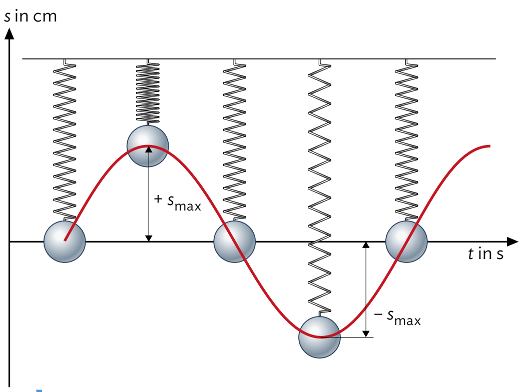
10 EVA: Gedämpfte Schwingung und Abklingverhalten

Ph12 Lernbereich 2: Elektromagentische Induktion und Schwingung

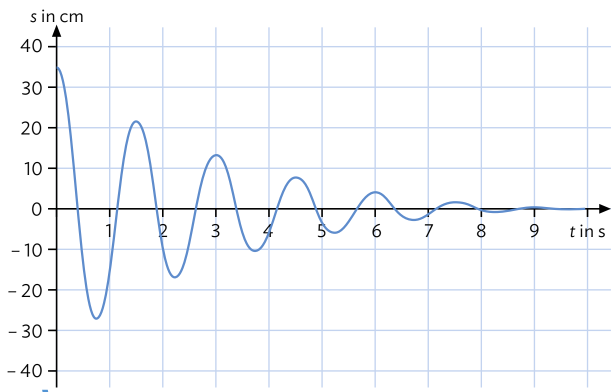
Die Schülerinnen und Schüler **erschließen sich aus Fachtexten die Lösung der Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung für den Fall einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung. Sie erläutern Analogien zwischen mechanischen und elektromagnetischen gedämpften schwingungsfähigen Systemen und den Einfluss der Parameter dieser Systeme auf ihr Verhalten. Sie entnehmen selbst recherchierten Quellen Informationen über eine technische Anwendung der Dämpfung von Schwingungen und erstellen unter Verwendung angemessener Darstellungsformen Informationsmaterial für einen Adressatenkreis mit nicht vertieften physikalischen Kenntnissen.**

Voraussetzung: Elektromagnetische Schwingungen (Kapitel 10 im Buch)
AB9 „Differentialgleichung der elektromagnetischen Schwingung im *LC*-Kreis“

Die gedämpfte mechanische Schwingung



B1 Ungedämpfte Schwingung eines Federpendels.



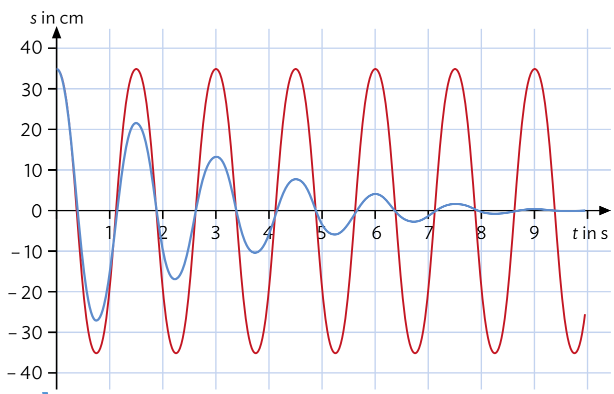
B2 t-s-Diagramm einer realen (gedämpften) Pendelschwingung.

B2 zeigt die Messung einer realen Pendelschwingung. Bereits nach wenigen Schwingungen ist erkennbar, dass die Amplitude aufgrund von Reibung abnimmt.

Die DGL der freien ungedämpften mechanischen Schwingung (vgl. B3) lautet: $\boldsymbol{\ddot{s} + \frac{D}{m} \cdot s = 0}$ (1)

Dabei ist $\ddot{s}$ die zweite Ableitung der Auslenkung s nach der Zeit, was physikalisch einer Beschleunigung entspricht.

Bei der gedämpften Schwingung muss zusätzlich ein Term berücksichtigt werden, der auf die Reibungskraft $F_R = k \cdot v = k \cdot \dot{s}$ zurückzuführen ist, die von der Geschwindigkeit $v = \dot{s}$ der Pendelmasse abhängt. Dabei ist k eine noch zu bestimmende Proportionalitätskonstante.
Wegen $F_R = m \cdot a = m \cdot \ddot{s}$ können wir den Term auch umschreiben zu $\ddot{s} = \frac{k}{m} \cdot \dot{s}$. Diesen Zusatzterm ergänzen wir in der DGL (1) und wir erhalten: $\ddot{s} + \frac{k}{m} \cdot \dot{s} + \frac{D}{m} \cdot s = 0$ (2)



B3 Vergleich ungedämpfte und gedämpfte Schwingung im t-s-Diagramm.

In der Formelsammlung wird vorausgreifend der Term $\frac{k}{m}$ mit dem Abklingkoeffizienten δ bzw. 2δ in Verbindung gebracht.

Arbeitsauftrag (in Gruppenarbeit für alle)

1

a) Recherchieren Sie, unter anderem mithilfe der hinter dem Mediencode hinterlegten Quellen, zum Begriff der viskosen Reibungskraft und begründen Sie, dass damit der Ansatz mit einem Term $F_R = k \cdot v$ gerechtfertigt ist.

b) Leiten Sie ausgehend vom Kraftansatz die modifizierte Differentialgleichung (2) her.

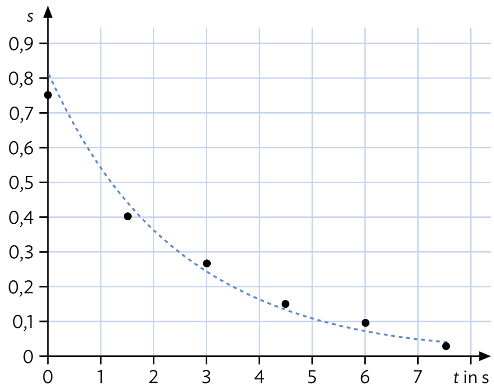
c) Erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Summanden der DGL aus b).

d) Skizzieren Sie ein Diagramm, das nur die Datenpunkte der jeweiligen positiven Maximalauslenkung im zeitlichen Ablauf zeigt. Sie können dazu die Werte der Abbildung B3 verwenden.

e) Verbinden Sie diese Maximalwerte mit einer Linie und interpretieren Sie ihren Verlauf. Stellen Sie eine Vermutung über einen hier zugrundeliegenden Funktionstyp auf.

MC 67054-05

Werden nur die Maximalwerte betrachtet, so erinnert der entstehende Graph beispielsweise an den Funktionsverlauf einer gebrochen-rationalen Funktion oder auch an den einer fallenden Exponentialfunktion (vgl. B4). Hier wird nun der Ansatz mit einer fallenden Exponentialfunktion probiert, um die abnehmende Amplitude zu beschreiben.



B4 Regression durch die Maximalwerte der Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit.

Die Lösung der Differentialgleichung wird also in einer Ergänzung des periodischen Anteils mit einem exponentiell abfallenden Faktor liegen. Je nach Anfangsbedingung wird der periodische Anteil durch einen Sinus- oder Kosinusterm beschrieben, desweiteren wird hier aufgrund der Anfangsbedingung $s(0) = s_{max}$ ein Kosinusterm $s_{max} \cdot \cos(\omega t)$ gewählt. Die Amplitude s_{max} wird dabei von der Anfangsauslenkung bestimmt und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ist mit der Periodendauer T verknüpft.

Der Term des exponentiellen Anteils wird mit $e^{-\delta t}$ angesetzt, wobei das δ wie in der Fachliteratur üblich eine noch zu bestimmende Konstante bezeichnet. Insgesamt ergibt sich als Ansatz für die Lösungsfunktion von (2):

$$\boldsymbol{s(t) = s_{max} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)} \qquad (3)$$

Arbeitsauftrag (in Gruppenarbeit für alle)

2

a) Bilden Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion des Lösungsansatzes. Setzen Sie diese Terme in (2) ein.

b) Klammern Sie geeignet aus und sortieren Sie dabei nach Termen mit $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$.

c) Zeigen Sie, dass mit der Ersetzung $\delta = \frac{k}{2m}$ und $\omega^2 = \frac{D}{m} - \delta^2$ die Faktoren der sin- und cos-Summanden null ergeben.
Hinweis: Sie können dafür auch ein Computer-Algebrasystem verwenden.

d) Prüfen Sie die Gültigkeit der Anfangsbedingung $s(0) = s_{max}$ und erläutern Sie ihre Bedeutung.

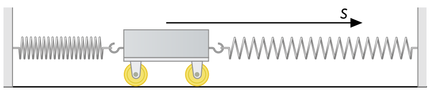
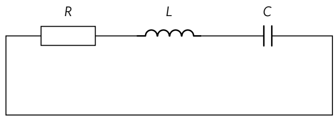
e) Begründen Sie kurz, dass der Ansatz mit einer Kehrwertfunktion nicht erfolgversprechend ist.

3 Erstellen Sie eine Kurzpräsentation für eine repräsentative Auswahl von Werten für k und D. Recherchieren Sie dazu in der Fachliteratur oder im Internet nach der Bedeutung der eingeführten Konstanten s_{max}, δ und ω. Gehen Sie hierbei auch der Frage nach, welche Folge der Fall $\delta = \sqrt{\frac{D}{m}}$ hat. Auf eine tiefer gehende mathematische Begründung sollte hier verzichtet werden.

4 Zeichnen Sie mithilfe eines geeigneten Programms den Graphen der Lösungsfunktion $s(t) = s_{max} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$ für verschiedene Werte von s_{max}, δ und ω. Starten Sie beispielsweise mit $s_{max} = 0{,}8\,\text{m}$; $\delta = 0{,}35\,\text{s}^{-1}$ und $\omega = 6\,\text{s}^{-1}$.
Finden Sie dabei Werte für die Parameter, bei denen die Funktion auf Null abfällt, bevor eine vollständige Schwingung durchgeführt wurde.

Die Differentialgleichung einer freien gedämpften elektromagnetischen Schwingung

Vergleich der freien gedämpften …

mechanischen Schwingung	elektromagnetischen Schwingung
 	
Die DGL der gedämpften Schwingung in der Form $\ddot{s} + \frac{k}{m}\dot{s} + \frac{D}{m}s = 0$ s. o. 2 hat die Lösung $s(t) = s_{max} \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$ s. o. 3	Das Analogon zum mechanischen Energieverlust durch Reibung ist im elektrischen Fall die Umwandlung von elektrischer Energie in innere Energie am Ohmschen Widerstand *R*. Die DGL der elektromagnetischen Schwingung ergänzt um den Widerstandsanteil lautet: $\ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{1}{L \cdot C}Q = 0$

Anmerkung: Die realen elektrischen Bauteile eines Schwingkreises, vor allem die Spule, besitzen einen Widerstand. Wir fassen hier alle elektrischen Widerstände zu einem Widerstand *R* zusammen.

Arbeitsauftrag (in Gruppenarbeit in Paargruppen)

5

a) Wiederholen Sie die Herleitung der Differentialgleichung zur ungedämpften elektromagnetischen Schwingung und ergänzen Sie diese um den Spannungsanteil am Widerstand $U_R = R \cdot I(t)$ mit $I(t) = \dot{Q}(t)$.

b) Begründen Sie in Analogie zur mechanischen Schwingung den Lösungsansatz:
$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)$.
Vergleichen Sie dafür auch die Bedeutung der Parameter s_{max}, *k*, *D* und *m* mit Q_0, *R*, *C* und *L* in den beiden Lösungen.

c) Interpretieren Sie den Term $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, der die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung $\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ mit der der gedämpften Schwingung verbindet.
Erläutern sie außerdem die analoge Situation, die durch den Fall $\delta = \sqrt{\frac{D}{m}}$ bei elektromagnetischen Schwingungen beschrieben wird.

d) Beschreiben Sie das Schwingungsverhalten für einen sehr großen Ohmschen Widerstand *R*.
Auch hier sollte auf eine tiefergehende mathematische Betrachtung verzichtet werden.

Anwendungen der gedämpften Schwingung

In der Praxis treten bei allen mechanischen und elektrischen Schwingungen Energieumwandlungen in innere Energie oder in Form einer anderen Energieabstrahlung nach außen auf. Im Folgenden wird beschrieben, wie Sie eine solche Anwendung darstellen und untersuchen können. Dafür sollen Sie **selbst recherchierten Quellen Informationen über eine technische Anwendung der Dämpfung von Schwingungen entnehmen und unter Verwendung angemessener Darstellungsformen Informationsmaterial für einen Adressatenkreis mit nicht vertieften physikalischen Kenntnissen erstellen**.

Vorgehen zur Darstellung einer Anwendung

selbst recherchierten Quellen Informationen entnehmen Die erste Anlaufstation ist meist das Internet bei der Suche nach verlässlichen Quellen. Artikel aus Fachzeitschriften oder Material von Universitäten geben einen tieferen Einblick, Gespräche mit „Experten" wie beispielsweise einer Musiklehrkraft oder in einer Kfz-Werkstatt bringen den nötigen Praxisbezug.

über eine technische Anwendung Bei den ersten Recherchen werden sich neben den o. g. Beispielen auch unerwartete interessantere Anwendungen ergeben, etwa der Bau von erdbebenfesten Gebäuden in Japan oder der Funktionsweise eines Beschleunigungssensors im Smartphone.

unter Verwendung angemessener Darstellungsformen Von der Infografik, einem Flyer, einem Artikel in der Schülerzeitung, einer Präsentation live oder als Internetauftritt bis hin zu einem Podcastbeitrag ist alles möglich.
Angemessen bezieht sich sowohl auf den zeitlichen Rahmen für die Rezeption der Leser, Zuschauer und Hörer als auch auf das Vorwissen und Interesse derselben.

für einen Adressatenkreis mit nicht vertieften physikalischen Kenntnissen Damit sind Freunde, Mitschüler oder Außenstehende gemeint, die eben keinen vertiefenden Physikkurs besuchen und mit Differentialgleichungen nicht so vertraut sind. Bedenken Sie, dass jede Zielgruppe Ihrer Arbeit ihre eigenen Formate bedingt. Für einen Beitrag zum „Tag des offenen Klassenzimmers" ist eine textlastige Webseite nicht geeignet, hier sind eine fünfminütige Kurzpräsentation mit Live-Experiment oder ein Poster mit Infografiken sinnvoller.

Unabhängig von der Darstellungsform bewährt sich eine Gliederung des Themas.
- In der **Einleitung** mit persönlichem, historischem oder aktuellem Bezug wird die Problemstellung deutlich herausgestellt.
- Im **Hauptteil** werden je nach Darstellung die Erarbeitung oder nur Ihr Ergebnis, das Experiment zur Problemstellung, die wesentlichen Informationen zum Thema aufgezeigt und zusammengefasst.
- Der **Schluss**gedanke greift die Problemstellung der Einleitung nochmals auf und beantwortet diese auch. Hier ist auch Raum für einen weiteren kurzen Ausblick zur nächsten offenen Frage.

Arbeitsauftrag

6 Stellen Sie eine technische Anwendung der Dämpfung von Schwingungen vor. Recherchieren Sie dabei wie oben beschrieben nach geeigneten Informationen und stellen Sie die Anwendung einem Adressatenkreis mit nicht vertieften physikalischen Kenntnissen vor. Sie können dabei frei entscheiden, ob Sie das z. B. in Form eines Aufsatzes oder einer Präsentation machen wollen.
Im Folgenden finden Sie einige Beispiele für mögliche Anwendungen:
Musikinstrumente; Stoßdämpfer; analoge Zeigerinstrumente; erdbebensichere Gebäude; elektromagnetische Schwingkreise in der Radio- und Funktechnik; Klangerzeugung bei einem Synthesizer; Bewegungssensor im Smartphone