2 Auf- und Entladevorgang bei einem *RC*-Glied

Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler **modellieren den zeitlichen Verlauf von Spannung und Stromstärke bei der Auf- und Entladung eines Kondensators mithilfe von Differentialgleichungen und ermitteln die im Kondensator gespeicherte Ladung.**

Voraussetzung: Experimentelle Bestimmung der Ladung eines Kondensators anhand eines *t*-*I*-Diagramms mithilfe graphischer Integration (Schülerexperiment im Buch Kapitel 2.3)

Mathematische Modellierung des Aufladevorgangs

Zunächst soll der Aufladevorgang eines Kondensators mathematisch beschrieben werden. Über einen Wechselschalter werden der Widerstand R und der Kondensator C mit der Spannungsquelle U_0 verbunden (vgl. B1). Die Kombination von Widerstand und Kondensator nennt man ein ***RC*-Glied**.

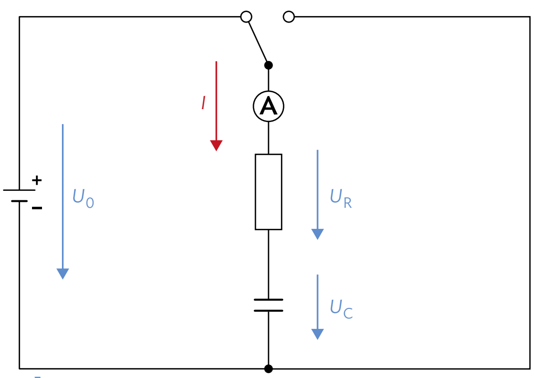
Aufgrund der Maschenregel („Die Summe aller Teilspannungen ist gleich der Spannung der Quelle.“) gilt:

$$\boldsymbol{U_0 = U_R + U_C}$$

$$U_0 = RI + U_C$$

$$\Leftrightarrow RI = U_0 - U_C$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{U_0}{R} - \frac{U_C}{R} \qquad (1)$$



B1 Schaltplan eines *RC*-Gliedes beim Aufladevorgang.

Die Stromstärke I ist gegeben durch $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Für unendlich kleine Zeitintervalle, also $\Delta t \to 0$, bildet man davon den Grenzwert – der Differenzenquotient wird dadurch zum Differentialquotient:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q} \qquad (2)$$

In Worten: Die Stromstärkefunktion ist die Ableitung der Ladungsfunktion. Der Punkt über einer Funktion, die den zeitlichen Verlauf einer physikalischen Größe beschreibt, ist die sogenannte „zeitliche Ableitung“ oder die „Ableitung nach der Zeit“. Dieser Ausdruck wird „Q Punkt“ ausgesprochen.

Außerdem gilt beim Kondensator:

$$C = \frac{Q}{U_C} \Leftrightarrow U_C = \frac{Q}{C} \qquad (3)$$

Gleichung (2) und (3) werden in (1) eingesetzt:

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{RC}$$

bzw.

$$\boldsymbol{\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot Q} \qquad (4)$$

Gleichung (4) enthält die Funktion $Q(t)$, die die Ladung des Kondensators zu jedem Zeitpunkt angibt, und ihre Ableitung $\dot{Q}(t)$, also die Funktion $I(t)$, die die Stromstärke zu jedem Zeitpunkt angibt. Man nennt eine Gleichung, die eine Funktion und deren eigenen Ableitungen enthält, eine **Differentialgleichung (DGL)**; hier ist es eine Differentialgleichung **1. Ordnung**, weil sie lediglich eine 1. Ableitung enthält.

Der nächste Schritt ist es, eine Lösung für die DGL zu finden, sodass die Funktionen $Q(t)$ und $I(t)$ tatsächlich bekannt sind und die Ladungs- und Stromstärkewerte zu jedem Zeitpunkt berechnet werden können.

Lösung der DGL

In Gleichung 4 erkennt man, dass die Ableitung von Q zu einem Ausdruck führt, in dem Q wieder enthalten ist. Mathematisch ist das bei den Exponentialfunktionen der Fall: Die Ableitung der Exponentialfunktion ergibt wieder einen Term, der die ursprüngliche Exponentialfunktion enthält. Daher wird hier als Lösungsansatz eine Exponentialfunktion verwendet. In seiner allgemeinsten Form würde der Lösungsansatz wie folgt aussehen: $Q(t) = a \cdot e^{bt} + c$

Um nun die Parameter a, b und c zu bestimmen, muss man dafür weitere Informationen nutzen, die sich aus den physikalischen Gegebenheiten erschließen lassen. Man spricht hierbei von **Randbedingungen**.

Beim Aufladevorgang ist die Kondensatorladung anfangs Null, es gilt also $Q(t = 0) = 0$. Setzt man das in den Lösungsansatz ein, erhält man: $Q(t = 0) = a \cdot e^0 + c = a + c = 0$ und somit $a = -c$.

Eine weitere Randbedingung ist, dass die Kondensatorladung sich einem Sättigungswert Q_0 annähert – nach unendlich langer Zeit (also $t \to \infty$) muss der Kondensator also die Ladung Q_0 erreichen:

$$Q(t \to \infty) = \lim_{t \to \infty} (a \cdot e^{b \cdot t} - a) = Q_0$$

Damit ein endlicher Wert Q_0 erreicht werden kann, muss $b < 0$ sein, und damit:

$$Q(t \to \infty) = -a = Q_0$$

Wir erhalten also für die Parameter a, b und c mithilfe der Randbedingungen:

$$a = -Q_0;\ c = Q_0;\ b < 0$$

Der Lösungsansatz lautet also nun $Q(t) = -Q_0 \cdot e^{bt} + Q_0 = Q_0 \left(1 - e^{bt}\right)$

Durch Ableiten nach der Zeit (Achtung: Kettenregel!) erhält man: $\dot{Q} = -Q_0 \cdot b \cdot e^{bt}$

Der Parameter b muss nun noch genauer bestimmt werden. Dazu setzen wir Q und $\dot{Q}$ in 4 ein:

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot Q$$

$$-Q_0 \cdot b \cdot e^{bt} = \frac{U_0}{R} - \frac{1}{RC} \cdot Q_0 \left(1 - e^{bt}\right) \quad \Big| : e^{bt} \quad \text{bzw.} \quad \cdot e^{-bt}$$

$$-Q_0 \cdot b = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-bt} - \frac{1}{RC} \cdot Q_0 \cdot e^{-bt} + \frac{1}{RC} \cdot Q_0$$

Mit $U_0 = \frac{Q_0}{C}$ folgt:

$$-Q_0 \cdot b = \underbrace{\frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-bt} - \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-bt}}_{0} + \frac{1}{RC} \cdot Q_0$$

$$-Q_0 \cdot b = \frac{1}{RC} \cdot Q_0$$

Und damit: $b = -\frac{1}{RC}$

Die Lösungsfunktion der Differentialgleichung lautet also: $Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ 5

Entsprechend gilt für die zeitliche Ableitung: $I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$ 6

Gleichungen für den Aufladevorgang

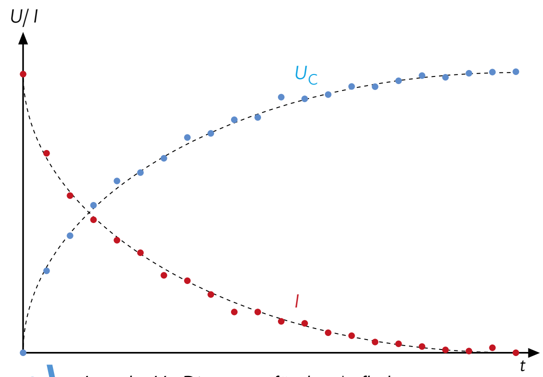
Auf Grundlage der Lösung (5) lassen sich nun die Funktionen aller Größen, die sich beim Aufladen des Kondensators ändern, aufstellen:

$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{mit} \quad Q_0 = C \cdot U_0$$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{mit} \quad I_0 = \frac{U_0}{R}$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Die t-I-Diagramme und t-U_C-Diagramme passen zu den Diagrammen, die in der Auswertung des Schülerexperiments erstellt wurden (vgl. B2 und Seite 37 im Buch). Die mathematische Modellierung des Ladevorgang eines *RC*-Glieds passt also grundsätzlich zu den experimentell gewonnenen Erkenntnissen. Dennoch ist klar, dass man die Modelle nicht mit der Wirklichkeit verwechseln darf: Während sich die *e*-Funktionen mathematisch nur asymptotisch ihren Grenzwerten Q_0, U_C bzw. 0 annähern, werden sie in der Realität tatsächlich erreicht – was aber auch auf die in der Realität begrenzte Messgenauigkeit zurückzuführen ist. Die Modellfunktionen passen also nur eingeschränkt zur Realität.



B2 t-I- und t-U_C-Diagramm für den Aufladevorgang.

Mathematische Modellierung des Entladevorgangs

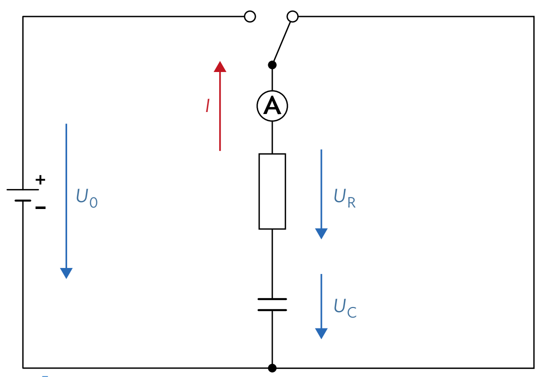
Betrachten wir nun den Entladevorgang des *RC*-Glieds. Dazu wird mit dem Wechselschalter die Spannungsquelle U_0 vom Kondensator getrennt, der sich nun über den Widerstand R entladen kann. Die äußere Spannung ist also null. Gemäß der Maschenregel gilt demnach:

$$\mathbf{0 = U_C + U_R}$$

$$0 = \frac{Q}{C} + RI$$

$$\Leftrightarrow -RI = \frac{1}{C} \cdot Q$$

$$\Leftrightarrow I = -\frac{1}{RC} \cdot Q$$



B3 Schaltplan eines *RC*-Gliedes beim Entladevorgang.

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC} \cdot Q \qquad (7)$$

Lösungsansatz

Für die DGL (7) suchen wir eine Lösung, also die Funktion $\boldsymbol{Q(t)}$, die bis auf den Vorfaktor $\boldsymbol{-\frac{1}{RC}}$ identisch mit ihrer Ableitung ist. Die Lösungsfunktion muss außerdem die beiden Randbedingungen gewährleisten, dass $\boldsymbol{Q(t=0)=Q_0}$ ist, also dass der Kondensator zu Beginn des Entladevorgangs die Maximalladung $\boldsymbol{Q_0}$ trägt, und dass $\boldsymbol{Q(t\to\infty)=0}$ ist, der Kondensator also nach langer Zeit vollständig entladen ist. Wir können hier nun wieder ähnlich wie beim Aufladevorgang vorgehen und über die Randbedingungen die Parameter des allgemeinen Lösungsansatzes $Q(t)=a\cdot e^{bt}+c$ ermitteln. Beim Lösen von Differentialgleichungen ist es aber häufig einfacher, durch einen Vergleich mit ähnlichen physikalischen Problemen einen Lösungsansatz gezielt zu erraten, diesen anschließend durch eine Probe zu überprüfen und dann ggf. nochmal anzupassen. Wir wählen nun folgenden Lösungsansatz von $Q(t)$, da er die Bedingung in Gleichung (7) erfüllt, wie sich schnell nachprüfen lässt:

$$Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (8)$$

Die zeitliche Ableitung von (8) ergibt unmittelbar:

$$\dot{Q}=-\frac{1}{RC}\cdot Q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\dot{Q}=-\frac{U_C}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (9)$$

Lösungsprobe

Wir setzen (9) und (8) in (7) ein, um den Lösungsansatz noch einmal zu überprüfen:

$$\dot{Q}=-\frac{1}{RC}\cdot Q \qquad (7)$$

$$-\frac{U_C}{R}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}=-\frac{1}{RC}\cdot Q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

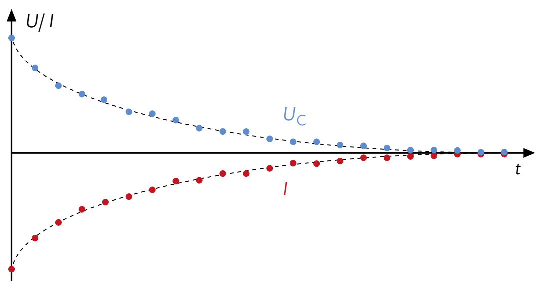
Wegen $U_C=\frac{Q_0}{C}$ stimmt die Gleichung und der Lösungsansatz (8) ist korrekt.

Gleichungen für den Entladevorgang

Nun lassen sich auf Basis von (8) und (9) die Funktionen von $\boldsymbol{Q(t)}$, $\boldsymbol{I(t)}$ und $\boldsymbol{U(t)}$ aufstellen:

$\boldsymbol{Q(t)=Q_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$		mit	$\boldsymbol{Q_0=C\cdot U_0}$
$\boldsymbol{I(t)=-I_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$	(Gleichung (9) vereinfacht)	mit	$\boldsymbol{I_0=\frac{U_C}{R}}$
$\boldsymbol{U_C(t)=\frac{Q(t)}{C}=U_0\cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$			

Nebenstehend sind die t-I- und t-U_C-Diagramme dargestellt. Man sieht, dass die Stromstärke negativ ist, was bedeutet, dass – im Gegensatz zum Aufladevorgang – die Richtung des Stroms umgekehrt ist. Der gesamte theoretisch hergeleitete Verlauf des Graphen entspricht dem experimentell beobachteten Verlauf (vgl. Buch S. 35).



B4 t-I- und t-U_C-Diagramm für den Entladevorgang.

Zeitkonstante τ

Das Produkt $\boldsymbol{\tau=R\cdot C}$ (gesprochen „Tau") wird als **Zeitkonstante** des Ladevorgangs bezeichnet.
Da $\mathbf{1\,\Omega\cdot 1\,F}=\frac{1\,V}{1\,A}\cdot\frac{1\,C}{1\,V}=\frac{1\,C}{1\,A}=\frac{1\,As}{1\,A}=\mathbf{1\,s}$, besitzt $\boldsymbol{\tau}$ die Bedeutung einer Zeitspanne. Innerhalb dieser Zeit sinkt der Ladestrom beim Aufladen auf $e^{-1}\approx 37\,\%$ des Anfangswerts, die Kondensatorspannung steigt in dieser Zeit auf $1-e^{-1}\approx 63\,\%$ des Maximalwerts. Je größer $\boldsymbol{\tau}$ ist, desto länger dauert also der Ladevorgang. Mithilfe der Zeitkonstanten lassen sich alle o.g. Gleichungen vereinfachen, etwa beim Aufladevorgang zu $\boldsymbol{I(t)=I_0\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}}$.

2 Auf- und Entladevorgang bei einem *RC*-Glied

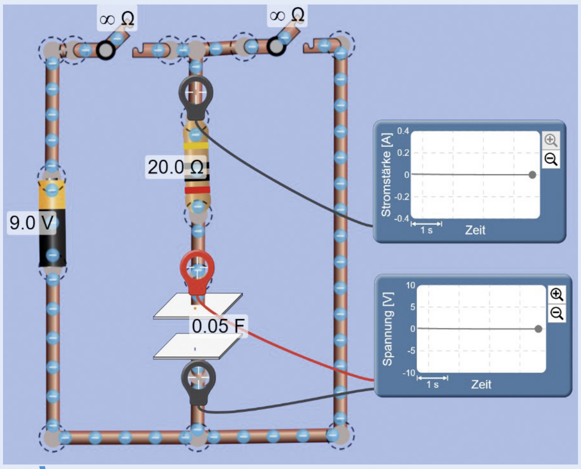
Arbeitsauftrag

1 Erklären Sie das Zustandekommen der unterschiedlich raschen Abnahme der Stromstärke beim Entladevorgang eines Kondensators für unterschiedliche Widerstandswerte. Argumentieren Sie sowohl physikalisch als auch mathematisch.

2 Die Flächen unter den t-I-Kurven des (vollständigen) Auflade- und Entladevorgangs eines Kondensators müssen gleich groß sein. Begründen Sie dies.
Hinweis: Beachten Sie die Methode zur graphischen Integration im Buch auf S. 36.

3 Erstellen Sie unter Verwendung einer Simulation (Beispiel: siehe Mediencode) eine Schaltung für den Ladevorgang eines *RC*-Glieds.
Wenn in der Simulation kein Wechselschalter zur Verfügung steht, nutzen Sie zwei Einzelschalter (vgl. B5). Verwenden Sie die Werte $U_0 = 9{,}0\,\text{V}$, $R = 20\,\Omega$ und $C = 50\,\text{mF}$. Erstellen Sie charakteristische Screenshots der Diagramme beim Aufladen und Entladen des Kondensators. Erklären Sie mögliche Unterschiede zu den Diagrammen, die Sie im Schülerexperiment erstellt haben (vgl. Buch S. 34 ff).

MC 67054-02



B5 Screenshot: Aufbau mit zwei Einzelschaltern.

4 Gegeben ist das gleiche *RC*-Glied wie in Aufgabe 3 mit $U_0 = 9{,}0\,\text{V}$, $R = 20\,\Omega$ und $C = 50\,\text{mF}$.

a) Stellen Sie die vollständigen Gleichungen für $I(t)$ und $U_C(t)$ beim Aufladevorgang auf und berechnen Sie die Strom- und Spannungswerte für die Zeitpunkte $t = 0\,\text{s}$; $0{,}20\,\text{s}$; $2{,}0\,\text{s}$; $20\,\text{s}$.

b) Der Kondensator sei vollständig geladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Entladevorgang und die Stromstärke besitzt den Wert I_0. Berechnen Sie die Zeit, nach der die Stromstärke auf die Hälfte des Werts gefallen ist.

5 Ein geladener Kondensator wird über einen Widerstand mit $R = 10\,\text{k}\Omega$ zum Zeitpunkt $t = 0$ entladen. Folgende Zeit-Stromstärkewerte werden gemessen:

***t* in s**	0	10	20	40	60
***I* in µA**	50	30,3	18,4	6,75	2,5

a) Erstellen Sie ein Diagramm, das den zeitlichen Verlauf der Stromstärke darstellt. Verwenden Sie entweder ein Tabellenkalkulationsprogramm und fügen Sie eine passende Trendlinie mitsamt Formel ein oder zeichnen Sie das Diagramm auf Millimeterpapier oder in großem Format auf gewöhnliches Karopapier.

b) Berechnen Sie unter Verwendung des Diagramms die ursprünglich auf dem Kondensator gespeicherte Ladung. (Kontrollwert: $Q_0 = 1{,}0\,\text{mC}$)

c) Schätzen Sie die Ladung des Kondensators ab, indem Sie die Fläche unter der Kurve des t-I-Diagramms bestimmen. Vergleichen Sie den Wert mit dem in b) berechneten Wert.
- Tabellenkalkulation: Bestimmen Sie die Fläche unter der Kurve, indem Sie einzelne Säulen bilden, deren Fläche Sie berechnen und anschließend addieren (vgl. Buch S. 36).
- Papier: Zählen Sie die Kästchen unter der Kurve.