6 Analogien zwischen Coulomb- und Gravitationsfeld

Ph12 Lernbereich 1: Statische elektrische und magnetische Felder

Die Schülerinnen und Schüler beschreiben Analogien zwischen elektrischen, magnetischen und Gravitationsfeldern. **Sie nutzen die Analogien zwischen elektrischem Feld und Gravitationsfeld insbesondere für die Beschreibung von Kraft, Feldstärke, Energie und Potential für das homogene und das radialsymmetrische Feld.**

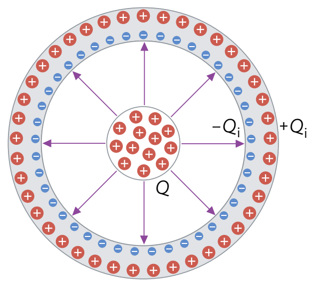
Voraussetzung: Potentielle Energie und Potential (Kapitel 3.1 im Buch)

Energie im elektrischen Feld – Untersuchung eines radialsymmetrischen Feldes (Coulomb-Feld)

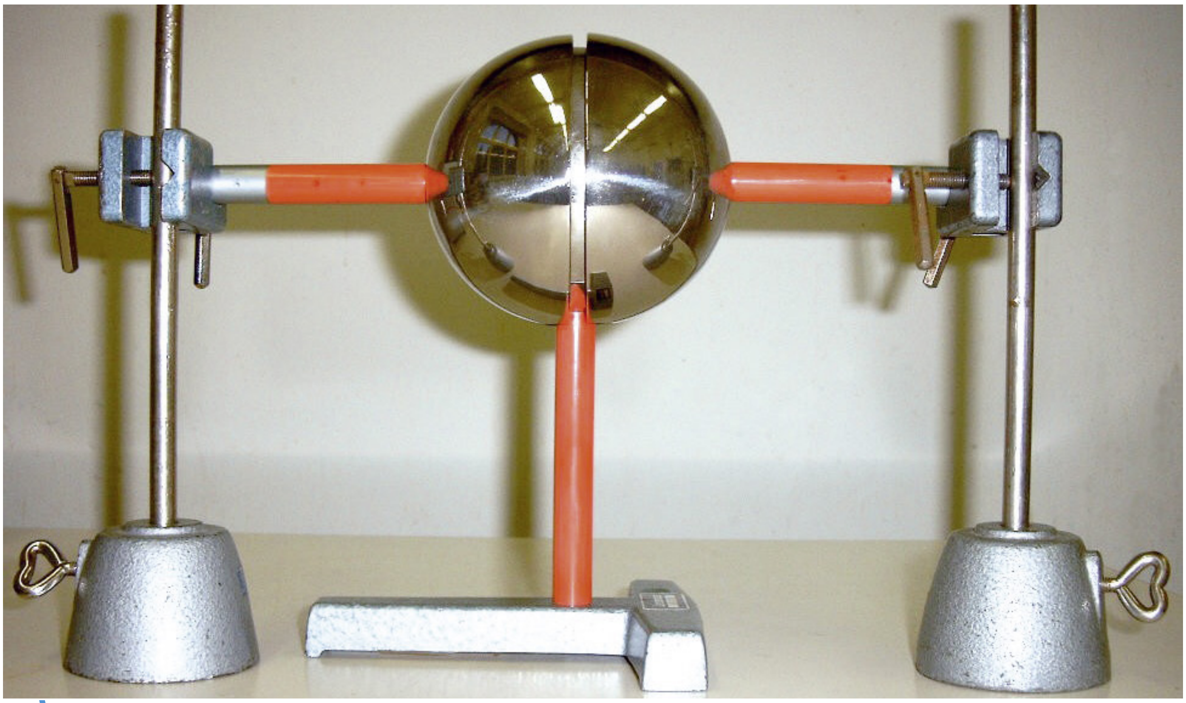
In den beiden Arbeitsblättern AB1 „*Experimente zur Coulombkraft*“ wurde bereits anhand verschiedener Experimente die Kraft und die elektrische Feldstärke in der Umgebung einer geladenen Kugel untersucht. Hier werden die Betrachtungen zum radialsymmetrischen Feld (oder: Coulomb-Feld) einer geladenen Kugel vertieft und die Konsequenzen für die Energie und das Potential diskutiert.

Versuch: Vergrößerung der Kugeloberfläche

Eine felderzeugende Metallkugel wird durch Anschließen an eine Hochspannungsquelle aufgeladen. Dann schiebt man vorsichtig zwei größere, metallene Halbkugeln darüber, sodass sie sich zu einer weiteren Kugel vereinen, die die erste Kugel komplett umschließt (vgl. B2). Die äußere Kugel steht zwar nicht im direkten Kontakt mit der geladenen inneren Kugel und ist dadurch elektrisch neutral, aber aufgrund des elektrischen Feldes der inneren Kugel werden durch Influenz auf der äußeren Kugel Ladungsträger getrennt (vgl. B1).



B1 Ladungsverteilung auf den Kugeln.



B2 Foto des Versuchsaufbaus.

Schlussfolgerungen

Verbindet man die Außenseite der zweiten Kugel mit einem empfindlichen Ladungsmessgerät, so registriert man genau die gleiche Ladungsmenge wie bei einer direkten Messung der inneren Kugel. Aus diesem Ergebnis lassen sich mehrere Schlussfolgerungen ziehen:

1. Das elektrische Feld an der Stelle der äußeren Kugel hängt nur von der Ladungsmenge ab, die auf der inneren Kugel sitzt. Der Durchmesser der inneren Kugel spielt hingegen keine Rolle. Wenn bei Ladungsexperimenten also ausgedehnte Metallkugeln verwendet werden, können diese daher als punktförmig angenommen werden.

2. Betrachtet man den Raum zwischen den beiden Kugeln, so haben wir es hier mit einem Kondensator zu tun. Die eine Platte entspricht dabei der Oberfläche der äußeren Kugel, die andere der der inneren Kugel – der Raum dazwischen ist mit Luft gefüllt (vgl. B1). Die Stärke des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten hängt dabei von der Ladungsmenge auf den beiden Plattenflächen ab. Für eine quantitative Untersuchung führen wir uns noch einmal die Zusammenhänge beim Plattenkondensator vor Augen. Dort gilt (mit $\varepsilon_r(\text{Luft}) = 1$) für das elektrische Feld:
   $$E = \frac{U}{d} = \frac{Q}{C \cdot d} = \frac{d}{\varepsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{Q}{d} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$$
   Dieser Zusammenhang lässt sich so interpretieren, dass das elektrische Feld direkt an einer geladenen Fläche von der sogenannten „Flächenladungsdichte“ $\frac{Q}{A}$ bestimmt wird.
   Übertragen wir diese Betrachtung auf das radialsymmetrische Feld zwischen den beiden Kugeln, so verteilt sich an der äußeren Kugel die Ladung Q auf die Fläche $A = 4\pi r^2$, wobei r hier der Radius der äußeren Kugel ist. Die elektrische Feldstärke ergibt sich analog zum Plattenkondensator:
   $$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Diese Überlegungen bestätigen noch einmal das bereits bei den Experimenten zur Coulombkraft gewonnene Ergebnis. Sie rechtfertigen außerdem die Schreibweise des dortigen Proportionalitätsfaktors als $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Die **elektrische Feldstärke *E* des radialsymmetrischen Feldes** einer Kugel mit Ladung Q ist außerhalb der Kugel unabhängig von deren Radius. Die Feldstärke hängt dort lediglich von der Kugelladung und dem Abstand r zum Kugelmittelpunkt ab:

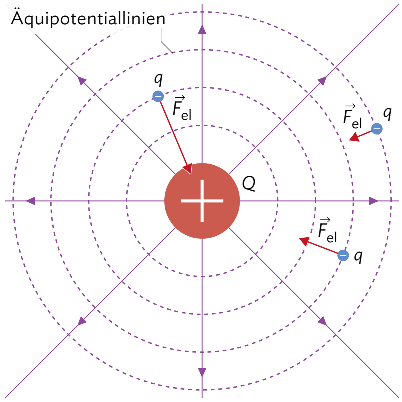
$$\boldsymbol{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$

Das radialsymmetrische elektrische Feld einer Kugelladung ist vergleichbar mit dem von einer Masse hervorgerufenen Gravitationsfeld. Dieses wurde im Nahbereich (homogenes Gravitationsfeld bei geringen Abständen) in der 11. Jahrgangsstufe sowie im Buch der 12. Jahrgangsstufe in Kapitel 3 eingehend untersucht.

Im Folgenden werden Eigenschaften beider Felder einander vergleichend gegenüber gestellt.

Analogien zwischen radialsymmetrischem elektrischen Feld und Gravitationsfeld

radialsymmetrisches elektrisches Feld



Die Abbildung zeigt das radialsymmetrische Feldlinienbild, das durch einen geladenen Körper hervorgerufen wird. Befindet sich im Abstand r von der Ladung Q eine elektrische Probeladung q, so wirkt auf diese eine **Kraft *F***. Ebenso wirkt eine gleich große, umgekehrt gerichtete Kraft von der Probeladung auf den geladenen Körper. Die zwischen den beiden Körpern wirkende Kraft kann anziehend (ungleichnamige Ladungen) oder abstoßend (gleichnamige Ladungen) sein.

Zur Vereinfachung beschreiben wir die beiden Ladungen Q und q als Punktladungen; die Kraft die zwischen diesen beiden Ladungen wirkt, wird durch das **Coulomb-Gesetz** beschrieben:

$$F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Die Kraft ist direkt proportional zum Betrag der Ladungen Q und q und indirekt proportional zum Quadrat des Abstands r zwischen beiden Punktladungen.

Die **elektrische Feldstärke *E*** einer Punktladung Q ist gegeben durch:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Je nach dem Vorzeichen der Ladung zeigt sie radial von der Ladung weg (positive Ladung) oder zur Ladung hin (negative Ladung).

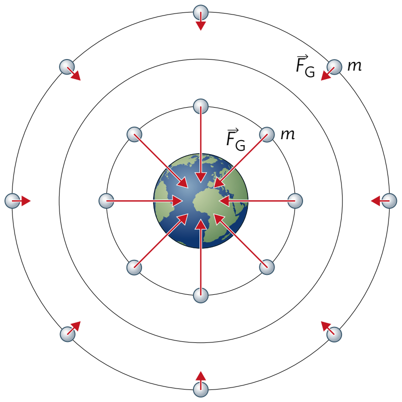
Die potentielle **Energie E_{pot}** einer Ladung q im elektrischen Feld einer Punktladung Q lautet:

$$E_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$$

Das **elektrische Potential φ** im Abstand r von einer Punktladung Q wird angegeben durch:

$$\varphi = \frac{E_{pot}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Gravitationsfeld



Die Abbildung zeigt das Feldlinienbild eines Gravitationsfeldes, in dessen Mittelpunkt sich eine große Masse (Erde) befindet. Befindet sich im Abstand r von der Masse ein weiterer massebehafteter Körper m, wirkt eine anziehende **Kraft *F*** von der Erde auf den Körper. Ebenso wirkt eine gleich große, umgekehrt gerichtete Kraft von dem Körper auf die Erde. Die zwischen den beiden Körpern wirkende Kraft ist immer anziehend!

Die Kraft F zwischen zwei Massen m und M, die zur Vereinfachung als punktförmig angenommen werden dürfen, wird durch das **Gravitationsgesetz** beschrieben:

$$F_G = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Die Kraft ist direkt proportional zur Größe der Massen M und m und indirekt proportional zum Quadrat des Abstands r zwischen beiden Massenmittelpunkten.

Die **Gravitationsfeldstärke *g*** einer Punktmasse M ist gegeben durch:

$$g = G \cdot \frac{M}{r^2}$$

Da die Masse immer positiv ist, zeigt die Gravitationsfeldstärke immer radial zur Masse hin.

Die potentielle **Energie E_{pot}** einer Masse m im Gravitationsfeld einer Punktmasse M lautet:

$$E_{pot} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Das **Gravitationspotential φ** im Abstand r von einer Punktmasse M wird angegeben durch:

$$\varphi = \frac{E_{pot}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r}$$

Herleitung der Formel für die potentielle Energie

Aus Kapitel 3.1 des Buches ist bereits bekannt: Die Änderung der potentiellen Energie ergibt sich aus dem Produkt von Kraft F und Wegstrecke Δs, um die das Objekt (Masse, Ladung, ...) im Feld verschoben wird.

Also: $\Delta E_{pot} = -F \cdot \Delta s \Leftrightarrow F = -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta s}$

Hinweis: Das Vorzeichen ist hier abweichend zum Buch auf S. 40. Dort steckt das Vorzeichen allerdings im Term für die potentielle Energie. Beide Betrachtungen sind daher korrekt.

- *Beispiel Höhenenergie:* Hier ist $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ bzw. $\Delta E_{pot} = -m \cdot g \cdot \Delta s$. Es ergibt sich für die Kraft $F = -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta s} = \frac{m \cdot g \cdot \Delta s}{\Delta s} = m \cdot g$ also der bekannte Ausdruck für die Gewichtskraft.
- *Beispiel potentielle Energie im homogenen elektrischen Feld:* Hier ist $E_{pot} = q \cdot E \cdot s$ bzw. $\Delta E_{pot} = q \cdot E \cdot \Delta s$. Entsprechend gilt für die Kraft $F_{el} = -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta s} = -\frac{q \cdot E \cdot \Delta s}{\Delta s} = -q \cdot E$.

Diese neue Darstellungsweise ist interessant, weil in ihr das Konzept auch auf Situationen erweitert werden kann, in denen die Kraft nicht konstant ist. Dann wird aus dem Differenzenquotienten im Grenzfall der Differentialquotient, d. h. die Ableitung: $F_{el} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} -\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta s} = -\frac{dE_{pot}}{ds}$.

- *Beispiel Spannenergie (vgl. 8. Klasse)*: Falls wir uns im Hookeschen Bereich des Dehnungs-Kraft-Diagramms bewegen, gilt: $F_{Spann} = -D \cdot s$. Dabei ist s die Dehnungsstrecke der Feder und D die Federkonstante.
  Um daraus die Spannenergie E_{Spann} (die der potentiellen Energie E_{pot} entspricht) zu berechnen, betrachten wir wieder den Differentialquotienten: $F_{Spann} = -\frac{dE_{pot}}{ds}$.
  Wir müssen nun also zur Berechnung der Spannenergie einen Term finden, dessen Ableitung die Spannkraft ist. Wie sich leicht überprüfen lässt, lautet die Lösung dazu: $E_{Spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$

Die Aufgabe, die sich in unserem Zusammenhang im radialsymmetrischen Feld stellt, lautet:
Finde einen Term $E_{pot}(r)$, dessen negative Ableitung die Coulombkraft $F(r) = -\frac{dE_{pot}}{dr} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$ ist.
Die Lösung dazu ist: $E_{pot}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r}$; dies lässt sich mathematisch leicht durch Ableiten bestätigen.
Das elektrische Potential hängt mit der potentiellen Energie zusammen durch $\varphi = \frac{E_{pot}}{q}$, also für das radialsymmetrische Feld: $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}$.
Analoge Betrachtungen lassen sich auch für das Gravitationsfeld anstellen. Mit einem Unterschied: Wenn zwei elektrische Ladungen positiv sind, ist die elektrische Kraft abstoßend. Die Gravitationskraft dagegen ist anziehend. Daher lautet der Ansatz bei der Gravitationskraft: $F = +\frac{dE_{pot}}{dr}$.

Zwischen radialsymmetrischem elektrischen Feld einer Punktladung und Gravitationsfeld einer Masse bestehen folgende Gemeinsamkeiten:
- **Kraft:** Beide Kräfte sind umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands und direkt proportional zu den jeweiligen Quellen (Ladungen bzw. Massen).
- **Feldstärke:** Beide Feldstärken nehmen mit dem Quadrat des Abstands ab und sind radialsymmetrisch.
- **Energie:** Die potentielle Energie in beiden Feldern hängt gleichermaßen von der Ladung bzw. Masse der Quelle und dem Abstand ab.
- **Potential:** Beide Potentiale sind umgekehrt proportional zum Abstand von der Quelle, mit einem negativen Vorzeichen im Gravitationsfeld.

Anwendungsbeispiele für radialsymmetrische Felder

Wie oben gezeigt, spielt die Ausdehnung der geladenen Kugel für das elektrische Feld keine Rolle. Dennoch führt die Ausdehnung einer felderzeugenden Kugel bzw. der Probeladungskugel zu nicht vernachlässigbaren Influenzeffekten, wie die Experimente zur Coulombkraft gezeigt haben. Bei Punktladungen treten diese Störeffekte nicht auf. Da das elektrische Feld um eine Punktladung ein klassisches Beispiel für die Anwendung eines radialsymmetrischen Feldes ist, beschränken wir uns auf Anwendungsbeispiele in diesem Kontext. Im elektrischen Feld um eine Punktladung ist die Feldstärke in allen Punkten, die den gleichen Abstand von der Ladung haben, gleich und zeigt radial nach außen. Dieses Prinzip findet Anwendung in vielen Bereichen der Physik und Technik, wie zum Beispiel:

- **Elektrostatische Geräte:** Bei elektrostatischen Generatoren oder Farbspritzpistolen wird die radialsymmetrische Verteilung der elektrischen Feldstärke genutzt, um Partikel gleichmäßig zu verteilen oder anzuziehen.
- **Teilchenbeschleuniger:** In der Teilchenphysik werden radialsymmetrische Felder verwendet, um geladene Teilchen auf kreisförmigen Bahnen zu halten und zu beschleunigen.
- **Medizinische Anwendungen:** In der medizinischen Bildgebung, wie der Magnetresonanztomographie (MRT), spielen radialsymmetrische Felder eine Rolle bei der Erzeugung von Bildern des Körperinneren.

Musteraufgabe 1

Elektrisches Feld einer Punktladung

Gegeben ist eine Punktladung Q im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Erläutern Sie, wie man Betrag und Richtung der elektrischen Feldstärke an einem Punkt $\vec{r}$ im Raum bestimmt.

Lösung

Der Betrag der elektrischen Feldstärke ist definiert über $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

Um auch die Richtung der Feldstärke an einem Punkt im Raum zu bestimmen, erinnern wir uns an das Modell der elektrischen Feldlinien: Diese beschreiben die Stärke und den Verlauf des elektrischen Feldes. Sie verzweigen und schneiden sich nicht und je enger sie nebeneinander liegen, desto stärker ist das elektrische Feld an dieser Stelle. Der Anfang bzw. das Ende elektrischer Feldlinien sind positive (Anfang) bzw. negative (Ende) Ladungen. Anhand dieses Modells lässt sich nachvollziehen, dass das elektrische Feld stets radial von bzw. zu der Punktladung ausgerichtet ist.

Das elektrische Feld ist also radial von der Punktladung weg (bei positiver Ladung) oder zur Punktladung hin (bei negativer Ladung) gerichtet, die Feldstärke nimmt mit dem Quadrat des Abstands ab. Durch Einsetzen konkreter Zahlenwerte kann dann der Betrag der elektrischen Feldstärke an einem Punkt $\vec{r}$ im Raum berechnet werden.

Musteraufgabe 2

Elektrisches Potential einer geladenen Kugel

Eine geladene Kugel mit Radius $R = 2{,}0\,\text{cm}$ hat eine Gesamtladung $Q = 30\,\text{nC}$. Berechnen Sie das elektrische Potential φ an einem Punkt im Abstand $r = 15\,\text{cm}$ außerhalb der Kugel.

Lösung

Das elektrische Potential φ aufgrund einer Punktladung Q in einer Entfernung r ist gegeben durch:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Da die Kugel symmetrisch geladen ist, können wir sie als Punktladung betrachten, wenn wir das Potential außerhalb der Kugel berechnen. Dies bedeutet, dass wir die gesamte Ladung Q im Zentrum der Kugel konzentriert betrachten können.

Für einen Punkt im Abstand von $r = 15$ cm von der Kugeloberfläche, also im Abstand von 17 cm vom Kugelmittelpunkt, ist das Potential φ einer Punktladung mit $Q = 30\,\text{nC}$ daher:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{30\cdot 10^{-9}\,\text{C}}{0{,}17\,\text{m}} = 1{,}6\,\text{kV}$$

Musteraufgabe 3

Potentielle Energie einer geladenen Kugel

a) Eine Probeladung mit $q = 5{,}0\,\text{nC}$ hat in einem bestimmten Abstand r zu einer felderzeugenden Kugel mit $Q = 30\,\text{nC}$ eine potentielle Energie von $E_{\text{pot}} = 24\cdot 10^{-6}\,\text{J}$. Berechnen Sie den Abstand, den die Probeladung vom Mittelpunkt der felderzeugenden Ladung hat.

b) Begründen Sie, dass Sie mit den Angaben die exakte Position der Probeladung nicht bestimmen können.

Lösung

a) Für die potentielle Energie der Probeladung gilt: $E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{Q\cdot q}{r}$. Daraus folgt:

$$r = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{Q\cdot q}{E_{\text{pot}}} = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{30\cdot 10^{-9}\,\text{C}\cdot 5{,}0\cdot 10^{-9}\,\text{C}}{24\cdot 10^{-6}\,\text{J}} = 0{,}056\,\text{m} = 5{,}6\,\text{cm}$$

b) Die Probeladung ist also 5,6 cm vom Mittelpunkt der felderzeugenden Ladung entfernt.
Da das elektrische Feld der felderzeugenden Kugel radialsymmetrisch ist, hat die Probeladung auf einer Kugelfläche mit Radius 5,6 cm rund um die felderzeugende Kugel überall die gleiche potentielle Energie. Die genaue Position auf dieser Kugelfläche kann so also nicht ermittelt werden.

Arbeitsauftrag

1\
a) Zeichnen Sie das elektrische Feld innerhalb und außerhalb einer negativ geladenen Hohlkugel.
b) Erklären Sie den Verlauf der Feldlinien.
c) Diskutieren Sie die Änderungen des elektrischen Feldes, wenn die Ladung positiv wäre.

2\ Berechnen Sie die elektrische Feldstärke E in einer Entfernung von $r = 0{,}10\,\text{m}$ von einer Punktladung mit $Q = 5{,}0\,\text{nC}$.

3*\
a) Beschreiben Sie die Unterschiede und Gemeinsamkeiten des Feldes einer Punktladung und des Feldes einer gleichmäßig geladenen Kugel.
b) Erklären Sie, dass das elektrische Feld außerhalb einer gleichmäßig geladenen Kugel ununterscheidbar zu dem einer Punktladung ist. Diskutieren Sie dann das Verhalten des Feldes innerhalb der Kugel.

4\
a) Berechnen Sie jeweils das elektrische Potential φ in einer Entfernung von $r_1 = 0{,}050\,\text{m}$; $r_2 = 0{,}50\,\text{m}$; $r_3 = 5{,}0\,\text{m}$ von einer Punktladung mit $Q = 90\,\text{nC}$.
b) Vergleichen Sie die berechneten Ergebnisse und geben Sie einen quantitativen Zusammenhang zwischen dem Abstand und dem elektrischen Potential an.

5\ Zwischen dem Coulombschen Gesetz und dem Gravitationsgesetz gibt es viele Gemeinsamkeiten, aber auch ein paar Unterschiede.
a) Vergleichen Sie die Berechnung der Kräfte zwischen zwei Punktladungen und zwei Massen.
b) Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Kräfte von der Entfernung zwischen den Objekten.
c) Vergleichen Sie die Richtungen, in die die Kräfte jeweils wirken (anziehend vs. abstoßend).

6\
a) Berechnen Sie die elektrische Kraft sowie die Gravitationskraft zwischen zwei Elektronen, die sich in einem Abstand von $r = 1{,}0\,\text{nm}$ befinden.
b) Diskutieren Sie das Größenverhältnis der beiden Kräfte. Gehen Sie dabei darauf ein, ob bei elektrischen Situationen, auch im Atom, die Gravitation immer mit berücksichtigt werden muss.

7\ In der Rasterkraftmikroskopie werden winzige Spitzen verwendet, um die Oberflächen von Proben zu untersuchen. Diese Spitzen können elektrisch geladen sein und üben Kräfte auf die Proben aus. Mit einer Spitze mit der Ladung $Q_1 = 2{,}0 \cdot 10^{-12}\,\text{C}$ soll eine Probe in einem Abstand von $r = 0{,}10\,\text{mm}$ mit einer Ladung von $Q_2 = -4{,}0 \cdot 10^{-18}\,\text{C}$ untersucht werden.
a) Berechnen Sie die elektrische Kraft F_{el}, die zwischen der Spitze und der Probe wirkt.
b) Ein Problem, das bei der Verwendung sehr dünner Spitzen auftreten kann, ist das von elektrischen Überschlägen zwischen zwei Bauteilen. Begründen Sie, dass das elektrische Feld in der direkten Umgebung einer dünnen Spitze stärker ist als in der Umgebung einer dickeren „Spitze". Gehen Sie dabei davon aus, dass die Ladungsmenge auf den beiden Spitzen jeweils gleich ist, und modellieren Sie die Spitzen durch Kugelflächen.

8*\ Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen Metallkugeln mit den Radien r_1 und r_2. Die innere Kugel trägt die Ladungsmenge Q.
a) Bestimmen Sie aus der Potentialdifferenz die Spannung U, die zwischen den beiden Metallkugeln besteht, und berechnen Sie dann allgemein die Kapazität $C = \frac{Q}{U}$ dieser Anordnung.
b) Auch eine einzelne Kugel besitzt eine Kapazität. Das Modell aus Aufgabe a) kann dabei verwendet werden, wenn der Radius der äußeren Kugel als unendlich angenommen wird, d. h. im Grenzfall $r_2 \to \infty$. Zeigen Sie, dass die Kapazität einer Kugel vom Radius R gegeben ist durch $C_{\text{Kugel}} = 4\pi\varepsilon_0 \cdot R$.
c) Eine Metallkugel mit Durchmesser 15 cm wird mit einer Hochspannungsquelle ($U = 2{,}5\,\text{kV}$) verbunden. Berechnen Sie die Ladungsmenge, die dabei auf der Oberfläche der Metallkugel sitzt.