pm 0,001) \text{ m}; E = (220 \pm 1) \frac{\text{kV}}{\text{m}}; Q = (245 \pm 1) \text{ nC}$$

$$\Rightarrow k = E \cdot \frac{r^2}{Q} = 220 \frac{\text{kV}}{\text{m}} \cdot \frac{(0,100 \text{ m})^2}{245 \text{ nC}} = 8,980 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}}$$

$$\epsilon_0 = (8,862 \pm 0,077) \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Ein Vergleich mit dem Wert aus der Formelsammlung zeigt, dass der aus den Messwerten bestimmte Wert im Rahmen der Messunsicherheiten mit dem Literaturwert übereinstimmt. Betrachten wir trotzdem die einzelnen Messunsicherheiten nochmal etwas genauer:

Messgröße	Messwert	± Genauigkeit der Ablesung	prozentuale Abweichung
Spannung U	8,0 kV	0,1 kV	1,3 %
Abstand r	0,100 m	0,001 m	1,0 %
Feldstärke E	220 $\frac{\text{kV}}{\text{m}}$	1 $\frac{\text{kV}}{\text{m}}$	0,5 %
Ladung Q	245 nC	1 nC	0,4 %

Alle diese Unsicherheiten sind noch in einem tolerierbaren Bereich und führen zu einem Ergebnis, das im Rahmen der Messunsicherheiten mit dem Literaturwert übereinstimmt. Es kann bei der Messung noch weitere Unsicherheiten geben, die noch nicht berücksichtigt wurden, aber offensichtlich keinen so großen Einfluss auf das Ergebnis haben – und auch nur schwer quantitativ bestimmt werden können:

- Bei der Bestimmung des Abstandes r wird davon ausgegangen, dass sich die gesamte Ladung der Kugel in deren Zentrum befindet. Gerade bei kleinen Abständen im Vergleich zum Kugelradius findet jedoch eine Ladungsverschiebung (Influenz) auf der Kugel statt. Bei großen Abständen machen sich Störeinflüsse von äußeren Ladungen in der Umgebung bemerkbar.
- Experimente werden dadurch erschwert, dass sich die Kugel schnell über die Luft entlädt. Das verhindert in vielen Fällen die genaue Bestimmung der Messwerte. Hier kommt dann also zusätzlich zur über das Messgerät gegebenen Unsicherheit der Ladungsmessung noch hinzu, dass die Ladung nicht über einen längeren Zeitraum konstant bleibt.

Arbeitsauftrag

1 \

- Führen Sie den auf diesem Arbeitsblatt beschriebenen Versuch mit dem Elektrofeldmeter selbst durch. Fertigen Sie dabei ein Versuchsprotokoll an.
- Führen Sie wie im Abschnitt Auswertung oben beschrieben eine graphische Auswertung mittels Regression durch. Sie können dafür auch alternativ die in diesem Arbeitsblatt verwendeten Messwerte nutzen.
- Führen Sie eine ausführliche Analyse der Messunsicherheiten bei Ihrem Experiment durch.
- Berechnen Sie aus den Messwerten den Wert für die elektrische Feldkonstante. Bestimmen Sie auch die Messunsicherheit des von Ihnen ermittelten Werts und vergleichen Sie diesen mit dem Wert aus der Formelsammlung. Begründen Sie eventuelle Abweichungen.

2 \ Begründen Sie, dass bei der Messung mit dem Elektrofeldmeter die verwendete felderzeugende Kugel nicht als Punktladung angenommen werden kann. Beschreiben Sie, wie dadurch das Ergebnis der Messungen beeinflusst wird.

3 \ Die Messung mithilfe des Elektrofeldmeters zur Untersuchung der Abstandsabhängigkeit des elektrischen Feldes („Messreihe 2“) wird erneut durchgeführt.

Dabei werden für $U = (8,0 \pm 0,05) \text{ kV}$ folgende Werte gemessen:

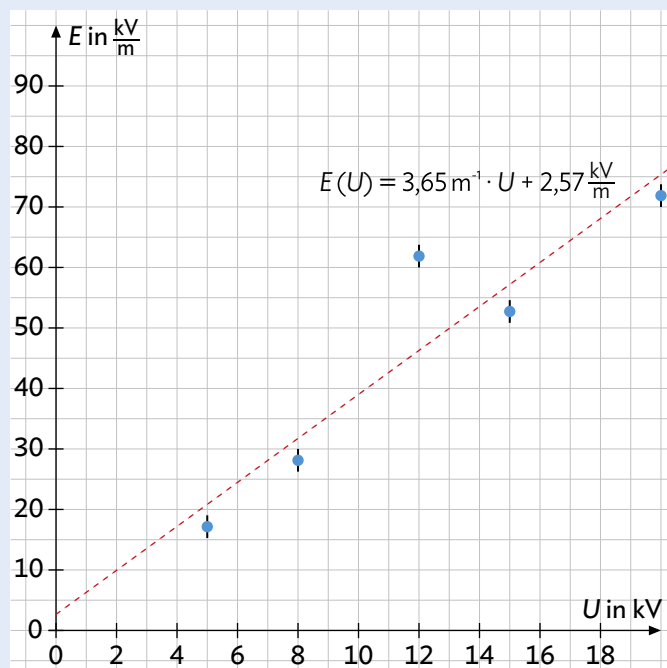
$r \text{ in m}$	$0,150 \pm 0,001$	$0,200 \pm 0,001$	$0,300 \pm 0,001$	$0,400 \pm 0,001$	$0,500 \pm 0,001$
$E \text{ in } \frac{\text{kV}}{\text{m}}$	220 ± 1	125 ± 1	53 ± 1	29 ± 1	21 ± 1

- Die Hypothese $E \sim \frac{1}{r^2}$ soll überprüft werden. Führen Sie mithilfe dieser Daten die Auswertung wie zuvor beschrieben durch. Begründen Sie, ob damit die Hypothese bestätigt wird.
 - Bestimmen Sie anhand eines beispielhaften Wertepaares den Wert für die elektrische Feldkonstante. Gehen Sie dabei von einer Feldladung $Q = (550 \pm 5) \text{ nC}$ aus. Geben Sie dabei auch die Messunsicherheit an.
- 4 \ Führen Sie eine Recherche zum Elektrofeldmeter an. Stellen Sie anschließend dessen Funktionsweise in einer Kurzpräsentation vor.

5 \ In B5 ist eine Auswertung zur Untersuchung der Abhängigkeit des elektrischen Felds von der Ladespannung der Kugel dargestellt, analog zur „Messreihe 1“.

- Begründen Sie, dass auf Basis dieser Messung die direkte Proportionalität $E \sim U$ nicht bestätigt werden kann.
- Jacob meint: „Wenn man den Messwert bei $U = 12,0 \text{ kV}$ weglässt, erhält man eine schöne Ursprungsgerade. Wir sollten den Wert also einfach streichen, dann erhalten wir das gesuchte Ergebnis!“

Beziehen Sie zu dieser Aussage Stellung. Gehen Sie insbesondere darauf ein, ob es physikalisch vertretbar ist, Messwerte anzupassen, wenn man dann dadurch das ursprünglich erwartete Ergebnis erhält und die aufgestellte Hypothese bestätigt wird.



B5 \ U-E-Diagramm mit Regressionsgerade.