

9

Differentialgleichung der elektromagnetischen Schwingung im LC-Kreis

Ph12 Lernbereich 2: Elektromagnetische Induktion und Schwingungen

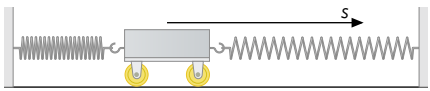
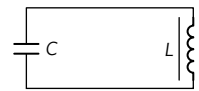
Die Schülerinnen und Schüler erklären für den Idealfall der freien ungedämpften elektromagnetischen Schwingung das Zusammenwirken von Kondensator und Spule im Schwingkreis in Analogie zur mechanischen Schwingung und beschreiben Schwingungsvorgänge mithilfe von Diagrammen. Diese Analogiebetrachtungen setzen sie bei quantitativen Untersuchungen, unter anderem durch Energiebetrachtung und **die Beschreibung mithilfe von Differentialgleichungen, fort und reflektieren die Generalisierbarkeit dieser Modellierungen. Sie erkennen das lineare Kraftgesetz als Bedingung für die Entstehung einer mechanischen harmonischen Schwingung.**

Voraussetzung: Elektromagnetische Schwingungen (Kapitel 10 im Buch)
 AB2 „Auf- und Entladevorgang bei einem RC-Glied“
 AB8 „Schaltvorgänge in einem RL-Glied, Zeitkonstante“

Aufstellen der Differentialgleichungen

Ziel ist es, den elektromagnetischen Schwingkreis mathematisch zu modellieren, sodass alle physikalischen Größen bestimmt werden können. Die Analogie zur mechanischen Schwingung ist hier hilfreich, deswegen werden beide Schwingungssysteme nebeneinander dargestellt:

Differentialgleichung einer freien ungedämpften ...

mechanischen Schwingung	elektromagnetischen Schwingung
	
<p>Die Abbildung zeigt einen Wagen zwischen zwei Federn. Wird der Wagen aus der Ruhelage in s-Richtung ausgelenkt und losgelassen, beginnt eine horizontale Schwingung. Diese Schwingung soll ohne Reibung („ungedämpft“) betrachtet werden.</p> <p>Die Ursache der Bewegung des Wagens ist die rücktreibende Kraft der Federn. Sie ist direkt proportional zur Auslenkung $s(t)$, erhält aber ein Minuszeichen, weil sie entgegen der Auslenkungsrichtung wirkt. Mit einer Proportionalitätskonstanten D ergibt sich damit für eine Spiralfeder im Hookeschen Bereich:</p> $F_{\text{Feder}} = -D \cdot s(t)$ <p>Die rücktreibende Kraft verursacht eine Beschleunigung des Wagens, welche von der Position s des Wagens abhängt. Da sich die Position des Wagens kontinuierlich mit der Zeit t ändert, ändert sich auch die Beschleunigung $a(t)$ kontinuierlich mit der Zeit:</p> $F_{\text{Wagen}} = F_{\text{Feder}}$ $m \cdot a(t) = -D \cdot s(t)$ $m \cdot a(t) + D \cdot s(t) = 0 \quad \text{1a}$	<p>Die Abbildung zeigt einen geladenen Kondensator, der im nächsten Moment über eine Spule entladen wird. Es beginnt eine elektromagnetische Schwingung. Sie soll ohne Energieverlust, also ohne Widerstand („ungedämpft“) betrachtet werden. Außerdem wird der Schwingkreis nicht durch eine zusätzliche Spannungsquelle angetrieben (er ist „frei“).</p> <p>Der durch die Spannung U_C verursachte Strom führt in der Spule zur Induktion einer Spannung. Diese Induktionsspannung ist U_C entgegengerichtet und entspricht im Betrag genau der an der Spule abfallenden Spannung U_L (Energieerhaltung):</p> $U_L = U_{\text{ind}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$ <p>Da die Kondensatorspannung den Strom $I(t)$ verursacht, hängt die Stromstärke vom Wert der Spannung U_C ab. Da keine zusätzliche Spannungsquelle vorhanden ist, muss für die Summe der Teilspannungen U_C und U_L gelten:</p> $U_C + U_L = 0$ $\frac{Q}{C} + L \cdot \frac{dI}{dt} = 0$ $L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = 0 \quad \text{1b}$

9 Differentialgleichung der em-Schwingung im LC-Kreis

Definitionsgemäß gilt:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

In Worten: Die Beschleunigungsfunktion ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitsfunktion.

Außerdem gilt:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

In Worten: Die Geschwindigkeitsfunktion ist die 1. Ableitung der Ortsfunktion.

Somit ergibt sich: $a = \dot{v} = \ddot{s}$. Eingesetzt in (1a):

$$m \cdot \ddot{s} + D \cdot s = 0$$

$$s + \frac{D}{m} \cdot s = 0 \quad (2a)$$

Differentialgleichung der freien ungedämpften mechanischen Schwingung

Definitionsgemäß gilt:

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

In Worten: Die Stromstärkefunktion ist die zeitliche Ableitung der Ladungsfunktion.

Außerdem gilt:

$$j = \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \frac{d^2 Q}{dt^2} = \ddot{Q}$$

In Worten: Die 1. Ableitung der Stromstärkefunktion ist die 2. Ableitung der Ladungsfunktion.

Eingesetzt in (1b) folgt:

$$L \cdot \ddot{Q} + \frac{1}{C} \cdot Q = 0$$

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} \cdot Q = 0 \quad (2b)$$

Differentialgleichung der freien ungedämpften elektromagnetischen Schwingung

Die Gleichungen (2a) und (2b) enthalten die Funktion $s(t)$ bzw. $Q(t)$ und jeweils ihre zweite Ableitung. Man nennt eine solche Gleichung **homogene Differentialgleichung 2. Ordnung**. Wenn man eine Funktion $s(t)$ bzw. $Q(t)$ findet, die eine Lösung für die Differentialgleichung ist, kann man zu jedem Zeitpunkt t die Position s des Wagens bzw. die Ladung Q und Spannung U_C des Kondensators bestimmen – das ist das Ziel.

Lösungsweg

mechanische Schwingung	elektromagnetische Schwingung
Zunächst wird die Differentialgleichung etwas umgeschrieben:	Zunächst wird die Differentialgleichung etwas umgeschrieben:
$\ddot{s} = -\frac{D}{m} \cdot s \quad (3a)$	$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC} \cdot Q \quad (3b)$
Man sieht, dass die zweite Ableitung von s bis auf einen negativen Vorfaktor wieder mit der ursprünglichen Funktion von s übereinstimmen muss. Mathematisch ist dies bei der Sinus- oder Kosinusfunktion der Fall. Für die Differentialgleichung verwenden wir also folgenden	Man sieht, dass die zweite Ableitung von Q bis auf einen negativen Vorfaktor wieder mit der ursprünglichen Funktion von Q übereinstimmen muss. Mathematisch ist dies bei der Sinus- oder Kosinusfunktion der Fall. Für die Differentialgleichung verwenden wir also folgenden
Lösungsansatz: $s(t) = s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4a)$ mit $s_0 \hat{=} \text{Amplitude} \hat{=} \text{maximale Auslenkung}$ Kreisfrequenz $\omega \cdot \text{Zeit } t = \text{Winkel } \varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$	Lösungsansatz: $Q(t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (4b)$ mit $Q_0 \hat{=} \text{Amplitude} \hat{=} \text{maximale Ladung}$ Kreisfrequenz $\omega \cdot \text{Zeit } t = \text{Winkel } \varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot t$

9 Differentialgleichung der em-Schwingung im LC-Kreis

Durch Ableiten nach der Zeit t erhält man:

$$\dot{s} = -\omega \cdot s_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{s} = -\omega^2 \cdot s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (5a)$$

Setzen wir die Gleichungen (4a) und (5a) in die Differentialgleichung (3a) ein, erhalten wir:

$$-\omega^2 \cdot s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\frac{D}{m} \cdot s_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Für jeden Zeitpunkt t gilt demnach:

$$-\omega^2 = -\frac{D}{m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

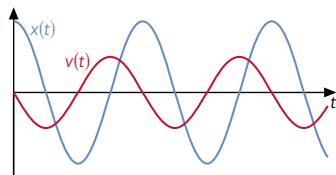
Ausgedrückt für die Periodendauer T bedeutet das:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Mit dieser Formel für die Periodendauer und den Funktionen $s(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ sind die Parameter der Schwingung zu jedem Zeitpunkt bestimmt.

Die Graphen der Funktionen $s(t)$ und $v(t)$ sehen so aus:



Die Kosinusfunktion, bei der der Ort s bzw. die Ladung Q zum Zeitpunkt $t = 0$ maximal ist, entspricht als Ansatz der Ausgangssituation besser als die Sinusfunktion. Man sagt, die **Randbedingung** $s(t = 0) = s_0$ wird nur von der Kosinusfunktion erfüllt.

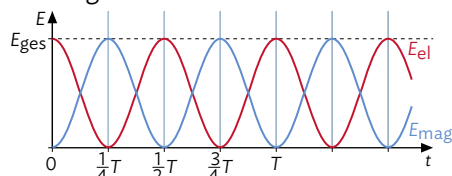
Wenn sich periodisch veränderliche Größen durch Sinus- bzw. Kosinusfunktionen beschreiben lassen, spricht man von einer **harmonischen Schwingung**. Die rücktreibende Kraft auf den schwingenden Körper wird durch ein lineares Kraftgesetz beschrieben ($F = -D \cdot s$), was dazu führt, dass alle zeitabhängigen Zustandsgrößen (s, v, a) sinus- bzw. kosinusartig sind. So lässt sich sagen, dass ein lineares Kraftgesetz die Bedingung für eine harmonische Schwingung ist.

Energieerhaltung bei der elektromagnetischen Schwingung

Mithilfe der Funktionen $Q(t)$ und $I(t)$ lässt sich nun zeigen, dass die Gesamtenergie E_{ges} für jeden Zeitpunkt den gleichen Wert besitzt:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} = E_{\text{el}} + E_{\text{mag}} &= \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q^2 + \frac{1}{2} L \dot{Q}^2 = \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} \underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C} = \text{konstant.} \end{aligned}$$

Im Diagramm führt die Addition beider Energierterme zu einer Funktion mit festem Wert:



B1 t - E -Diagramm mit der elektrischen Energie E_{el} , der magnetischen Energie E_{mag} und der konstanten Gesamtenergie E_{ges} .

Durch Ableiten nach der Zeit t erhält man:

$$\dot{Q} = -\omega \cdot Q_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{Q} = -\omega^2 \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (5b)$$

Setzen wir die Gleichungen (4b) und (5b) in die Differentialgleichung (3b) ein, erhalten wir:

$$-\omega^2 \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = -\frac{1}{LC} \cdot Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Für jeden Zeitpunkt t gilt demnach:

$$-\omega^2 = -\frac{1}{LC}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Ausgedrückt für die Periodendauer T bedeutet das:

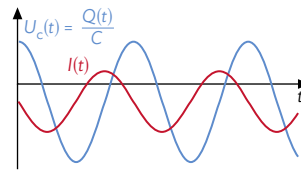
$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

(„Thomson-Formel“)

Mit dieser Formel für die Periodendauer und den Funktionen $Q(t)$ und $I(t)$ sind die Parameter der Schwingung zu jedem Zeitpunkt bestimmt.

Die Graphen der Funktionen $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ und $I(t)$ sehen so aus:



Arbeitsauftrag

- 1 | Die Differentialgleichung (2b) wurde über den Spannungsansatz $U_L = U_C$ gewonnen. Eine alternative Herleitung geht vom Energieansatz aus: $\frac{1}{2}CU^2 + \frac{1}{2}LI^2 = \text{konstant}$.
Leiten Sie diese Gleichung nach der Zeit ab (Kettenregel beachten!) und zeigen Sie, dass das Ergebnis ebenfalls zur Differentialgleichung (2b) führt.

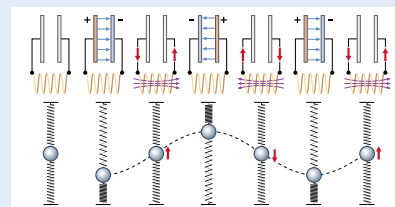
- 2 | Ein idealer Schwingkreis, der aus einem Kondensator mit der Kapazität $C = 44 \text{ pF}$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 3,0 \text{ }\mu\text{H}$ besteht, schwingt ungedämpft. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator vollständig geladen, die Spannung beträgt dann 12 V .
 - a) Berechnen Sie die Periodendauer T . [Kontrollergebnis: $T = 7,2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$]
 - b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Kondensator erstmals vollständig entladen ist. Bestimmen Sie die Stromstärke I zu diesem Zeitpunkt [Kontrollergebnis: $t = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ s}$].
 - c) Zeichnen Sie den zeitlichen Verlauf der Spannung und der Stromstärke innerhalb einer Periodendauer.

- 3 | Eine mechanische Schwingung ist dann harmonisch, wenn die rückstellende Kraft durch ein lineares Kraftgesetz beschrieben wird.
 - a) Begründen Sie dies.
 - b) Suchen Sie Beispiele verschiedener Schwingungen und begründen Sie, ob es sich um harmonische oder nichtharmonische Schwingungen handelt.

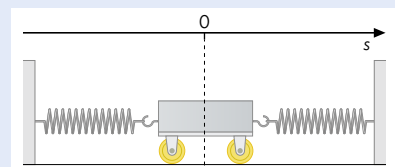
- 4 | Erstellen Sie tabellarisch eine Gegenüberstellung von korrespondierenden Größen der mechanischen und der elektromagnetischen Schwingung. Diskutieren Sie, ob man ausgehend von der Differentialgleichung der freien ungedämpften mechanischen Schwingung eine Differentialgleichung der elektromagnetischen Schwingung aufstellen kann, wenn man sich allein der Analogien zwischen diesen Schwingungssystemen bedient. Entscheiden Sie, ob dieses Verfahren auch für andere Schwingungsarten geeignet ist.

- 5 | Setzen Sie den zeitlichen Verlauf der potentiellen und kinetischen Energie eines vertikalen Federpendels in Beziehung zu den entsprechenden Energiekurven des Schwingkreises (vgl. B2).

- 6 | Ein Wagen ($m = 2,00 \text{ kg}$) bildet mit zwei Federn, die jeweils die Federhärte $D_1 = 16,0 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ besitzen, ein horizontales Pendel. Beide Federn sind $5,0 \text{ cm}$ von der Gleichgewichtslage ausgelenkt. Die nun einsetzende Schwingung sei ungedämpft.
 - a*) Zeigen Sie, dass die Federhärte des Schwingungssystems $D = 2 \cdot D_1$ ist.
 - b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω der Schwingung.
 - c) Stellen Sie die Differentialgleichung auf, die das Schwingungssystem beschreibt und geben Sie eine allgemeine Lösung $s(t)$ an.
 - d) Der Wagen wird nun um $s_0 = 5,0 \text{ cm}$ ausgelenkt und losgelassen. Die Spannenergie wird durch die Funktion $E_{\text{Spann}} = \frac{1}{2}Ds^2$ beschrieben. Zeichnen Sie mithilfe eines digitalen Tools diese Funktion für den Bereich $[0; 2 \text{ s}]$.
 - e) Berechnen Sie die Maximalgeschwindigkeit des Wagens und seine Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0,50 \text{ s}$.
 - f) Geben Sie allgemein die kinetische Energie E_{kin} als Funktion von s an.



B2 Vergleich elektromagnetischer Schwingkreis und Federpendel.



B3 Horizontales Federpendel mit Wagen.