13 Spule und Kondensator im Wechselstromkreis

Ph12 Lernbereich 2: Elektromagnetische Induktion und Schwingungen

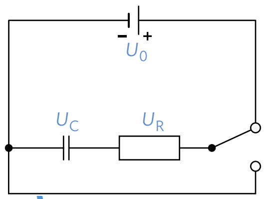
Die Schülerinnen und Schüler **erschließen sich aus differentiellen Zusammenhängen die Amplitudenverhältnisse und Phasenbeziehungen zwischen Spannung und Stromstärke für einen Kondensator und eine Spule im Wechselstromkreis**. Sie beschreiben das Verhalten von *RL*- und *RC*-Gliedern durch Zeigerdiagramme und erläutern anhand dieser Diagramme technische Anwendungen.

Voraussetzung: AB2 „Auf- und Entladevorgang bei einem *RC*-Glied"
AB8 „Schaltvorgänge in einem *RL*-Glied, Zeitkonstante"
EVA: Selbstinduktion (Kapitel 8 im Buch)

Kondensator im Stromkreis

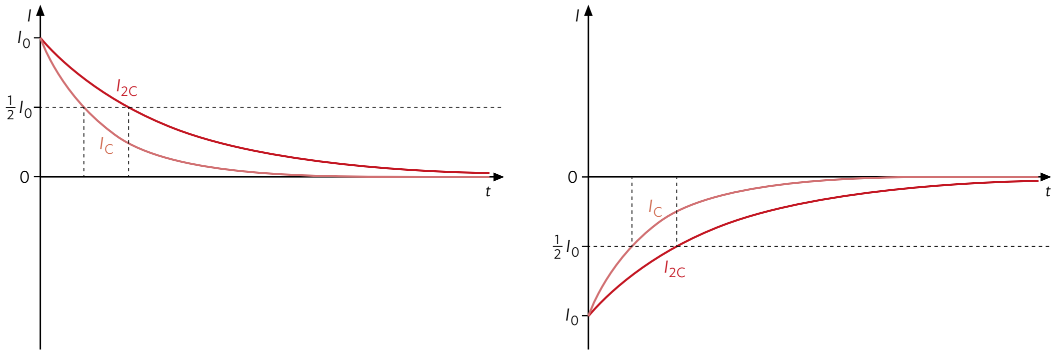
Auf- und Entladevorgang

Im Kapitel 2.3 des Buchs (S. 34 ff.) kann im Schülerexperiment mithilfe der Ladekurve eines Kondensators die Gesamtladung bestimmt werden, die ein Kondensator einer bestimmten Kapazität bei einer bestimmten angelegten Spannung aufnimmt. Dabei lässt sich feststellen, dass beim Anlegen einer Gleichspannungsquelle der Ladestrom zunächst sofort seinen Maximalwert annimmt, dann jedoch rasch bis auf null abnimmt, da die auf dem Kondensator nun bereits befindliche Ladung den Stromfluss hemmt (vgl. Buch S. 37).



B1 Schaltbild zur Ermittlung von Auflade- und Entladekurven.

Die Zeit $T_{1/2}$, bis der halbe Maximalwert I_0 der Stromstärke erreicht ist, hängt mit der Kapazität des Kondensators zusammen (je kleiner diese ist, desto kürzer ist $T_{1/2}$); nicht jedoch mit der Höhe der maximalen Stromstärke I_0. Die folgenden beiden Diagramme stellen den Verlauf der Stromstärke beim Auf- bzw. Entladevorgang eines Kondensators dar:



B2 *t*-*I*-Diagramme für Kondensatoren mit verschiedenen Kapazitäten: Links: Entladevorgang; Rechts: Aufladevorgang.

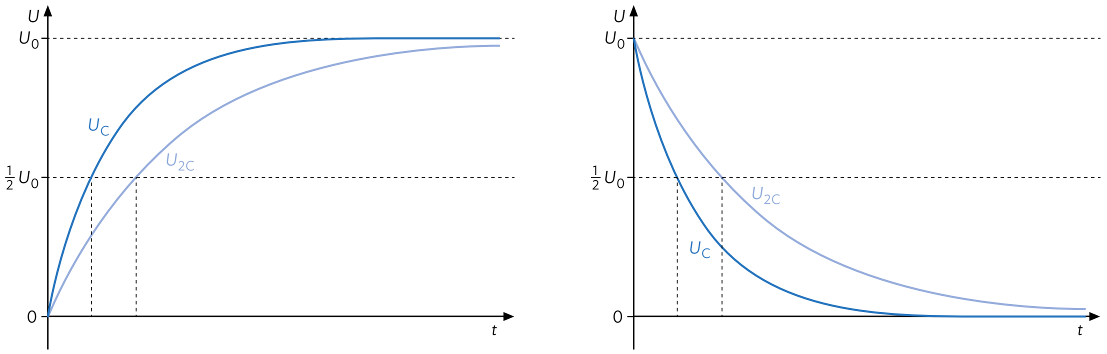
Die oben dargestellten Stromkurven lassen sich mathematisch wie folgt beschreiben (vgl. auch AB2 *„Auf- und Entladevorgang bei einem RC-Glied"*):

- Aufladevorgang: $I_C(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Entladevorgang: $I_C(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = -I_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}} = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

mit Zeitkonstante $\tau = R \cdot C$ bzw. $T_{1/2} = \ln(2) \cdot R \cdot C = \ln(2) \cdot \tau$.

Für die Stromstärke bedeutet das: Je größer die Kapazität des Kondensators ist, desto länger ist der Zeitraum $T_{1/2}$, in dem der Stromfluss über der Hälfte des maximalen Auf- bzw. Entladestroms I_0 liegt. Diese Schlussfolgerung lässt sich mit der direkten Proportionalität von $T_{1/2}$ zu C (und R) begründen.

Analog stellen die folgenden beiden Diagramme den Verlauf der Kondensatorspannung U_C dar:



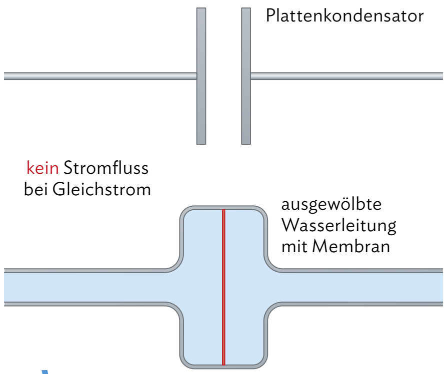
B3 *t*-*U*-Diagramme für Kondensatoren mit verschiedenen Kapazitäten: Links: Aufladevorgang; Rechts: Entladevorgang.

Die oben dargestellten Spannungskurven lassen sich mathematisch wie folgt beschreiben:

- Aufladevorgang: $U_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}}\right) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Entladevorgang: $U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Erklärung des Verhaltens des elektrischen Stroms im Gleichstromkreis

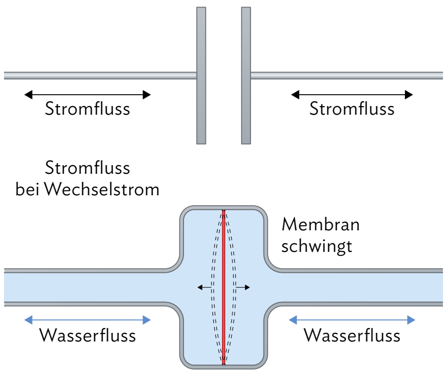
Der oben beschriebene exponentielle Abfall beim Entladevorgang führt im Gleichstromkreis nach einer gewissen Zeit auch bei sehr großen Kapazitäten immer zum Absinken des Stromflusses auf null. Nur direkt nach dem Ein- bzw. Ausschalten fließt im Stromkreis mit Kondensator ein Strom, der je nach Kapazität schneller oder weniger schnell auf null absinkt.
Im Wassermodell, bei dem die Wassertropfen den elektrischen Ladungen entsprechen, kann diese Eigenschaft durch einen Behälter mit einer wasserundurchlässigen, aber dehnbaren Membran dargestellt werden (vgl. B4). Schaltet man die Pumpe ein, fließt durch die Wasserleitung so lange ein Wasserstrom in die eine Seite des Behälters, bis die Membran gespannt ist und der Gegendruck durch die Membran dem Wasserdruck der Pumpe entspricht. Der Wasserstrom kommt nach einer bestimmten Zeit zum Erliegen.



B4 Wassermodell für Gleichstrom.

Erklärung des Verhaltens des elektrischen Stroms im Wechselstromkreis

Würde man nach kurzer Zeit die Polung der Spannungsquelle wechseln, so würde unmittelbar nach der Umpolung wieder zunächst der Maximalwert des Ladestroms erreicht, bevor dieser wieder auf null absinkt.
Im Wassermodell würde die Pumpe regelmäßig die Pumprichtung wechseln, sodass die Membran sich wechselseitig nach rechts bzw. links ausdehnt, wobei jedes Mal etwas Wasser durch die Leitungen hin bzw. her fließt. Bei jedem erneuten Wechsel würde sich der Kondensator also entladen und (teilweise) wieder neu aufladen. Wir können das Verhalten so deuten, dass ein Kondensator im Wechselstromkreis kein absolutes Hindernis in Form eines unendlich hohen Widerstandes darstellt, denn es kann ja ein Wechselstrom fließen!

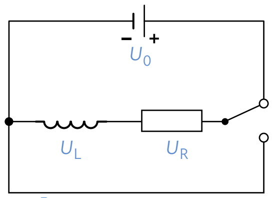


B5 Wassermodell für Wechselstrom.

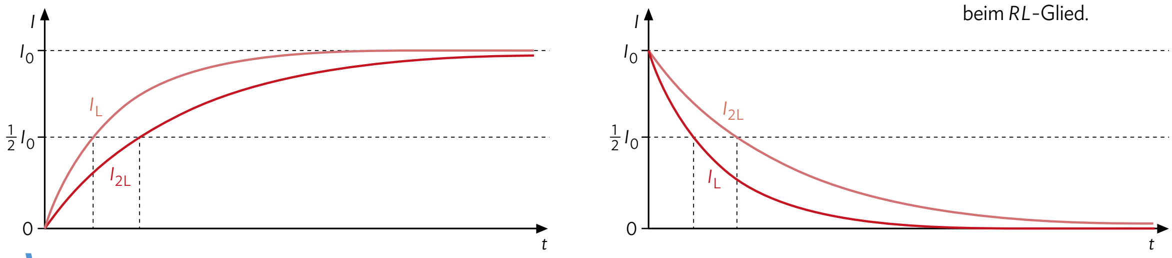
Aufgrund des sich nach jeder Umpolung einstellenden Absinkens des Stromflusses muss der Kondensator jedoch auch in einem Stromkreis mit einer Wechselspannungsquelle einen (endlichen) elektrischen Widerstand haben, einen „kapazitiven Widerstand“ oder allgemein auch „Wechselstromwiderstand“. Dieser Wechselstromwiderstand hängt von der Kapazität des Kondensators und der Frequenz der anliegenden Wechselspannung, also einer äußeren Einflussgröße, ab.

Spule im Stromkreis

Bei einer Spule verhält sich der Stromfluss genau umgekehrt zu dem des Kondensators: Beim Einschalten (Schalterstellung wie in B6) ist der Stromfluss aufgrund der Selbstinduktion am Anfang sehr gering und steigt dann erst langsam auf seinen Maximalwert. Beim Ausschalten (Schalterstellung in B6 ändern) fällt die Stromstärke langsam bis auf den Wert Null ab. Die folgenden Diagramme zeigen dieses Verhalten:



B6 Schaltbild zur Ermittlung von Stromstärkekurven beim *RL*-Glied.



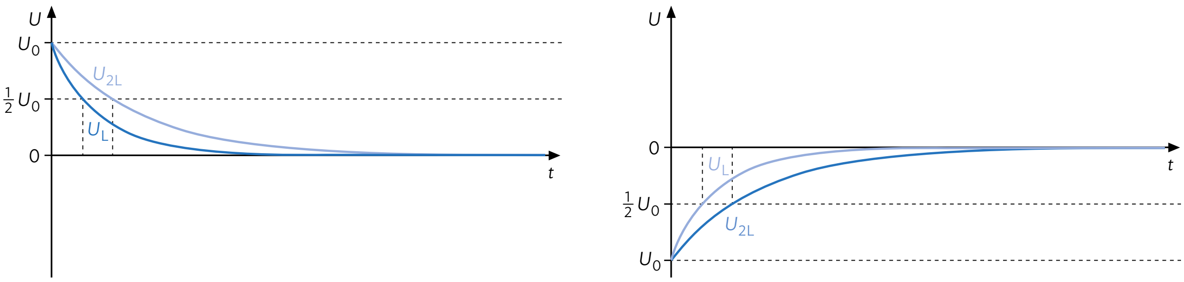
B7 *t*-*I*-Diagramme für Spulen mit verschiedenen Induktivitäten: Links: Einschaltvorgang; Rechts: Ausschaltvorgang.

Die oben dargestellten Stromstärkekurven lassen sich mathematisch wie folgt beschreiben (vgl. auch AB8 *„Schaltvorgänge in einem RL-Glied, Zeitkonstante“*):

- Einschaltvorgang: $I_L(t) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}}\right) = I_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
- Ausschaltvorgang: $I_L(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = I_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}} = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

  mit Zeitkonstante $\tau = \frac{L}{R}$ bzw. $T_{1/2} = \ln(2)\cdot\frac{L}{R} = \ln(2)\cdot\tau$

Hier ist außerdem (analog zum Kondensator) eine Abhängigkeit der Zeit $T_{1/2}$ von der Induktivität dargestellt. Diese ist äquivalent zur Abhängigkeit von der Kapazität beim Kondensator. Je größer die Induktivität der Spule, desto länger ist der Zeitraum, bis der Stromfluss auf die Hälfte des Wertes angestiegen ist, auf dem er sich nach langer Zeit einstellt.



B8 *t*-*U*-Diagramme für Spulen mit verschiedenen Induktivitäten: Links: Einschaltvorgang; Rechts: Ausschaltvorgang.

Analog lässt sich der Verlauf der Spannung darstellen. Die oben dargestellten Spannungskurven lassen sich mathematisch wie folgt beschreiben:

- Einschaltvorgang: $U_L(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = U_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}} = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Ausschaltvorgang: $U_L(t) = -U_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = -U_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)\cdot t}{T_{1/2}}} = -U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

Die Spule stellt also für einen sich aufbauenden Gleichstrom auf lange Sicht kein Hindernis dar, wohl aber einen Widerstand für sich rasch ändernde Stromflüsse. Damit hat die Spule einen induktiven Widerstand, der auch ein „Wechselstromwiderstand“ ist.

Kondensatoren und Spulen besitzen für Wechselspannungen bzw. Wechselströme einen **Wechselstromwiderstand**. Der Wechselstromwiderstand eines Kondensators ist für hohe Frequenzen klein und für niedrige Frequenzen hoch, bei der Spule ist es umgekehrt.
In der Technik wird der Begriff **Impedanz** verwendet, der sich bei realen Bauteilen aus deren Ohmschen Widerstand und deren Wechselstromwiderstand zusammensetzt.

Wechselstromwiderstände

Die beschriebene Eigenschaft von Spulen und Kondensatoren im Wechselstromkreis findet in der Technik zahlreiche Anwendungen. So können Tonsignale unterschiedlicher Frequenzen, die ja in Wechselspannungen umgewandelt werden können, durch einen geeigneten Kondensator bzw. eine Spule im Stromkreis gefiltert werden. Näheres zu diesen „Frequenzfiltern" wird in AB14 *„RL- und RC-Glieder, Frequenzfilter"* behandelt. Zunächst erschließen wir uns jedoch die neue Größe „Wechselstromwiderstand" aus den uns bekannten Zusammenhängen bei Serienschaltungen sowie den Eigenschaften von Kondensator und Spule.

Effektivwerte

In Analogie zum Ohmschen Widerstand soll auch der Wechselstromwiderstand dem Quotienten aus Spannung und Stromstärke entsprechen. Da sich Spannung und Stromstärke bei einer angelegten Wechselspannung jedoch periodisch ändern, hilft uns nur eine mathematische Betrachtung, die den Verlauf der beiden Größen in Beziehung setzt. Bei der Betrachtung der Verläufe zeigt sich, dass die Stromstärke zu bestimmten Zeitpunkten den Wert null annimmt. Würde man für den Wechselstromwiderstand einfach wie gewohnt den Quotienten aus Spannung und Stromstärke bilden, würden jeweils Momentanwerte zu bestimmten Zeiten eingesetzt. Da die Stromstärke immer wieder den Wert null annimmt, ist diese Vorgehensweise nicht zulässig.

Stattdessen rechnet man mit sogenannten Effektivwerten U_{eff} und I_{eff}. Diese entsprechen den Werten von Spannung und Stromstärke, die in einem Gleichstromkreis vorliegen müssten, um die gleiche mittlere Wärmeleistung zu erzeugen. Man kann mathematisch herleiten, dass sich bei ...

- sinusförmiger Wechselspannung $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ die Effektivspannung $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ ergibt.
- sinusförmigem Wechselstrom $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t)$ die Effektivstromstärke $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ergibt.

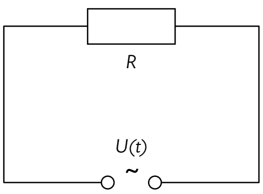
Allgemein wird der **Wechselstromwiderstand *X*** über die Effektivwerte von Spannung und Stromstärke definiert. Für sinusförmige Wechselspannungen/-ströme gilt mit $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ und $I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$:

$$\boldsymbol{X = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{\frac{U_0}{\sqrt{2}}}{\frac{I_0}{\sqrt{2}}} = \frac{U_0}{I_0}}$$

Ohmscher Wechselstromwiderstand X_R

Wir betrachten nun zunächst den Fall, bei dem sich im Wechselstromkreis ein reiner Ohmscher Widerstand befindet. Wie beim Gleichstrom gilt auch hier die Beziehung $I_R(t) = \frac{U_R(t)}{R}$. Liegt dann die Spannung $U_R(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ am Ohmschen Widerstand an, gilt für die Stromstärke:

$$I_R(t) = \frac{U_R(t)}{R} = \frac{U_0}{\frac{R}{I_0}} \cdot \sin(\omega t)$$



B9 Ohmscher Widerstand im Wechselstromkreis.

Der Ohmsche Wechselstromwiderstand ergibt sich dann, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, über die Effektivwerte: $X_R = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = R$.

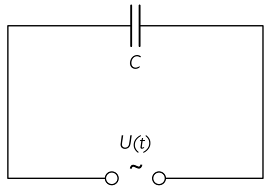
Der Widerstandwert ist also derselbe wie im Gleichstromkreis.

Bei einem rein Ohmschen Widerstand ist der Wechselstromwiderstand unabhängig von der Frequenz der angelegten Spannung: $\boldsymbol{X_R = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = R}$.

Die am Widerstand anliegende Spannung $U_R(t)$ und die Stromstärke $I_R(t)$ sind in Phase, die Phasenverschiebung beträgt also $\boldsymbol{\varphi = 0}$.

Kapazitiver Wechselstromwiderstand X_C

Nun betrachten wir den Wechselstromwiderstand eines Kondensators. Am Kondensator liegt die Spannung $U_C(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ an.



B10 Kondensator im Wechselstromkreis.

Die Ladung $Q_C(t)$ auf dem Kondensator berechnet sich mit:
$Q_C(t) = C \cdot U_C(t) = C \cdot U_0 \cdot \sin(\omega t)$.

Um einen Term für die Stromstärke zu erhalten, leiten wir wegen $I(t) = \dot{Q}(t)$ beide Seiten der Gleichung nach der Zeit ab:
$I_C(t) = \dot{Q}_C(t) = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t)$.

Aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Sinus und Kosinus gilt:
$\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ und somit:

$$I_C(t) = \omega \cdot C \cdot U_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Amplitude $I_0 = \omega \cdot C \cdot U_0$ hängt dabei von der Kapazität des Kondensators und der Frequenz der Wechselspannung ab. Für den kapazitiven Wechselstromwiderstand erhalten wir: $X_C = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C}$.
Ein Vergleich zwischen $U_C(t)$ und $I_C(t)$ zeigt, dass die Stromstärke gegenüber der Spannung um $+90°$ bzw. $+\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist.

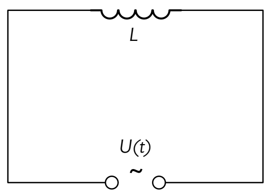
Der Wechselstromwiderstand eines Kondensators nimmt mit zunehmender Frequenz ab:
$\boldsymbol{X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C}}$.

$I_C(t)$ ist um $\boldsymbol{\varphi = +\frac{\pi}{2}}$ gegenüber $U_C(t)$ phasenverschoben.

Am Kondensator eilt der Strom also der Spannung voraus.

Induktiver Wechselstromwiderstand X_L

Als nächstes untersuchen wir einen Wechselstromkreis, indem sich eine Spule mit Induktivität L befindet (vgl. B11). Aus den EVA-Kapiteln zur Selbstinduktion ist bekannt, dass die Selbstinduktionsspannung $U_{ind}(t) = -L \cdot \dot{I}(t)$ der Spule der anliegenden Sinusspannung $U_L(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ entgegengerichtet ist:



B11 Spule im Wechselstromkreis.

$$U_L(t) = -U_{ind}(t)$$

$$U_0 \cdot \sin(\omega t) = -\left(-L \cdot \dot{I}(t)\right) \Leftrightarrow \dot{I}_L(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \sin(\omega t)$$

Gesucht wird nun die Stammfunktion $I_L(t)$. Bei trigonometrischen Funktionen lässt sich diese meist relativ einfach finden; eine Möglichkeit ist:
$I_L(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \left(-\frac{1}{\omega}\right) \cdot \cos(\omega t) = -\frac{1}{\omega L} U_0 \cdot \cos(\omega t)$.
Aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Sinus und Kosinus gilt: $-\cos(\omega t) = \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ und somit:
$I_L(t) = \frac{1}{\omega L} U_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
Die Amplitude $I_0 = \frac{1}{\omega L} U_0$ hängt dabei von der Induktivität der Spule und der Frequenz der Wechselspannung ab. Für den induktiven Wechselstromwiderstand erhalten wir: $X_L = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$.
Ein Vergleich zwischen $U_L(t)$ und $I_L(t)$ zeigt, dass die Stromstärke gegenüber der Spannung um $-90°$ bzw. $-\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist.

Der Wechselstromwiderstand einer Spule nimmt mit zunehmender Frequenz zu:
$\boldsymbol{X_L = \omega L = 2\pi \cdot f \cdot L}$.

$I_L(t)$ ist um $\boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$ gegenüber $U_L(t)$ phasenverschoben.

An der Spule läuft der Strom also der Spannung nach.

Arbeitsauftrag

1 Führen Sie folgende Berechnungen durch, bei denen sich jeweils eine Spule in einem Wechselstromkreis befindet.

a) Eine ans Stromnetz ($f = 50\,\text{Hz}$) angeschlossene ideale Spule hat einen Wechselstromwiderstand von $X_L = 35\,\Omega$. Berechnen Sie ihre Induktivität L.

b) Berechnen Sie den Wechselstromwiderstand X_L einer idealen Spule mit der Induktivität $L = 20\,\text{mH}$, wenn die angeschlossene Spannungsquelle eine Frequenz $f = 1{,}5\,\text{MHz}$ besitzt.

c) Berechnen Sie die Induktivität einer idealen Spule, die von einem sinusförmigen Strom der Frequenz $f = 200\,\text{Hz}$ und Amplitude $I_0 = 16{,}0\,\text{mA}$ durchflossen wird. An der Spule wird dabei eine maximale Spannung von $U_0 = 150\,\text{V}$ gemessen.

2 Im Abschnitt **Induktiver Wechselstromwiderstand X_L** wurde die Stammfunktion von $\dot{I}_L(t) = \frac{U_0}{L} \cdot \sin(\omega t)$ ohne nähere Erklärungen angegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $I_L(t) = -\frac{1}{\omega L} U_0 \cdot \cos(\omega t)$ tatsächlich eine Stammfunktion von $\dot{I}_L(t)$ darstellt.

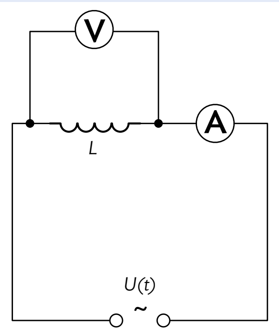
3 **Experiment:** Untersuchen Sie den zeitlichen Verlauf von $U_L(t)$ und $I_L(t)$ bzw. $U_C(t)$ und $I_C(t)$ in den beiden folgenden Schaltungen. Die Spannungsquelle soll eine sinusförmige Wechselspannung von $U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ liefern.

Stellen Sie jeweils den zeitlichen Verlauf von Spannung und Stromstärke mithilfe einer digitalen Messwerterfassung dar und überprüfen Sie die oben hergeleiteten Phasenbeziehungen.

Hinweis: Anstelle der Stromstärkemessung kann auch die Spannung an einem kleinen, in Reihe mit der Spule geschalteten Widerstand gemessen werden und mittels $I = \frac{U}{R}$ in die Stromstärke umgerechnet werden.

a) Eine Spule mit Induktivität L wird in einen Wechselstromkreis angeschlossen (vgl. B12).

b) Ein Kondensator mit Kapazität C wird in einen Wechselstromkreis angeschlossen.



B12 Spule mit Voltmeter und Amperemeter im Wechselstromkreis.