

19

Interferenz am Doppelspalt

Ph12 Lernbereich 3: Elektromagnetische Wellen

Die Schülerinnen und Schüler **reflektieren bei der Betrachtung der Interferenz von Licht am Doppelspalt verwendete Annahmen und Näherungen und erläutern Abweichungen der experimentellen Beobachtungen von der mathematischen Modellierung**. Sie identifizieren Licht als sichtbaren Teil des elektromagnetischen Spektrums und reflektieren die Generalisierbarkeit theoretischer Überlegungen.

Sie erklären die Kohärenzbedingungen zur Beobachtung von Interferenzeffekten und erläutern die Bedeutung von Interferenzexperimenten zum Nachweis der Welleneigenschaft und zur Bestimmung von Wellenlängen.

Voraussetzung: Interferenz am Doppelspalt (Kapitel 12.2 im Buch)

Vergleich zwischen Theorie und Experiment beim Doppelspalt

Mathematische Modellierung des Doppelspaltexperiments

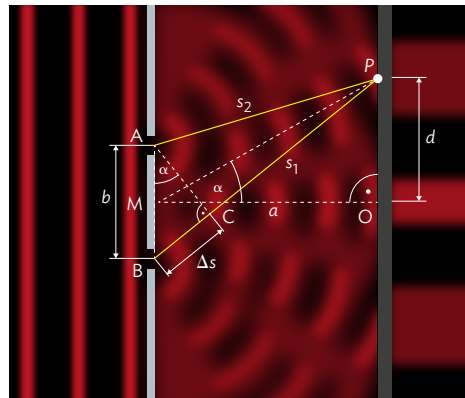
Die theoretischen Überlegungen zum Doppelspaltexperiment mit Licht werden im Buch auf der S.168 verkürzt dargestellt. Wir wollen diese Herleitung nun nochmal genauer ausführen, um alle Stellen zu identifizieren, an denen Näherungen vorgenommen wurden.

Die **erste Näherung** lässt sich gut anhand von B1 veranschaulichen: Auf dem Schirm befinden sich die Interferenzmaxima alle in der gleichen Ebene, der Schirm wird durch eine vertikale Gerade dargestellt. Tatsächlich sieht man aber, dass die Wellenfronten, die auf den Schirm treffen, auf einem Bogen liegen. Nimmt man an, dass das zentrale Maximum genau auf dem Schirm liegt, würden die Maxima höherer Ordnung schon etwas weiter vor dem Schirm auftreten. Für eine exakte Darstellung müsste der Schirm also leicht gekrümmt sein. Geht man aber davon aus, dass der Schirm weit vom Doppelspalt entfernt ist, können die Bögen der Wellenfronten als Geraden angenähert werden. Genauer: Der Abstand a des Schirms muss sehr viel größer sein als der Spaltmittenabstand b , also: $a \gg b$.

Aufgrund dieser Näherung kann dann das Dreieck MOP gebildet werden, das bei O einen rechten Winkel hat und bei M den Winkel α , der auch im Dreieck ABC in A auftaucht. Dies kann man sich anhand der Stufenwinkel in B und P und anhand des Innenwinkelsatzes klarmachen. Im Dreieck MOP ergibt sich nach der Definition des Tangens für rechtwinklige Dreiecke folgende Beziehung: $\tan(\alpha) = \frac{d}{a}$.

Die **zweite Näherung** ist auch schon implizit in B1 vorgenommen worden: Das Dreieck ABC wird dort als rechtwinkliges Dreieck dargestellt, was aber nicht ganz richtig ist. Der Gangunterschied Δs ergibt sich eigentlich, indem man einen Kreis mit Mittelpunkt P und Radius \overline{PA} zeichnet. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit \overline{PB} wäre dann der Punkt C . Zeichnet man von dort dann aber eine Senkrechte, schneidet diese nicht den Punkt A (vgl. Aufgabe 1). Wenn man allerdings, wie zuvor auch, annimmt, dass $a \gg b$ ist, dann kann näherungsweise davon ausgegangen werden, dass an Punkt C ein rechter Winkel ist.

Weil aufgrund der zweiten Näherung das Dreieck ABC rechtwinklig ist, ergibt sich dann nach der Definition des Sinus für rechtwinklige Dreiecke: $\sin(\alpha) = \frac{\Delta s}{b}$.



B1 Geometrische Betrachtungen beim Doppelspalt.

19 Interferenz am Doppelspalt

Mithilfe einer **dritten Näherung** können die beiden gefundenen Beziehungen nun miteinander verknüpft werden. Hierbei wird angenommen, dass der Winkel α sehr klein ist, wobei damit meist Winkel gemeint sind, die kleiner sind als 10° . In dem Fall kann die Kleinwinkelnäherung durchgeführt werden, die besagt, dass $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha)$ ist. In der Tabelle wird ein Vergleich zwischen dem Sinus und dem Tangens verschiedener Winkel angestellt, der die Kleinwinkelnäherung rechtfertigt.

α	1°	5°	10°	15°	20°
$\sin(\alpha)$	0,017452	0,087156	0,173648	0,258819	0,342020
$\tan(\alpha)$	0,017455	0,087489	0,176327	0,267949	0,363970

Führt man die Kleinwinkelnäherung durch, folgt dann:

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha)$$

$$\frac{\Delta s}{b} = \frac{d}{a}$$

$$\Rightarrow \Delta s = d \cdot \frac{b}{a}$$

Daraus folgen dann die bekannten Interferenzbedingungen am Doppelspalt:

Interferenzmaxima bilden sich, wenn die Wellen konstruktiv miteinander interferieren, also wenn gilt:

$$\Delta s = k \cdot \lambda \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots$$

Und somit folgt für die Wellenlänge¹: $\lambda = \frac{d \cdot b}{k \cdot a}$.

Interferenzminima bilden sich, wenn die Wellen destruktiv miteinander interferieren, also wenn gilt:

$$\Delta s = (2k - 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Und somit folgt für die Wellenlänge: $\lambda = \frac{2 \cdot d \cdot b}{(2k - 1) \cdot a}$.

Bei der mathematischen Beschreibung des Doppelspaltexperiments werden drei Näherungen vorgenommen:

1. Die Bögen der Wellenfronten lassen sich als Geraden annähern (was für $a \gg b$ der Fall ist).
2. Am Punkt **C** liegt ein rechter Winkel an (was für $a \gg b$ der Fall ist).
3. Der Winkel α ist kleiner als 10° .

Dann ergeben sich folgende Beziehungen für konstruktive und destruktive Interferenz:

konstruktive Interferenz: $\lambda = \frac{d \cdot b}{k \cdot a}$ mit $k = 1, 2, \dots$

destruktive Interferenz: $\lambda = \frac{2 \cdot d \cdot b}{(2k - 1) \cdot a}$ mit $k = 1, 2, \dots$

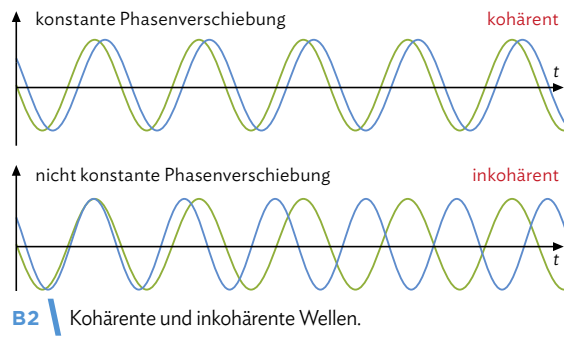
Mögliche Unsicherheiten im Experiment

Soll die Wellenlänge einer Lichtquelle mithilfe des Doppelspaltexperiments bestimmt werden, so müssen im Rahmen der theoretischen Modellierung die Größen d , b und a gemessen werden (vgl. B1 und Merkkasten oben). Diese sind dann mit gewissen Messunsicherheiten behaftet, weshalb auch hierdurch Abweichungen zwischen Experiment und Theorie entstehen können.

¹ Die Bedingung für konstruktive Interferenz ist zwar für $k = 0$ (= kein Gangunterschied) erfüllt, für die Berechnung der Wellenlänge ist $k = 0$ aber ausgeschlossen.

Kohärenzbedingungen bei Interferenzeffekten

Bei den Betrachtungen am Doppelspalt wird für die Entstehung von Minima bzw. Maxima der Gangunterschied betrachtet. Wenn die Wellen in Phase sind, verstärken sie sich maximal und es entstehen Interferenzmaxima. Verlaufen sie gegenphasig, löschen sie sich vollständig aus und es entstehen Minima. Damit das auch wirklich dauerhaft und nicht nur zu einem bestimmten Zeitpunkt der Fall ist, darf sich die Phasenbeziehung zwischen den Wellen nicht verändern – man spricht hierbei von Kohärenz (die Wellen müssen also kohärent zueinander sein).



Wellen sind nicht automatisch kohärent zueinander. Die Quellen müssen gezielt so gewählt bzw. konstruiert werden, dass sie entweder zeitlich oder räumlich kohärent sind.

Zeitliche Kohärenz

Eine LED gibt kein zeitlich kohärentes Licht ab: Man kann sich das Aussenden der Lichtwellen wie bei einem Oszillator vorstellen, der ständig und willkürlich seine Phase verändert. Für kurze Zeiträume kann eine Welle dann zwar als sinusförmige Welle beschrieben werden – bis sie dann wieder ihre Phase willkürlich ändert. Die Zeiträume zwischen der Phasenänderung bezeichnet man als Kohärenzzeit τ_c . Laser sind dagegen grundsätzlich so konstruiert, dass sie kohärentes Licht abgeben. Die von den Atomen abgestrahlten Lichtwellen haben alle (nahezu) die selbe Wellenlänge. Durch Temperaturschwankungen, Vibrationen etc. kann sich die Wellenlänge aber auch mit der Zeit ändern – auch bei Laserlicht ist die Kohärenzzeit also endlich.

Die Strecke, die eine bestimmte Welle während der Kohärenzzeit zurücklegt, bezeichnet man als Kohärenzlänge L_c . Es gilt der folgende Zusammenhang: $L_c = \tau_c \cdot c$

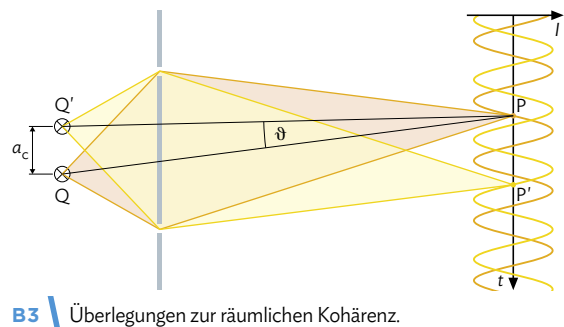
Es können nur dann Interferenzmaxima und -minima auftreten, wenn der Gangunterschied zwischen zwei Wellen kleiner ist als die Kohärenzlänge. Dadurch treten ab einem bestimmten Gangunterschied keine erkennbaren Maxima mehr auf. Die Ordnung k , bei der das der Fall ist, ergibt sich aus:

$$\Delta s < L_c$$

$$\Rightarrow k \cdot \lambda < L_c$$

Räumliche Kohärenz

Beim Doppelspaltversuch wird immer angenommen, dass sich die Elementarwellen vom Spalt ausgehend alle in die gleiche Richtung ausbreiten. In der Praxis treffen die Wellen des Laserlichts aber in unterschiedlichen Winkeln auf den Spalt, da der Laser keine punktförmige Lichtquelle darstellt, die parallele Lichtbündel ausstrahlt. In B3 wird die Situation vereinfacht dargestellt, indem der Laser in Form zweier Quellen dargestellt wird, die die äußeren Ränder der räumlich ausgedehnten Lichtquelle symbolisieren. Jede dieser Quellen erzeugt dann ihr eigenes Interferenzbild auf dem Schirm. Es entstehen dann also zwei Interferenzbilder, die sich wieder gegenseitig überlagern. Je nachdem, wie weit die beiden Quellen auseinanderliegen (dargestellt durch den Abstand a_c) und welchen Winkel ϑ die Strahlen zueinander beim Auftreffen auf den Schirm bilden, lassen sich trotzdem noch Interferenzmaxima und -minima erkennen. Die Bedingung für diese räumliche Kohärenz lautet: $a_c \cdot \sin(\vartheta) < \lambda$



In der Praxis kann nur dann ein Interferenzbild beim Doppelspaltexperiment beobachtet werden, wenn sowohl die Bedingung für zeitliche als auch räumliche Kohärenz erfüllt wird.

Bedeutung von Interferenzexperimenten

Interferenzexperimente nehmen in der Physik eine wichtige Rolle ein – sowohl im historischen als auch im modernen Kontext.

Das Doppelspaltexperiment kann sowohl mit Laserlicht als auch mit (elektromagnetischen) Mikrowellen durchgeführt werden. In beiden Fällen können sehr ähnliche Interferenzmuster gemessen werden, die sich mit dem Wellenmodell physikalisch erklären lassen. Historisch gesehen hat das Doppelspaltexperiment also unter Beweis gestellt, dass Licht Teil des elektromagnetischen Spektrums ist und auf die gleiche Art physikalisch beschrieben werden kann.

Anhand der weiter oben beschriebenen Interferenzbedingungen beim Doppelspaltversuch kann zudem die Wellenlänge der verwendeten elektromagnetischen Welle berechnet werden. Generell lassen sich bei Interferenzexperimenten Wellenlängen mit sehr hoher Genauigkeit bestimmen, was zum Beispiel bei sogenannten Interferometern wie dem Michelson-Interferometer genutzt wird.

Auch in weiteren technischen Anwendungen spielt die Interferenz eine Rolle. So kann in der Materialanalyse mithilfe der Bragg-Bedingung anhand des Interferenzmusters auf die Beschaffenheit des Materials geschlossen werden.

Arbeitsauftrag

1 |

- Zeigen Sie, dass die **zweite Näherung** nur für $a \gg b$ gilt. Führen Sie dazu die beschriebenen geometrischen Schritte durch. Begründen Sie, dass das Dreieck ABC nicht rechtwinklig ist.
- Begründen Sie, dass die **Kleinwinkelnäherung** für Winkel kleiner als 10° sinnvoll ist. Berechnen Sie dafür für verschiedene Winkel die relative Abweichung, die der Tangens vom Sinus hat. Beziehen Sie dazu Stellung, ob die 10° eine feste Grenze darstellen oder ob auch höhere oder niedrigere Werte eine sinnvolle Grenze darstellen könnten.
- Geben Sie die Bedingungen an, die die Parameter des Versuchsaufbaus (a, b, λ) erfüllen müssen, damit die Kleinwinkelnäherung angewendet werden kann.

2 |

- Geben Sie die Größen an, die bei einem Doppelspaltexperiment gemessen werden müssen, um die Wellenlänge des verwendeten Laserlichts zu ermitteln.
- Schätzen Sie die Messunsicherheiten ab, die sich bei den einzelnen Größen ergeben könnten.
- Beschreiben Sie Möglichkeiten zur Minimierung der Messunsicherheiten.
- Vergleichen Sie den Einfluss der Näherungen bei der Modellierung und der Messunsicherheiten auf die Abweichungen vom tatsächlichen Wellenlängenwert.

3 |

- Beschreiben Sie, was man unter zeitlicher und was unter räumlicher Kohärenz versteht.
- Erläutern Sie die Notwendigkeit von kohärentem Licht für die Entstehung von Interferenzmaxima beim Doppelspaltexperiment. Beschreiben Sie das Schirmbild, das bei Verwendung einer nichtkohärenten Lichtquelle entstehen würde.
- In Experimenten nutzt man häufig eine sehr schmale Blende, die zwischen dem Laser und dem Doppelspalt positioniert wird. Erläutern Sie diese Maßnahme.