8 Schaltvorgänge in einem *RL*-Glied, Zeitkonstante

Ph12 Lernbereich 2: Elektromagnetische Induktion und Schwingungen

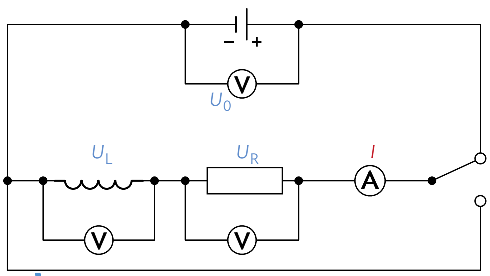
Die Schülerinnen und Schüler **nutzen Differentialgleichungen und ihre Lösungen zur Beschreibung von Ein- und Ausschaltvorgängen bei einer Reihenschaltung aus Spule und Ohmschem Widerstand sowie zur Untersuchung des Einflusses der relevanten Größen.**
Dabei reflektieren sie die Bedeutung von Differentialgleichungen für die Modellierung physikalischer Systeme und die Vorhersage ihres Verhaltens.

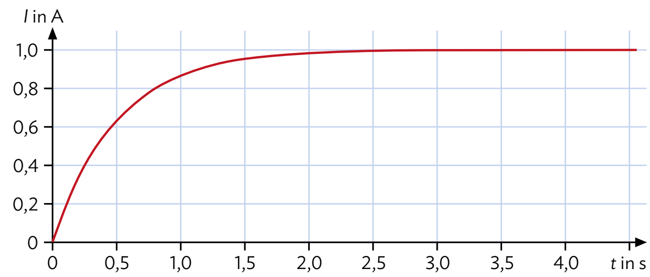
Voraussetzung: EVA: Selbstinduktion (Kapitel 8 im Buch)
AB2 „Auf- und Entladevorgang bei einem *RC*-Glied“

RL-Glied beim Einschaltvorgang

In Kapitel 8.1 des Lehrbuchs werden in Experiment und Simulation der Ein- und Ausschaltvorgang in einem Stromkreis mit einer Spule der Induktivität L und einem Ohmschen Widerstand R untersucht. In Simulationen zu solchen Stromkreisen werden meist ideale Spulen verwendet, die keinerlei Ohmschen Widerstand besitzen (vgl. auch S. 106 im Buch). In der Praxis besitzt jedoch jede Spule aufgrund ihrer Bauart aus gewickeltem Draht einen Ohmschen Widerstand. In der weiteren Beschreibung der Experimente wird der Ohmsche Widerstandsanteil daher sozusagen ausgelagert und in Reihe zur idealen Spule geschaltet.

Dieser Aufbau ist im Schaltbild dargestellt, zusammen mit dem Verlauf der Stromstärke beim Einschalten:





B1 Links: Schaltskizze eines *RL*-Stromkreises beim Einschaltvorgang; rechts: dazugehöriges t-I-Diagramm.

Dass die Stromstärke nicht sofort nach dem Einschalten ihren Maximalwert erreicht, wird in Kapitel 8.2 des Buchs durch die Selbstinduktion erklärt. Es lässt sich folgende Kausalkette formulieren:

- Mit dem Einschalten steigt die Stromstärke I in der Spule an.
- Der Anstieg der Stromstärke führt zum Aufbau des Magnetfeldes, die magnetische Flussdichte B in der Spule nimmt also zu.
- Die Änderung der magnetischen Flussdichte führt zur Entstehung einer Induktionsspannung an der Spule.
- Aufgrund der Energieerhaltung ist die Induktionsspannung so gerichtet, dass sie dem Anstieg der Stromstärke entgegenwirkt – und ihn somit verlangsamt.

Wie schon beim Auf- und Entladevorgang an einem Kondensator (vgl. AB2 *„Auf- und Entladevorgang bei einem RC-Glied“*) ist eine Größe, hier die Induktionsspannung, von der zeitlichen Änderung einer anderen Größe abhängig, hier der magnetischen Flussdichte bzw. der elektrischen Stromstärke. Damit wird also nicht nur ein Zahlenwert als Lösung einer Gleichung gesucht, sondern eine Funktion, die überhaupt erst die Berechnung der zeitlich veränderlichen Werte ermöglicht. Probleme dieser Art lassen sich gut mit dem mathematischen Modell einer **Differentialgleichung** beschreiben. Die zeitlich veränderlichen Funktionen der Stromstärke $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) = \dot{I}(t)$ bzw. der Spannung $U_L(t)$ werden in einer von der Zeit t abhängigen Gleichung in Beziehung zueinander gesetzt.

Aufstellen der Differentialgleichung des Einschaltvorgangs

In einer elektrischen Schaltung gilt für die Gesamtspannung, dass sie der Summe der an den Bauteilen abfallenden Teilspannungen entsprechen muss. In einer Reihenschaltung von R und L gilt demnach bei einer Gesamtspannung von U_0:

$U_0 = U_R + U_L$

Dabei gilt bei zeitlich veränderlicher Stromstärke für die am Ohmschen Widerstand abfallende Spannung $U_R(t) = R \cdot I(t)$. In der Spule wird durch den Strom $I(t)$ eine Induktionsspannung U_{ind} induziert. Diese muss dabei (Energieerhaltung!) dem Betrag der an der Spule abfallenden Spannung entsprechen, also $U_L = |U_{ind}| = L \cdot \dot{I}(t)$. Wir erhalten:

$U_0 = R \cdot I(t) + L \cdot \dot{I}(t)$.

Das ist nun bereits eine Differentialgleichung, in der sowohl die Funktion $I(t)$, als auch ihre zeitliche Ableitung $\dot{I}(t)$ vorkommt. Wir formen diese nun noch etwas um, indem wir zunächst durch R dividieren und dann nach der Stromstärke $I(t)$ umstellen:

$I(t) = -\frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t) + \frac{U_0}{R}$

Der Term $\frac{U_0}{R}$ ist ein konstanter Term und entspricht der Maximalstromstärke $I_0 = \frac{U_0}{R}$, die einige Zeit nach dem Einschaltvorgang letztlich erreicht wird. Wir können daher auch schreiben:

$I(t) = -\frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t) + I_0$ ①

Lösen der Differentialgleichung des Einschaltvorgangs

Die gesuchte Funktion, die den Verlauf des Stromes beschreibt, muss nun neben der Erfüllung der Gleichung ① auch die Anfangs- und Randbedingungen erfüllen: Unmittelbar zu Beginn des Einschaltvorgangs (also bei $t = 0$) muss auch die Stromstärke den Wert Null besitzen:

$I(t = 0) = 0\,\text{A}$.

Neben dieser Anfangsbedingung muss außerdem für sehr große Zeiten (also $t \to \infty$) die Stromstärke gegen den maximalen Wert I_0 streben.

$I(t \to \infty) = \lim\limits_{t \to \infty} I(t) = I_0$

Ähnlich zum *RC*-Glied stellt auch hier eine Exponentialfunktion einen guten Ansatz dar, um diese Differentialgleichung zu lösen:

$I(t) = a \cdot e^{bt} + c$ mit zugehöriger Ableitung $\dot{I}(t) = a \cdot b \cdot e^{bt}$.

Aus der Anfangsbedingung $I(t = 0) = 0\,\text{A}$ folgt aus diesem Ansatz für die Parameter a und c:

$0\,\text{A} = a \cdot e^{b \cdot 0} + c = a + c$

$c = -a$

Mit der Randbedingung $I(t \to \infty) = \lim\limits_{t \to \infty} I(t) = \lim\limits_{t \to \infty} (a \cdot e^{bt} + c) = I_0$ folgt, dass der Parameter $b < 0$ sein muss, da ansonsten der Term $a \cdot e^{bt}$ gegen unendlich streben würde. Damit folgt dann wiederum mit $b < 0$: $I(t \to \infty) = c = I_0$

Mithilfe der Anfangs- und Randbedingung erhalten wir also für die Parameter a, b und c:

$a = -I_0$; $c = I_0$; $b < 0$

Damit lautet der Lösungsansatz nun $I(t) = -I_0 \cdot e^{bt} + I_0$

Die Ableitung lautet dann (Achtung: Kettenregel!) $\dot{I}(t) = -I_0 \cdot b \cdot e^{bt}$

Um den Parameter b zu bestimmen setzen wir $I(t)$ und $\dot{I}(t)$ in ① ein:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= I_0 - \frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t) \\
I_0 - I_0 \cdot e^{bt} &= I_0 - \frac{L}{R}\left(-I_0 \cdot b \cdot e^{bt}\right) \\
I_0 - I_0 \cdot e^{bt} &= I_0 + I_0 \cdot b \cdot e^{bt} \cdot \frac{L}{R} && \mid -I_0 \\
-I_0 \cdot e^{bt} &= \frac{L}{R} \cdot b \cdot I_0 \cdot e^{bt} && \mid : \left(I_0 \cdot e^{bt}\right) \\
-1 &= \frac{L}{R} \cdot b \\
b &= -\frac{R}{L}
\end{aligned}
$$

Die Lösungsfunktion der Differentialgleichung lautet also: $I(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$ ②

Entsprechend gilt für die zeitliche Ableitung: $\dot{I}(t) = I_0 \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = I_0 \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ ③

Differentialgleichung für den **Einschaltvorgang** beim *RL*-Glied:

$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = \frac{U_0}{L}$ bzw. $I(t) = -\frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t) + I_0$

Lösung der Differentialgleichung:

$I(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$ bzw. $\dot{I}(t) = I_0 \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

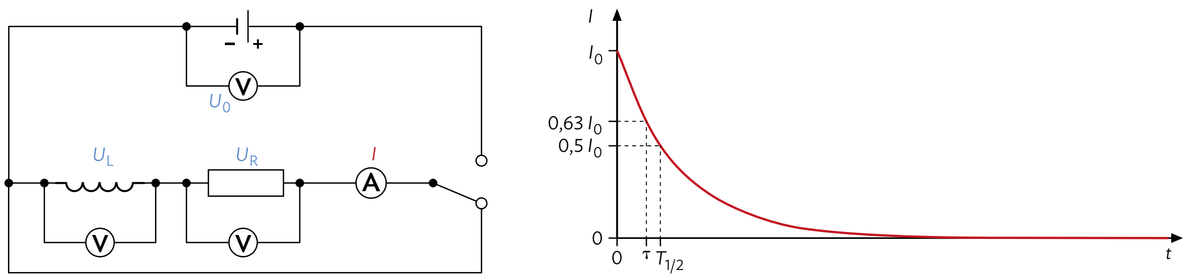
Bedeutung der einzelnen Größen

Wir wollen nun kurz die physikalische Bedeutung der einzelnen Größen in $\boldsymbol{I(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)}$ zusammenfassen:

Größe	Physikalische Bedeutung
$\boldsymbol{I_0 = \frac{U_0}{R}}$	Die durch die angelegte Spannung U_0 und den Ohmschen Widerstand R der Spule begrenzte maximale Stromstärke I_0 nach dem Einschalten.
$\boldsymbol{\frac{R}{L}}$	Der Term hat die Einheit $\frac{1}{s}$ und ergibt im Produkt mit der Zeit t – die in Sekunden angegeben wird – den dimensionslosen Exponenten der Exponentialfunktion.
$\boldsymbol{\frac{L}{R}}$	Der Kehrwert hat entsprechend die Einheit s und wird als **Zeitkonstante τ** bezeichnet. Nach dieser Zeit hat die Stromstärke $I\left(t = \frac{L}{R}\right)$ ca. 63 % der Endstromstärke I_0 erreicht.
$\boldsymbol{T_{1/2} = \ln(2) \cdot \frac{L}{R} \approx 0{,}693 \cdot \frac{L}{R}}$	Halbwertszeit $T_{1/2}$: Nach dieser Zeit ist die Stromstärke $I\left(t = T_{1/2}\right)$ gerade halb so groß wie die Endstromstärke I_0. Die Halbwertszeit steht in Verbindung mit der Zeitkonstante τ.

RL-Glied beim Ausschaltvorgang

Die vorangegangenen Betrachtungen können wir nun auch für den Ausschaltvorgang nutzen. Der prinzipielle Aufbau des Stromkreises sowie der Verlauf der Stromstärke nach dem Ausschalten ist aus Kapitel 8.1 des Buches bekannt:



B2 Links: Schaltskizze eines *RL*-Stromkreises beim Ausschaltvorgang; Rechts: Dazugehöriges *t*-*I*-Diagramm.

Aufstellen der Differentialgleichung des Ausschaltvorgangs

Beim Ausschaltvorgang ist der Stromkreis von der Spannungsquelle getrennt – somit ist $I_0 = 0$. Die Differentialgleichung ① ändert sich dadurch zu:

$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0$ ④

Wir stellen wieder nach $I(t)$ um und erhalten:

$I(t) = -\frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t)$ ⑤

Lösen der Differentialgleichung des Ausschaltvorgangs

Die gesuchte Funktion, die den Verlauf des Stromes beschreibt, muss nun neben der Erfüllung der Gleichung (5) auch die **Anfangs- oder Randbedingung** erfüllen: Unmittelbar zu Beginn des Ausschaltvorgangs (also bei $t = 0$) muss die Stromstärke ihren Maximalwert I_0 besitzen: $I(t = 0) = I_0$.
Die Stromstärke sinkt aufgrund der sich aufbauenden Gegenspannung durch das Ausschalten verzögert auf null ab.

Zur Lösung der Differentialgleichung (5) dient nun der Lösungsansatz $I(t) = I_0 \cdot e^{bt}$ und damit auch $\dot{I}(t) = I_0 \cdot b \cdot e^{bt}$.

Einsetzen in (5) liefert:

$I_0 \cdot e^{bt} = -\frac{L}{R} \cdot I_0 \cdot b \cdot e^{bt}$.

Aus der Gleichheit von linker und rechter Seite ergibt sich, dass $b = -\frac{R}{L}$ gesetzt werden muss. Somit erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung:

$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ (6) bzw. $\dot{I}(t) = -I_0 \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ (7)

So ist auch die Anfangsbedingung erfüllt, dass zu Beginn (für $t = 0$) auch die Stromstärke den Wert I_0 annimmt. Mit fortschreitender Zeit t nähert sich $I(t)$ immer weiter 0 A an.

Differentialgleichung für den **Ausschaltvorgang** beim *RL*-Glied:

$\dot{I}(t) + \frac{R}{L} \cdot I(t) = 0$ bzw. $I(t) = -\frac{L}{R} \cdot \dot{I}(t)$

Lösung der Differentialgleichung:

$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ bzw. $\dot{I}(t) = -I_0 \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

Bedeutung der einzelnen Größen

Wir wollen nun kurz die physikalische Bedeutung der einzelnen Größen in $\boldsymbol{I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$ zusammenfassen:

Größe	Physikalische Bedeutung
$I_0 = \frac{U_0}{R}$	Die durch die angelegte Spannung U_0 und den Ohmschen Widerstand R der Spule begrenzte maximale Stromstärke I_0 vor dem Ausschalten.
$\frac{R}{L}$	Der Term hat die Einheit $\frac{1}{s}$ und ergibt im Produkt mit der Zeit t – die in Sekunden angegeben wird – den dimensionslosen Exponenten der Exponentialfunktion.
$\frac{L}{R}$	Der Kehrwert hat entsprechend die Einheit s und wird als **Zeitkonstante τ** bezeichnet. Nach dieser Zeit beträgt die Stromstärke $I\left(t = \frac{L}{R}\right)$ nur noch ca. 37 % der maximalen Stromstärke I_0.
$T_{1/2} = \ln(2) \cdot \frac{L}{R} \approx 0{,}693 \cdot \frac{L}{R}$	Halbwertszeit $T_{1/2}$: Nach dieser Zeit ist die Stromstärke $I(t = T_{1/2})$ gerade halb so groß wie die maximale Stromstärke I_0. Die Halbwertszeit steht in Verbindung mit der Zeitkonstante τ.

Vorhersagemöglichkeiten der Differentialgleichungen

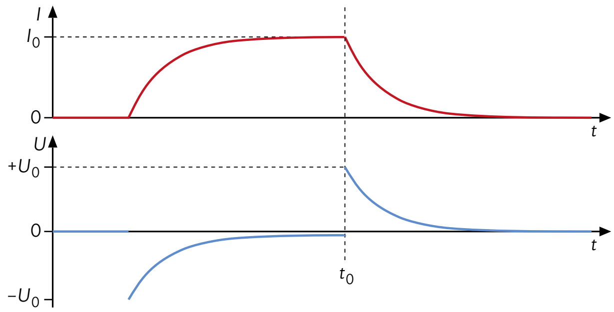
Das Aufstellen der Differentialgleichungen und deren Lösungen für den Ein- und Ausschaltvorgang ermöglichen nun, Vorhersagen über den Verlauf der Stromstärke bzw. Induktionsspannung zu treffen.

Verhalten für $t \to \infty$

Betrachtet man die Stromstärke einige Zeit nach dem Ein- bzw. Ausschalten, gilt:

- *Einschaltvorgang*: $\lim\limits_{t \to \infty} I(t) = \lim\limits_{t \to \infty} I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = I_0 \cdot (1 - 0) = I_0$
- *Ausschaltvorgang*: $\lim\limits_{t \to \infty} I(t) = \lim\limits_{t \to \infty} I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = 0$

Wie zu erwarten, erreicht die Stromstärke nach dem Einschalten dann irgendwann den Maximalwert I_0, nach dem Ausschalten fällt sie irgendwann auf den Wert 0 ab. Dabei muss betont werden, dass die beiden Lösungsfunktionen sich nur asymptotisch dem jeweiligen Wert annähern, ihn streng genommen aber nie erreichen. In der Praxis ist das anders: Die Stromstärke erreicht z. B. nach dem Ausschalten nach einer gewisser Zeit den Wert 0.



B3 Verschiedene gemessene Graphen im Verlauf der Zeit

Verhalten für einen größeren Ohmschen Widerstand *R*

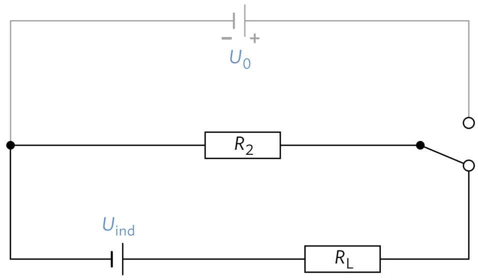
Sofern der Ohmsche Widerstand in dem Stromkreis zunimmt, wird auch der Exponent der *e*-Funktion betragsmäßig größer. Durch das Minuszeichen im Exponenten wird die *e*-Funktion zu entsprechenden Zeitpunkten kleiner. Daraus folgt:

- *Einschaltvorgang*: Die Stromstärke erreicht mit größerem *R* schneller den Wert I_0.
- *Ausschaltvorgang*: Die Stromstärke erreicht mit größerem *R* schneller den Wert 0.

Das lässt sich auch mithilfe der Zeitkonstanten $\frac{L}{R}$ ausdrücken: Je größer *R* ist, desto kleiner wird dann die Zeitkonstante bzw. die Halbwertszeit $T_{1/2} = \ln(2) \cdot \frac{L}{R}$. Dadurch wird also schneller der halbe Wert der Anfangs- bzw. Endstromstärke I_0 erreicht. Außerdem sinkt mit steigendem Widerstand *R* die maximale Stromstärke I_0.

Verhalten der Induktionsspannung U_{ind} beim Ausschaltvorgang

Im realen Stromkreis ist der Ohmsche Widerstand der Spule sehr gering. Um die Stromstärke nach dem Ausschalten dennoch abklingen zu lassen, wird zusätzlich ein Ohmscher Widerstand R_2 in die Schaltung eingebaut (vgl. B4). Die beiden Ohmschen Widerstände sind in Reihe geschaltet und lassen sich zum Ohmschen Gesamtwiderstand $R_{ges} = R_L + R_2$ zusammenfassen.



B4 Schaltskizze für den Ausschaltvorgang mit zwei in Reihe geschalteten Widerständen.

Für die Spannungen gilt in der Reihenschaltung:

$U_{ind}(t) = U_{RL} + U_{R2} = R_L \cdot I(t) + R_2 \cdot I(t) = R_{ges} \cdot I(t)$.

Und damit: $-L \cdot \dot{I}(t) = R_{ges} \cdot I(t)$

$\Leftrightarrow \dot{I}(t) = -\frac{R_{ges} \cdot I(t)}{L}$

Direkt beim Ausschalten, also zum Zeitpunkt $t = 0$, beträgt die Stromstärke in der Spule $I(t=0) = \frac{U_0}{R_L}$.

Daraus folgt:

$\dot{I}(t=0) = -\frac{R_{ges} \cdot I(t=0)}{L} = -\frac{R_{ges} \cdot U_0}{L \cdot R_L} = -\frac{U_0}{L} \cdot \frac{R_{ges}}{R_L}$ bzw. $U_{ind}(t=0) = -L \cdot \dot{I}(t=0) = U_0 \cdot \frac{R_{ges}}{R_L}$

Da der Ohmsche Gesamtwiderstand der Schaltung nun größer ist als der Ohmsche Widerstand der Spule, wird $\frac{R_{ges}}{R_L} > 1$ und damit $U_{ind} > U_0$. Die Induktionsspannung kann also größer werden als die Ausgangsspannung. Je größer der Ohmsche Widerstand R_2 im Vergleich zum Ohmschen Widerstand R_L der Spule ist, desto größer wird auch die Induktionsspannung. So kann es unter Umständen zu sehr großen Induktionsspannungen kommen, die eventuell Bauteile beschädigen.

Wenn in der Schaltung nur die Spule mit ihrem Ohmschen Widerstand ist $(R_{ges} = R_L)$, dann ist direkt beim Ausschalten $U_{ind} = U_0$.

Arbeitsauftrag

1 Überprüfen Sie für den Ein- und den Ausschaltvorgang, dass die jeweilige Lösungsfunktion die entsprechende Randbedingung erfüllt.

2

a) Leiten Sie ausgehend von $I(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$ eine Formel zur Berechnung der Halbwertszeit $T_{1/2}$ her.

b) Zeigen Sie, dass zum Zeitpunkt $t = \frac{L}{R}$ die Stromstärke beim Einschaltvorgang auf ca. 63 % der maximalen Stromstärke I_0 angestiegen ist.

3 Erläutern Sie den Grund zur Nutzung von Differentialgleichungen zur Modellierung vieler physikalischer Systeme. Vergleichen Sie dazu unter anderem die Differentialgleichungen für das *RL*-Glied und die für das *RC*-Glied. Gehen Sie dabei insbesondere auf die physikalischen Größen, deren Abhängigkeiten und die jeweiligen Lösungsfunktionen ein.

4 Verwenden Sie ein Geometrieprogramm, um sich mit den Graphen der folgenden Funktionen vertraut zu machen:

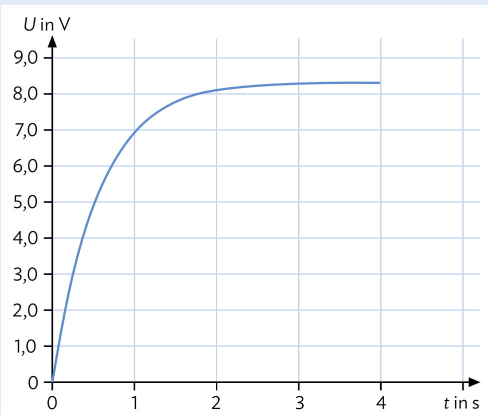
- $f_1(x) = e^x$
- $f_2(x) = e^{-x}$
- $f_3(x) = -e^{-x}$
- $f_4(x) = -ce^{-x}$
- $f_5(x) = -c \cdot e^{-x} + c$

Vergleichen Sie diese mit dem Verlauf der Stromstärke beim Ein- bzw. Ausschaltvorgang. Begründen Sie damit den jeweils bei der Lösung der Differentialgleichung verwendeten Lösungsansatz.

5

a) Ergänzen Sie die Schaltskizze zum Einschaltvorgang aus B1 in Ihrem Heft
- um einen Widerstand R_2, der in Reihe zur Spule geschaltet ist,
- um ein Voltmeter, mit dem man die Spannung an diesem Widerstand messen kann.

b) Mit der Schaltung aus a) wurde das nebenstehende Messdiagramm aufgenommen. Für die verwendeten Bauteile gilt:
$R_2 = 1{,}0\,\text{k}\Omega$; $R_{ges} = 1280\,\Omega$; $L = 630\,\text{H}$.
Zeigen Sie, dass die Maximalstromstärke $I_0 = 0{,}83\,\text{A}$ beträgt und bestimmen Sie den Ohmschen Widerstand R_L der Spule.



B5 *t-U*-Diagramm für den Einschaltvorgang mit zusätzlichem Widerstand R_2.