17 Ebene elektromagnetische Wellen

Ph12 Lernbereich 3: Elektromagnetische Wellen

Die Schülerinnen und Schüler **beschreiben die zeitliche und räumliche Entwicklung des elektrischen und des magnetischen Feldes einer ebenen elektromagnetischen Welle mathematisch.**

Voraussetzung: Ausbreitung elektrischer und magnetischer Felder (Kapitel 11.1 im Buch)
Eigenschaften elektromagnetischer Wellen (Kapitel 11.2 im Buch)
AB16 „Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Dipol-Fernbereich“.

Maxwellgleichungen in differentieller Form

Ziel ist es, eine eindimensionale Welle mathematisch mithilfe von Differentialgleichungen beschreiben zu können. Dies wird exemplarisch am Beispiel der elektromagnetischen Welle, welche sich aus einer elektrischen und magnetischen Welle zusammensetzt, aufgezeigt.

Grundlagen der elektromagnetischen Wellen – die Maxwellgleichungen

In AB16 wurden die Maxwellgleichungen allgemein für Felder im dreidimensionalen Raum eingeführt. Hier wollen wir eben verlaufende Wellen betrachten, die sich – der Einfachheit halber – nur entlang der x-Achse ausbreiten. Das elektrische und magnetische Feld zeigt dann entsprechend in y- bzw. in z-Richtung (vgl. AB16, B7) und die Feldstärke hängt jeweils nur von der räumlichen Änderung dx und der zeitlichen Änderung dt ab.
$\frac{dE}{dx}$ ist also beispielsweise die räumliche Änderung des elektrischen Feldes und $\frac{dB}{dt}$ die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes.
Für die weitere Betrachtung benötigen wir nur die 3. und 4. Maxwellgleichung, weshalb wir hier nur diese in der eindimensionalen Form angeben.

3. Maxwellgleichung in eindimensionaler Form

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die räumliche Änderung des elektrischen Feldes entlang der Ausbreitungsrichtung. Die rechte Seite der Gleichung beschreibt die Änderung des magnetischen Feldes mit der Zeit.
Grundsätzlich sagt die Gesamtgleichung aus, dass eine Änderung des magnetischen Feldes ein elektrisches Feld induziert, das entgegen seiner Ursache orientiert ist.

4. Maxwellgleichung in eindimensionaler Form

$$\frac{dB}{dx} = \mu_0 J + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} \overset{J=0}{=} \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt}$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die räumliche Änderung eines magnetischen Feldes entlang der Ausbreitungsrichtung. Die rechte Seite der Gleichung beschreibt, wie dieses erzeugt werden kann: Nämlich sowohl durch die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes $\left(\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt}\right)$ als auch durch Strom in einem Leiter ($\mu_0 \cdot J$). Da wir elektromagnetische Wellen im Vakuum betrachten, treten keine freien Ladungsträger und damit auch keine Leitungsströme auf. Deshalb entfällt der Stromterm $\mu_0 J$.

Wellengleichungen

Wir wollen nun Gleichungen finden, mit denen wir das elektrische Feld und das magnetische Feld in Abhängigkeit von der Ausbreitungsrichtung x und der Zeit t darstellen können. Diese Gleichungen $E(x,t)$ bzw. $B(x,t)$ nennt man Wellengleichungen. Mithilfe der 3. und 4. Maxwellgleichung kann man die Differentialformen der Wellengleichungen herleiten – einmal für das eindimensionale elektrische Feld, einmal für das eindimensionale magnetische Feld. Sie lauten:

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \mu_0\,\varepsilon_0 \cdot \frac{d^2E}{dt^2} \qquad (1)$$

$$\frac{d^2B}{dx^2} = \mu_0\,\varepsilon_0 \cdot \frac{d^2B}{dt^2} \qquad (2)$$

Die allgemeine Wellengleichung stellt die Lösung dieser beiden Differentialgleichungen dar und lautet:

$$\boldsymbol{y(x,t) = y_{max} \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)}$$

$\boldsymbol{y_{max}}$ ist die Amplitude.

Die **Sinusfunktion** modelliert die periodische Schwingung der Wellen.

Würde man die Zeit anhalten, wiederholt sich das Muster nach einer Strecke von $x = \lambda$ und die Sinusfunktion muss wieder den gleichen Wert annehmen – daher der Term $\boldsymbol{2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}}$.

Bliebe man an einem festen Ort, sieht man die Welle vorbeiziehen. Nach einer Zeit $t = T$ ist die Schwingung am gleichen Punkt, daher der Term $\boldsymbol{-2\pi \cdot \frac{t}{T}}$.

Das Minus ist hierbei nötig, damit sich die Welle in positive x-Richtung ausbreitet.

Mit der maximalen elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke als Amplituden, E_0 bzw. B_0, ergeben sich folgende Wellengleichungen:

$$\boldsymbol{E(x,t) = E_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)} \text{ und } \boldsymbol{B(x,t) = B_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)}$$

Die zeitliche und räumliche Entwicklung des elektrischen und des magnetischen Felds einer elektromagnetischen Welle lässt sich mit den folgenden Wellengleichungen beschreiben:

$$\boldsymbol{E(x,t) = E_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)} \text{ und } \boldsymbol{B(x,t) = B_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)}$$

Arbeitsauftrag

1 Im Folgenden sollen die Wellengleichungen für das elektrische Feld genutzt werden, um daraus eine fundamentale Aussage über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen abzuleiten.

a) Führen Sie die Ableitungen für die Wellengleichung $E(x,t)$ durch, die in Gleichung (1) auftreten.

b) Setzen Sie Ihre Ergebnisse aus a) nun in Gleichung (1) ein. Vereinfachen Sie die Gleichung soweit wie möglich.

c) Beschreiben Sie, welche grundlegende physikalische Erkenntnis sich aus der Vereinfachung ergibt und was die Maxwell-Gleichungen somit ergeben.

d) Berechnen Sie aus Ihren Lösungen von Aufgabe 1b) und c) den Wert für die zentrale Größe dieser fundamentalen Aussage.

2 Zwei elektromagnetische Wellen sind durch ihren elektrischen Anteil wie folgt gegeben:

$E_1(x,t) = E_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right)$ und $E_2(x,t) = E_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right)$

a) Zeigen Sie, dass für die resultierende Welle gilt: $E_{res} = 2\,E_0 \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \cdot \cos\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T}\right)\right)$

Hinweis: Nutzen Sie die trigonometrische Identität zur Addition von Sinusfunktionen:

$\sin(A) + \sin(B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

b) Beschreiben Sie die Ausbreitung der resultierenden Welle und weitere Eigenschaften.

c) Zeichnen Sie den Verlauf der beiden Wellen, sowie der resultierenden Welle in separaten Diagrammen. Zeichnen Sie Ihre Eigenschaften aus Aufgabe 2b) in das Diagramm der resultierenden Welle ein.