Studienstufe

mathe.delta

TEILDRUCK

DIE VOLLSTÄNDIGE AUSGABE ERSCHEINT IM FESTEINBAND

C.C.BUCHNER

Hamburg

Der Kapitelaufbau in mathe.delta Studienstufe

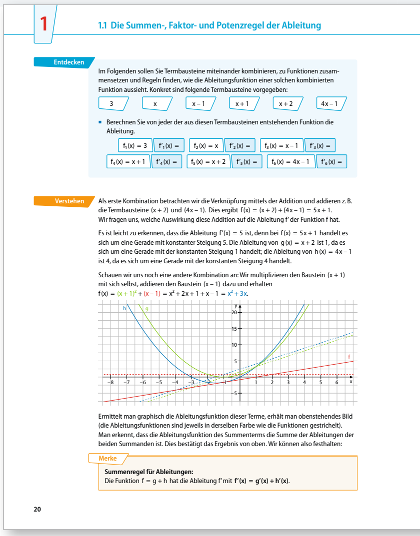
Alle Kapitel haben dieselbe Struktur und sind aus denselben Gliederungseinheiten aufgebaut.
Die Konzeption hat die besonderen Anforderungen der mündlichen Abiturprüfung dabei von Anfang an im Blick.

Einstieg und Ausblick

- Überblick über die Inhalte des Kapitels
- Vorgehensweise und Methodik als „roter Faden" des Kapitels
- Ausblick auf die zu erwerbenden Kompetenzen

Unterkapitel – Herleitungen und Merkwissen

- motivierender Einstieg
- ausführliche Hinführung und Herleitung der Inhalte

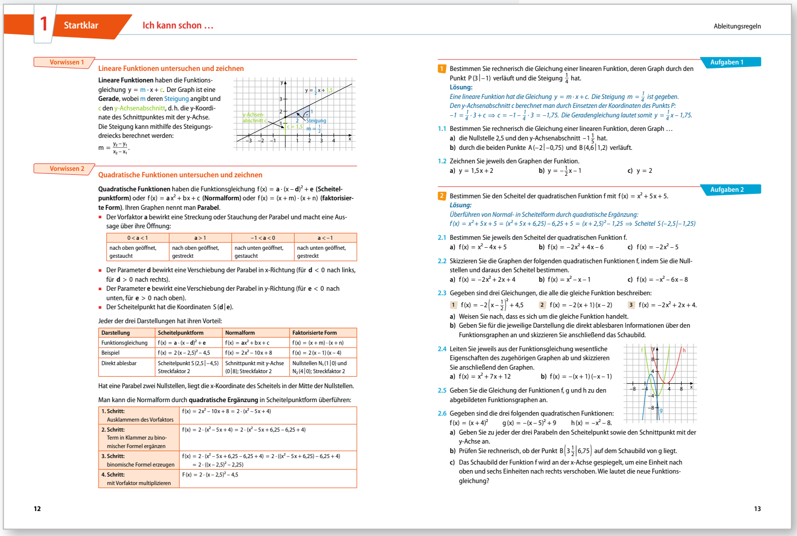


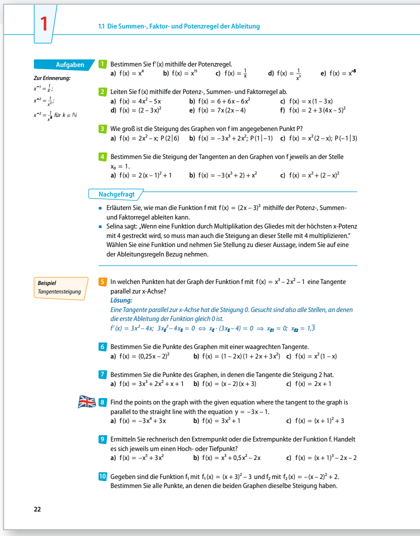
Startklar

- Basiskompetenzen wiederholen und sichern
- Grundwissen und dazu passende Aufgaben
- Lösungen im Anhang

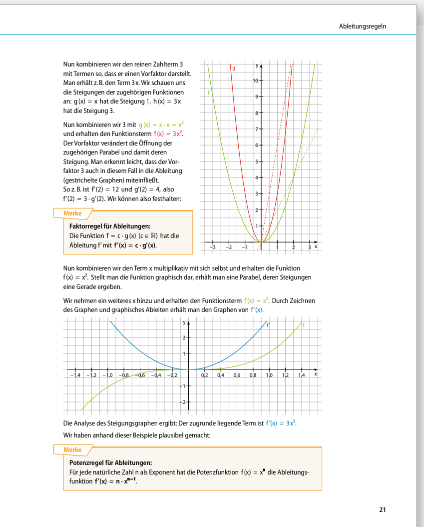
Unterkapitel – Beispiele und Aufgaben

- Beispielaufgaben mit Lösungen zum nachvollziehenden Lernen
- Aufgaben auf drei Anforderungsniveaus (auch eA)



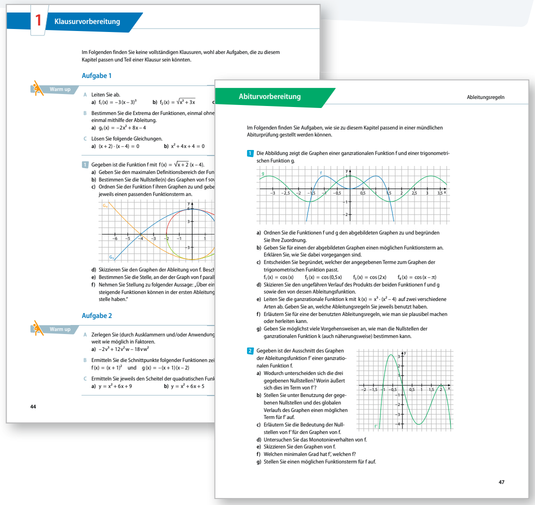


- maximale Anschaulichkeit
- Merkwissen übersichtlich und kompakt zusammengefasst

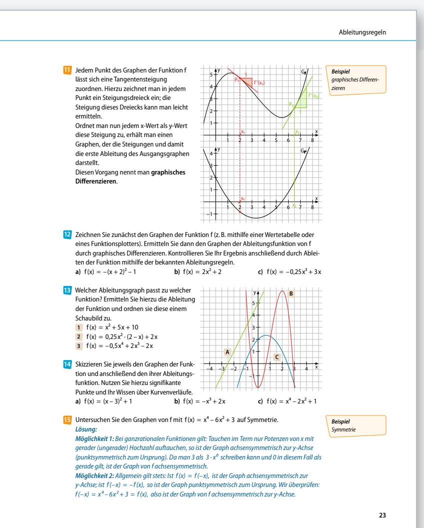


Klausurvorbereitung und Abiturvorbereitung

- jeweils drei Seiten Training anhand typischer Aufgabenstellungen
- Reflexion über die für die Abiturprüfung besonders relevanten Aufgabenformate

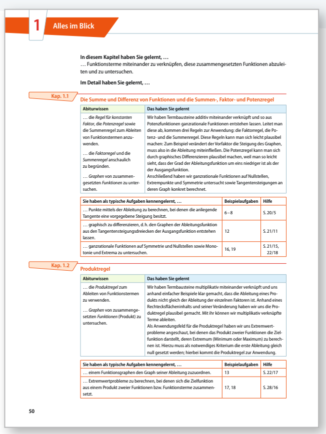


- „Nachgefragt“: Reflexion über das Gelernte auf zwei Niveaus



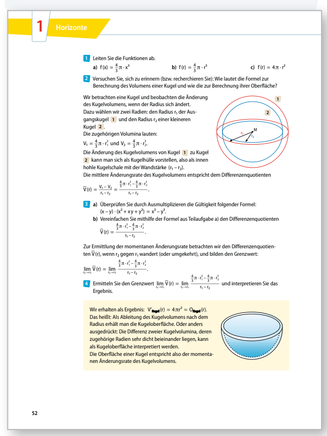
Alles im Blick

- Übersicht über die Inhalte und Kompetenzen mit Bezug zum Bildungsplan



Horizonte

- Anwendungen und Vertiefungen (auch eA)



Durch Eingabe des Mediencodes 63025-01 im Suchfeld auf www.ccbuchner.de gelangen Sie zu Materialien wie z. B. Erklärvideos und Lösungen ausgewählter Aufgaben.

mathe.delta

Mathematik für das Gymnasium

Studienstufe

Hamburg

C.C.Buchner

mathe.delta
Hamburg
Herausgeber: Axel Goy

mathe.delta Studienstufe – Hamburg
Bearbeitet von: Jörg Aldag, Benjamin Castillo-Schulz, Axel Goy, Christoph Hempfer, Romy Hempfer, Dominik Hilbert, Catrin Köninger, Thorsten Scheffner und Tobias Sildatke unter Mitwirkung von Veli Akyildiz

Zu diesem Lehrwerk ist erhältlich:
- Digitales Lehrmaterial **click & teach 11/12** (ISBN 978-3-661-63027-4)

Weitere Materialien finden Sie unter www.ccbuchner.de.

Dieser Titel ist auch als digitale Ausgabe unter www.ccbuchner.de erhältlich.

Durch Eingabe des Mediencodes 63025-01 im Suchfeld auf www.ccbuchner.de oder durch Scannen des QR-Codes gelangen Sie zu Materialien wie z. B. Erklärvideos, den Lösungen der Aufgaben zur Klausur- und zur Abiturvorbereitung sowie den Lösungen der Aufgabenvorschläge für die mündliche Abiturprüfung im Anhang des Buchs.

Bildnachweis: Alamy Stock Photo / Tomas Griger – S. 59; - / Steve Allen Tavel Photography – S. 78; - / The Picture Art Collection – S. 65; F.A.Z.-Grafik / Karl-Heinz Döring – S. 79; Getty Images Plus / Edwin van Nuil – S. 11; - / iStockphoto, DmyTo – S. 36; picture-alliance / akg-images – S. 94; - / I – S. 59; Shutterstock / Photogarpher RM – Cover; © Südtiroler Archäologiemuseum - www.iceman.it – S. 95; www.wikimedia.org / Richard Ressmann, CC BY-SA 3.0 – S. 11.

An keiner Stelle im Schülerbuch dürfen Eintragungen vorgenommen werden.

Teildruck 1. Auflage, 1. Druck 2023

Dieses Werk folgt der reformierten Rechtschreibung und Zeichensetzung. Ausnahmen bilden Texte, bei denen künstlerische, philologische oder lizenzrechtliche Gründe einer Änderung entgegenstehen.

Layout und Satz: tiff.any GmbH & Co KG, Berlin
Umschlag: tiff.any GmbH & Co KG, Berlin

WirmachenDruck.de
Sie sparen, wir drucken!

www.ccbuchner.de

ISBN der Verkaufsauflage: 978-3-661-**63025**-0

mathe.delta – Studienstufe ist auf die Mathematik-Studienstufe zugeschnitten und ermöglicht eine passgenaue Vorbereitung auf die Abiturprüfung. Hierfür wurde für **mathe.delta – Studienstufe** ein komplett neues Konzept entwickelt, das eine Fülle gängiger Prüfungsfragen stellt, die Operatoren schult und an mehreren Stellen und durch unterschiedliche konzeptionelle Elemente die Abiturprüfung simuliert.
Jedes Kapitel ist in mehrere Untereinheiten gegliedert und enthält eine Reihe verschiedener, aber in jedem Kapitel immer gleicher Seitentypen.
Die folgenden Ausführungen erläutern die didaktischen Intentionen der einzelnen Strukturelemente und unterstützen Sie als Lehrkraft bei Ihrem Unterricht mit **mathe.delta – Studienstufe**.

Auftaktdoppelseite und Startklar

- Auf der **Auftaktdoppelseite** wird der dem Kapitel zugrunde liegende Leitgedanke vorgestellt und aufgezeigt, was in den einzelnen Unterkapiteln thematisiert wird und gelernt werden kann.
- In **Startklar** können die Schülerinnen und Schüler wesentliche Inhalte der vergangenen Schuljahre wiederholen. Dieser intensiven Wiederholung liegt die Idee zugrunde, dass Vorwissen ein wesentlicher Faktor für Leistung ist und dass Kompetenzen aus vergangenen Schuljahren gerade in einem hierarchisch aufgebauten Fach wie Mathematik besonders wichtig sind.
- Auf der linken Seite einer Doppelseite werden diese wesentlichen Inhalte vorgestellt, auf der rechten Seite finden Sie parallel dazu eine vorgerechnete Beispielaufgabe und weitere Aufgaben zum selbständigen Üben.
- Die Lösungen der Aufgaben im Anhang ermöglichen den Schülerinnen und Schülern eine selbständige Überprüfung ihrer Fähigkeiten.

Unterkapitel

- Jedes **Unterkapitel** beginnt mit einer einführenden Doppelseite, an deren Beginn unter **Entdecken** eine **Einstiegsaufgabe** steht, und auf der anschließend unter **Verstehen** (anknüpfend an die Einstiegsaufgabe) das Wesentliche langsam und ausführlich erklärend entwickelt wird.
- Die inhaltlichen Kompetenzen sind in verständlicher Sprache und in komprimierter Form in **Merke-Kästen** zusammengefasst.
- Auf den folgenden zwei, vier oder sechs Seiten finden Sie ein reichhaltiges Angebot an **Übungsaufgaben**. Die Aufgaben sind durch Farbkategorien nach aufsteigendem Komplexitätsgrad geordnet: **Grüne Aufgaben** erfordern einfache Rechenoperationen; **blaue Aufgaben** sind vernetzende Standardaufgaben und verknüpfen z. B. unterschiedliche Darstellungsformen miteinander. **Rote Aufgaben** vertiefen das Erlernte und bewegen sich auch auf erhöhtem Anforderungsniveau.
- Zwischen den grünen und den blauen und nach den roten Aufgaben finden Sie jeweils unter **Nachgefragt** typische Fragen, die die Schülerinnen und Schüler auf die Abiturprüfung vorbereiten. Die Fragen regen zum **Reflektieren** an, fordern zum **Beurteilen** und **Argumentieren** auf und dazu, Verfahren oder Vorgehensweisen zu **beschreiben**. Damit werden die für das Abitur wesentlichen Operatoren abgebildet.

- In regelmäßigen Abständen finden Sie **vorgerechnete Beispielaufgaben**, die wesentliche Aufgabentypen abbilden, und deren vorgegebene Lösungswege das Verständnis erleichtern. Diese Beispiele sollen den Schülerinnen und Schülern den Zugang zum Thema ermöglichen und Lernprozesse initiieren.
- Der Umfang des Aufgabenangebots eröffnet Ihnen als Lehrkraft die Möglichkeit einer gezielten Auswahl nach eigenem Ermessen.

Klausurvorbereitung

- Auf den drei Seiten zur **Klausurvorbereitung** finden Sie mehrere, zum jeweiligen Kapitel passende Aufgaben, die auf **schriftliche Klausuren** vorbereiten.
- Eröffnet werden die jeweiligen Aufgaben durch ein **Warm Up** mit zwei bis drei **Basisaufgaben** zu Themen und Grundkompetenzen aus vergangenen Schuljahren oder Unterrichtseinheiten, jedoch jeweils verwandt zu den nachfolgenden Aufgaben.
- Abgeschlossen werden diese Seiten durch einen zusammenfassenden **Überblick über typische Aufgabenformate und Fragestellungen**, die im Kontext des jeweiligen Kapitelthemas auftreten können.

Abiturvorbereitung

- Auf den drei Seiten zur **Abiturvorbereitung** finden Sie mehrere, zum jeweiligen Kapitel passende Aufgaben, wie sie im Abitur gestellt werden können.
- Den Abschluss bildet eine Zusammenstellung von typischen Fragen, wie sie im Abitur zum jeweiligen Kapitelthema gestellt werden können. Wie schon bei „Nachgefragt“ regen die Fragen zum **Reflektieren** an, fordern zum **Beurteilen** und **Argumentieren** auf und dazu, Verfahren oder Vorgehensweisen zu **beschreiben**. Damit werden die für das Abitur wesentlichen Operatoren abgebildet.

Alles im Blick

- Die Doppelseite **Alles im Blick** am Ende eines Kapitels macht zum einen transparent, dass **mathe.delta – Studienstufe** den **Bildungsplan** vollständig abbildet und damit eine solide Abiturvorbereitung gewährleistet.
- Zum anderen wird aufgezeigt, wie **mathe.delta – Studienstufe** den **Bildungsplan konkretisiert und umsetzt**.
- Schließlich werden die für das jeweilige Unterkapitel **typischen und wesentlichen Kompetenzen und Aufgaben** aufgezählt und aufgezeigt, an welchen Stellen des Kapitels man sie üben kann und wo man im Buch dazu Hilfe findet.

Horizonte

- Diese Seitenkategorie bietet auch Inhalte für das erhöhte Anforderungsniveau und blickt über das durch den Bildungsplan vorgegebene grundlegende Anforderungsniveau hinaus. Es werden interessante Aspekte beleuchtet, die an die Inhalte des Kapitels anknüpfen und Ausblicke auf Kompetenzen liefern, die auch in unterschiedlichen Studiengängen hilfreich sein können.

Aufgaben werden in der Mathematik oft mithilfe von **Operatoren** formuliert. Im Folgenden werden die für die mündliche Abiturprüfung zentralen Operatoren wiederholt.

Operator 1

Begründen, argumentieren

eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Berechnungen, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitungen oder inhaltliche Argumentation verifizieren oder falsifizieren

1 Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion dritten Grades mindestens eine und höchstens drei Nullstellen haben kann.

Lösung:
Aufgrund ihres Verhaltens für $x \to \pm\infty$ verläuft die Funktion entweder vom 2. in den 4. oder vom 3. in den 1. Quadranten. Somit hat sie mindestens eine Nullstelle. Sie kann höchstens drei Nullstellen haben, da eine Funktion vom Grad n maximal n Nullstellen hat.

Operator 2

Beschreiben

einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben

2 Beschreiben Sie, wie Sie von einer in Normalform gegebenen Parabel die Extremstelle bestimmen können.

Lösung:
Man wandelt die Normalform durch quadratische Ergänzung in die Scheitelform um. Quadratische Ergänzung bedeutet, dass man eine Zahl so addiert (und anschließend wieder subtrahiert), dass ein Binom entsteht.
Beispiel: $f(x) = x^2 + 3x + 4 = (x^2 + 3x + 2{,}25) - 2{,}25 + 4 = (x + 1{,}5)^2 + 1{,}75$
Der Scheitel $S(-1{,}5 \mid 1{,}75)$ ist ein Minimum, da die Parabel wegen des positiven Vorzeichens vor x^2 nach oben geöffnet ist.

Operator 3

Erklären, erläutern

Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden

3 Erläutern Sie, dass eine Funktion, die in einem Punkt eine waagrechte Tangente hat und dort ihr Monotonieverhalten ändert, in diesem Punkt ein Extremum hat.

Lösung:
Nach dem Monotoniesatz gilt: Wenn $f'(x) > 0$, ist die Funktion streng monoton steigend; wenn $f'(x) < 0$, ist die Funktion streng monoton fallend. Gilt demnach $f'(x_0) = 0$ und wechselt das Vorzeichen von f' an x_0 von + nach –, liegt ein Maximum vor; wechselt das Vorzeichen von f' an x_0 von – nach +, liegt ein Minimum vor.

Operator 4

Untersuchen

Probleme bzw. Fragestellungen nach fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden

4 Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ auf Nullstellen.

Lösung:
$x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x_{N1} = 0 \text{ und } x_{N2} = -1$

1.1 Begründen Sie, ob folgende Aussage richtig ist: „Die Ableitung des Negativen einer Funktion ist gleich dem Negativen der Ableitung der Funktion.“

1.2 Die Funktion f sei eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Welche der Aussagen sind wahr? Begründen Sie.

a) f hat mindestens einen Hochpunkt.

b) f hat zwei lokale Extremstellen.

c) Wenn f an der Stelle x_0 einen Tiefpunkt hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

d) Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 einen relativen Extremwert.

2.1 Beschreiben Sie, wie man aus dem Graphen einer Ableitungsfunktion den Graphen einer möglichen Ursprungsfunktion rekonstruieren kann.

2.2 Beschreiben Sie, wie Sie die Extremstellen einer Funktion bestimmen können.

2.3 Beschreiben Sie, wie Sie eine Funktion auf Monotonie untersuchen können.

2.4 Beschreiben Sie, wie Sie eine Funktion auf ihr Verhalten im Unendlichen, also für $x \to \pm\infty$, untersuchen können.

3.1 Erläutern Sie am Beispiel der Funktion f mit $f(x) = 3x^2$ (eventuell unter Zuhilfenahme einer Skizze) die Begriffe *Sekante, Sekantensteigung, Tangente, Tangentensteigung, Differenzenquotient* und *Differentialquotient*.

3.2 Erläutern Sie mit eigenen Worten und anhand eines Alltagsbeispiels die Begriffe *notwendiges Kriterium* und *hinreichendes Kriterium*.

3.3 Erläutern Sie mit eigenen Worten, einer Skizze und anhand einer selbstgewählten Funktion die Begriffe notwendiges und hinreichendes Kriterium für Extremstellen.

4.1 Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x$ auf Nullstellen.

4.2 Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 4$ auf Extremstellen.

4.3 Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x$ auf Monotonie.

Erweiterung der Differentialrechnung I: Ableitungsregeln

1

Einstieg

In diesem Kapitel wollen wir die Arbeitsweise eines Mathematikers simulieren. Die Phänomene, mit denen wir uns beschäftigen, sind einerseits Terme, andererseits ihre zugehörigen Graphen mit ihren Eigenschaften wie Extrempunkte oder Monotonieverhalten. Wir gehen dabei so vor, dass wir Terme auf verschiedene Arten miteinander kombinieren.

In einem **ersten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie additiv miteinander verknüpfen.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6$ ableiten sowie **auf Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen**.

In einem **zweiten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie multiplikativ miteinander verknüpfen.

Am Ende des zweiten Unterkapitels haben Sie die **Produktregel als neue Ableitungsregel** kennen gelernt und können Funktionen wie $f(x) = (x+5)^2 \cdot (x-3)$ ableiten.

In einem **dritten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie miteinander verketten. Dabei entsteht eine innere und eine äußere Funktion.

Am Ende des dritten Unterkapitels haben Sie die **Verkettung von Termen** kennengelernt und können Funktionen wie $f(x) = (3x+4)^6$ mit der **Kettenregel** ableiten.

In einem **vierten Schritt** nehmen wir den Sinus und Kosinus hinzu und kombinieren sie mit linearen Termen.

Am Ende des vierten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 4 \cdot \sin(x+2)$ **ableiten** sowie auf **Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen**.

Was ist Mathematik? Der renommierte Mathematiker Keith Devlin beantwortete diese Frage sinngemäß wie folgt: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Sie untersucht abstrakte Muster, z. B. Zahlenmuster, Termmuster oder Muster in Graphen. Dabei geht es z. B. darum, Ähnlichkeiten zwischen zwei Phänomenen zu erkennen und diese in Beziehung zu setzen zu Ähnlichkeiten zweier anderer Phänomene.

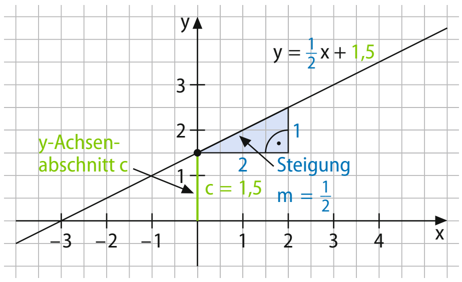
Ausblick

Die Mustererkennung, die sich als roter Faden durch das Kapitel zieht, spielt sowohl beim Zusammenspiel zwischen dem Aussehen des Terms und dem Aussehen des Graphen eine Rolle als auch beim Erkennen und Entdecken der Ableitungsregeln.

Vorwissen 1

Lineare Funktionen untersuchen und zeichnen

Lineare Funktionen haben die Funktionsgleichung $y = m \cdot x + c$. Der Graph ist eine **Gerade**, wobei m deren Steigung angibt und c den y-Achsenabschnitt, d. h. die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse. Die Steigung kann mithilfe des Steigungsdreiecks berechnet werden: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.



Vorwissen 2

Quadratische Funktionen untersuchen und zeichnen

Quadratische Funktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = \mathbf{a} \cdot (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$ **(Scheitelpunktform)** oder $f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$ **(Normalform)** oder $f(x) = (x - m) \cdot (x - n)$ **(faktorisierte Form)**. Ihren Graphen nennt man **Parabel**.

- Der Vorfaktor **a** bewirkt eine Streckung oder Stauchung der Parabel und macht eine Aussage über ihre Öffnung:

$0 < \mathbf{a} < 1$	$\mathbf{a} > 1$	$-1 < \mathbf{a} < 0$	$\mathbf{a} < -1$
nach oben geöffnet, gestaucht	nach oben geöffnet, gestreckt	nach unten geöffnet, gestaucht	nach unten geöffnet, gestreckt

- Der Parameter **d** bewirkt eine Verschiebung der Parabel in x-Richtung (für $\mathbf{d} < 0$ nach links, für $\mathbf{d} > 0$ nach rechts).
- Der Parameter **e** bewirkt eine Verschiebung der Parabel in y-Richtung (für $\mathbf{e} < 0$ nach unten, für $\mathbf{e} > 0$ nach oben).
- Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten $S(\mathbf{d} \mid \mathbf{e})$.

Jeder der drei Darstellungen hat ihren Vorteil:

Darstellung	**Scheitelpunktform**	**Normalform**	**Faktorisierte Form**
Funktionsgleichung	$f(x) = \mathbf{a} \cdot (x - \mathbf{d})^2 + \mathbf{e}$	$f(x) = \mathbf{a}x^2 + bx + c$	$f(x) = (x - m) \cdot (x - n)$
Beispiel	$f(x) = 2(x - 2{,}5)^2 - 4{,}5$	$f(x) = 2x^2 - 10x + 8$	$f(x) = 2(x - 1)(x - 4)$
Direkt ablesbar	Scheitelpunkt $S(2{,}5 \mid -4{,}5)$ Streckfaktor 2	Schnittpunkt mit y-Achse $(0 \mid 8)$; Streckfaktor 2	Nullstellen $N_1(1 \mid 0)$ und $N_2(4 \mid 0)$; Streckfaktor 2

Hat eine Parabel zwei Nullstellen, liegt die x-Koordinate des Scheitels in der Mitte der Nullstellen.

Man kann die Normalform durch **quadratische Ergänzung** in Scheitelpunktform überführen:

1. Schritt: Ausklammern des Vorfaktors	$f(x) = 2x^2 - 10x + 8 = 2 \cdot (x^2 - 5x + 4)$
2. Schritt: Term in Klammer zu binomischer Formel ergänzen	$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 4) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4)$
3. Schritt: binomische Formel erzeugen	$f(x) = 2 \cdot (x^2 - 5x + 6{,}25 - 6{,}25 + 4) = 2 \cdot ((x^2 - 5x + 6{,}25) - 6{,}25 + 4)$ $= 2 \cdot ((x - 2{,}5)^2 - 2{,}25)$
4. Schritt: mit Vorfaktor multiplizieren	$f(x) = 2 \cdot (x - 2{,}5)^2 - 4{,}5$

Aufgaben 1

1 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer linearen Funktion, deren Graph durch den Punkt $P(3|-1)$ verläuft und die Steigung $\frac{1}{4}$ hat.

Lösung:

Eine lineare Funktion hat die Gleichung $y = m \cdot x + c$. Die Steigung $m = \frac{1}{4}$ ist gegeben.
Den y-Achsenabschnitt c berechnet man durch Einsetzen der Koordinaten des Punkts P:
$-1 = \frac{1}{4} \cdot 3 + c \Rightarrow c = -1 - \frac{1}{4} \cdot 3 = -1{,}75$. *Die Geradengleichung lautet somit* $y = \frac{1}{4}x - 1{,}75$.

1.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung einer linearen Funktion, deren Graph …
a) die Nullstelle 2,5 und den y-Achsenabschnitt $-1\frac{1}{5}$ hat.
b) durch die beiden Punkte $A(-2|-0{,}75)$ und $B(4{,}6|1{,}2)$ verläuft.

1.2 Zeichnen Sie jeweils den Graphen der Funktion.
a) $y = 1{,}5x + 2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x - 1$ **c)** $y = 2$

Aufgaben 2

2 Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 + 5x + 5$.

Lösung:

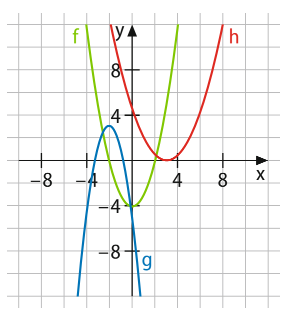
Überführen von Normal- in Scheitelform durch quadratische Ergänzung:
$f(x) = x^2 + 5x + 5 = (x^2 + 5x + 6{,}25) - 6{,}25 + 5 = (x + 2{,}5)^2 - 1{,}25 \Rightarrow$ *Scheitel* $S(-2{,}5|-1{,}25)$

2.1 Bestimmen Sie jeweils den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f.
a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ **b)** $f(x) = -2x^2 + 4x - 6$ **c)** $f(x) = -2x^2 - 5$

2.2 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen f, indem Sie die Nullstellen und daraus den Scheitelpunkt bestimmen.
a) $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$ **b)** $f(x) = x^2 - x - 1$ **c)** $f(x) = -x^2 - 6x - 8$

2.3 Gegeben sind drei Gleichungen, die alle die gleiche Funktion beschreiben:
1 $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4{,}5$ **2** $f(x) = -2(x + 1)(x - 2)$ **3** $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$.
a) Weisen Sie nach, dass es sich um die gleiche Funktion handelt.
b) Geben Sie für die jeweilige Darstellung die direkt ablesbaren Informationen über den Funktionsgraphen an und skizzieren Sie anschließend das Schaubild.

2.4 Leiten Sie jeweils aus der Funktionsgleichung wesentliche Eigenschaften des zugehörigen Graphen ab und skizzieren Sie anschließend den Graphen.
a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ **b)** $f(x) = -(x + 1)(-x - 1)$



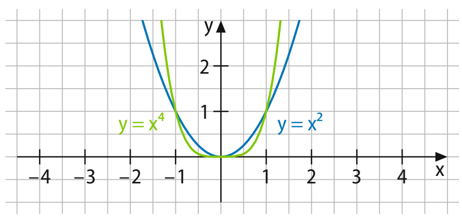
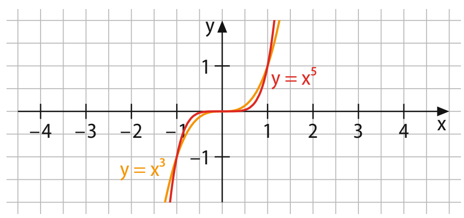
2.5 Geben Sie die Gleichung der Funktionen f, g und h zu den abgebildeten Funktionsgraphen an.

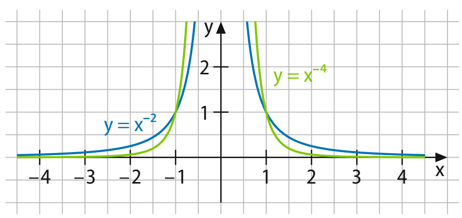
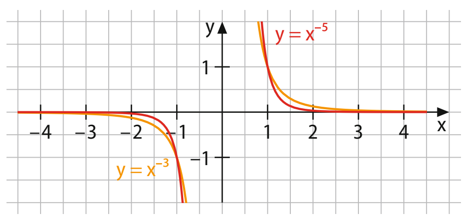
2.6 Gegeben sind die drei folgenden quadratischen Funktionen:
$f(x) = (x + 4)^2$ $g(x) = -(x - 5)^2 + 9$ $h(x) = -x^2 - 8$.
a) Geben Sie zu jeder der drei Parabeln den Scheitelpunkt sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse an.
b) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $B\left(3\frac{1}{2}\middle|6{,}75\right)$ auf dem Schaubild von g liegt.
c) Das Schaubild der Funktion f wird an der x-Achse gespiegelt, um eine Einheit nach oben und sechs Einheiten nach rechts verschoben. Wie lautet die neue Funktionsgleichung?

Vorwissen 3

Die Wirkung des Exponenten in Potenzfunktionen erklären und Potenzfunktionen ableiten

Potenzfunktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = x^r, r \in \mathbb{Z}$. Der Exponent r bestimmt das Aussehen des Graphen.

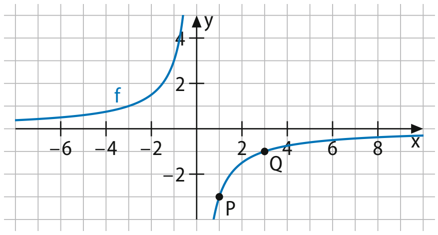
Potenzfunktionen mit natürlichen Hochzahlen	
gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
Beispiele: $f(x) = x^2; x^4; x^{10}$	Beispiele: $f(x) = x^3; x^7; x^{11}$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
Nullstelle bei (0|0)	Nullstelle bei (0|0)
Tiefpunkt bei (0|0)	kein Extrempunkt, monoton steigend
gemeinsame Punkte: (0|0), (1|1), (−1|1)	gemeinsame Punkte: (0|0), (1|1), (−1|−1)
symmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
	

Potenzfunktionen mit negativen ganzen Hochzahlen	
gerade Hochzahl	ungerade Hochzahl
Beispiele: $f(x) = x^{-2}; x^{-4}; x^{-8}$	Beispiele: $f(x) = x^{-3}; x^{-5}; x^{-13}$
Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$	Definitionsmenge $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
keine Nullstellen, x-Achse und y-Achse sind Asymptoten	keine Nullstellen, x-Achse und y-Achse sind Asymptoten
kein Extrempunkt, aber untere Schranke 0	kein Extrempunkt, monoton fallend
gemeinsame Punkte: (1|1) und (−1|1)	gemeinsame Punkte: (1|1) und (−1|−1)
symmetrisch zur y-Achse	punktsymmetrisch zum Ursprung
	

Die Graphen nennt man **Hyperbeln**; sie bestehen aus zwei Ästen, die sich an die Koordinatenachsen anschmiegen. Die Koordinatenachsen sind die **Asymptoten**.

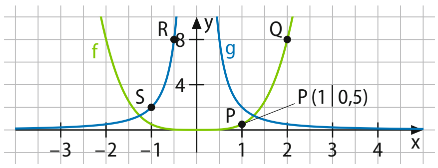
Aufgaben 3

3 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat.
Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen? Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte $P(1|-3)$ und $Q(3|-1)$.

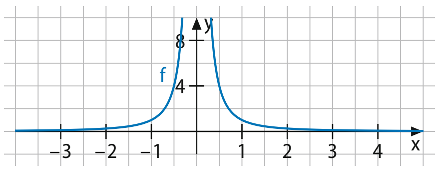


Lösung:
r muss negativ (z. B. wegen Definitionslücke bei x = 0) und ungerade (z. B. wegen Punktsymmetrie) sein, a muss negativ sein, damit für positive x negative Werte entstehen.
Aus $-3 = a \cdot 1^r$ (Punkt P) folgt $a = -3$. Damit folgt aus $-1 = -3 \cdot 3^r$ (Punkt Q) $r = -1$.
Die Gleichung der Funktion f lautet somit $y = -3 \cdot x^{-1} = -\frac{3}{x}$.

3.1 Die Abbildung zeigt Schaubilder der Funktionen f und g; ihre Gleichungen haben beide die Form $y = a \cdot x^r$.
Bestimmen Sie mithilfe der Punkte P, Q bzw. R, S für beide Funktionen a und r.



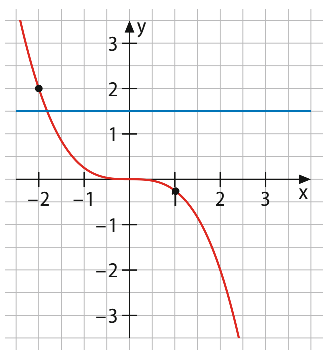
3.2 Gegeben ist das Schaubild einer Potenzfunktion f der Form $y = a \cdot x^r$.
Welche Aussagen können Sie über a und r machen? Begründen Sie Ihre Antwort. Es ist keine Rechnung verlangt.



3.3 Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.
$f(x) = -x^3$ $\quad$ $g(x) = x^{-5}$ $\quad$ $h(x) = x^4 - 1$ $\quad$ $i(x) = -\frac{1}{x^2}$

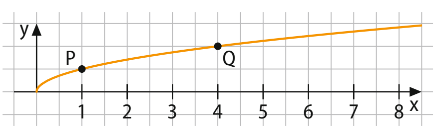
3.4 Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ geht durch die Punkte $A(-1|-4)$ und $B(0{,}5|0{,}125)$. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

3.5 Welche Potenzgleichung der Form $a \cdot x^n = d$ $(n \in \mathbb{N})$ ist in der Abbildung graphisch dargestellt? Die Punkte A und B haben die Koordinaten $A(-2|2)$ und $B(1|-0{,}25)$.
Bestimmen Sie die Lösung rechnerisch (mit dem WTR).



3.6 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$; $x \neq 0$.
a) Skizzieren Sie das Schaubild von f.
b) Um wie viel Prozent verändert sich der Funktionswert, wenn x $(x > 0)$ verdoppelt wird?

3.7 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat. Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen?
Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte $P(1|0{,}5)$ und $Q(4|1)$.

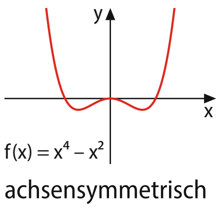


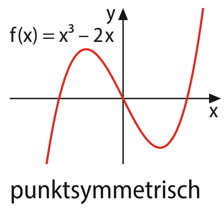
Erweiterung:
Wurzelfunktion

Vorwissen 4

Symmetrie ganzrationaler Funktionen und deren Verhalten im Unendlichen untersuchen

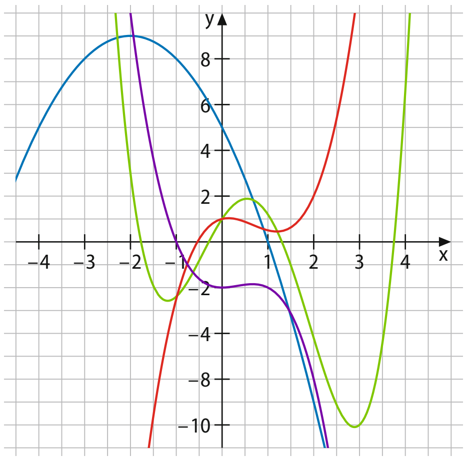
- Der Graph einer Funktion f ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
- Der Graph einer Funktion f ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.





Das **Verhalten des Graphen** von f mit $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ **für** $|x| \to \infty$ hängt nur von a_n und n ab:

- Ist n gerade und $a_n > 0$, verläuft der Graph von links oben nach rechts oben.
- Ist n gerade und $a_n < 0$, verläuft der Graph von links unten nach rechts unten.
- Ist n ungerade und $a_n > 0$, „kommt" der Graph von links unten und verläuft nach rechts oben.
- Ist n ungerade und $a_n < 0$, „kommt" der Graph von links oben und verläuft nach rechts unten.

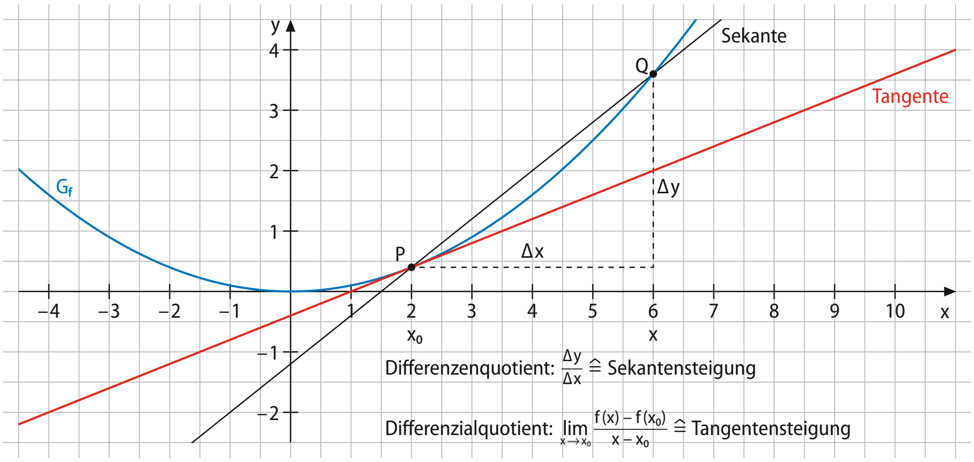


Vorwissen 5

Die Ableitung erklären

- Während der **Differenzenquotient** die Sekantensteigung und damit die mittlere Änderungsrate angibt, gibt der **Differentialquotient** die Steigung der Tangente an eine Kurve an und damit die momentane Änderungsrate.
- Als **Ableitung** bezeichnet man den Grenzwert des Differenzenquotienten. Die Ableitung einer Funktion in einem Kurvenpunkt gibt die Steigung des Funktionsgraphen in diesem Kurvenpunkt an:

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.



Aufgaben 4

4 Untersuchen Sie den Graphen von $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ auf Symmetrie und auf sein Verhalten im Unendlichen.

Lösung:

Da f(x) gerade und ungerade Exponenten enthält, liegt keine Symmetrie zum Koordinatensystem vor. Der höchste Exponent ist 3, der Vorfaktor von x^3 ist positiv. Deshalb strebt der Graph für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞.

4.1 Untersuchen Sie die Graphen von f auf Symmetrie und auf ihr Verhalten im Unendlichen.

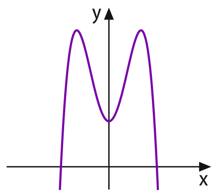
a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = x^5 + x^3 + x$

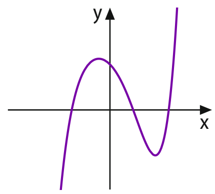
d) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1$ **e)** $f(x) = x \cdot (x + 2)^2 - 2$ **f)** $f(x) = (x - 1)^3$

4.2 Ordnen Sie aufgrund ihres Verhaltens für $x \to \pm\infty$ jedem Graphen die passende Funktion zu. Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen, die nicht abgebildet sind.

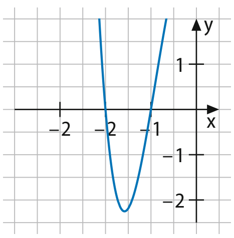
$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 2$ $f(x) = x^4 + x + 2$

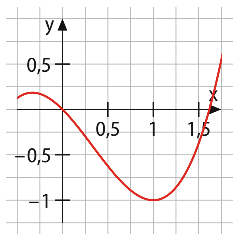
$f(x) = x^3 + x^2 + 1$ $f(x) = x^5 - 2x^2 - x + 1$

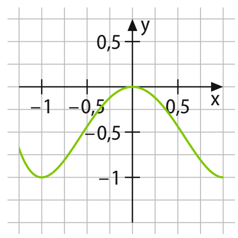




4.3 Vervollständigen Sie den gegebenen Ausschnitt in Ihrem Heft so, dass die Eigenschaften des Graphen wiedergegeben werden, die Sie für wesentlich halten.







$f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)(x - 2)(x + 2)$ $g(x) = x^3 - x^2 - x$ $h(x) = x^4 - 2x^2$

Aufgaben 5

5 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f mit $f(x) = x^2 - 9$ im Intervall $I = [0; 1]$ und die lokale/momentane Änderungsrate an der Stelle 2.

Lösung:

mittlere Änderungsrate: $\frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{-8 - (-9)}{1} = 1$

momentane Änderungsrate: Differenzenquotient für $x_0 = 2$:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{((2 + h)^2 - 9) - (2^2 - 9)}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 9 - 4 + 9}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = \frac{h(h + 4)}{h} = h + 4$$

Für $h \to 0$ strebt der Ausdruck gegen 4; die momentane Änderungsrate ist also 4.

5.1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate von f im angegebenen Intervall I.

a) $f(x) = x^2;\ I = [0; 3]$ **b)** $f(x) = 2x^3 + 1;\ I = [-1; 2]$

c) $f(x) = 2x^2 + x;\ I = [1; 3]$ **d)** $f(x) = x^3 + 2x^2 - x;\ I = [0; 1]$

5.2 Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate der Funktionen f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2;\ x_0 = -2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1;\ x_0 = 1$

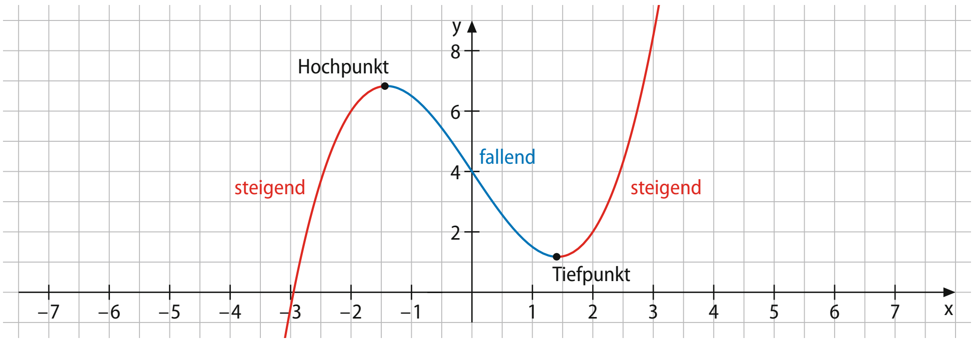
c) $f(x) = x^5 + x^3 + x;\ x_0 = 2$ **d)** $f(x) = x \cdot (x + 2)^2 - 2;\ x_0 = 9$

Vorwissen 6

Funktionen auf Monotonie und Extrempunkte untersuchen

Das Vorzeichen von $f'(x)$ gibt Auskunft über Steigen und Fallen des Graphen von f:
- In Intervallen, in denen $f'(x) > 0$ ist, ist f streng monoton steigend.
- In Intervallen, in denen $f'(x) < 0$ ist, ist f streng monoton fallend.

Ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ kennzeichnet lokale Extrempunkte von f:
- An einer Stelle, an der $f'(x)$ das Vorzeichen von + nach – wechselt, liegt ein Hochpunkt von $f(x)$ vor.
- An einer Stelle, an der $f'(x)$ das Vorzeichen von – nach + wechselt, liegt ein Tiefpunkt von $f(x)$ vor.



Vorwissen 7

Funktionen auf einfache und doppelte Nullstellen untersuchen

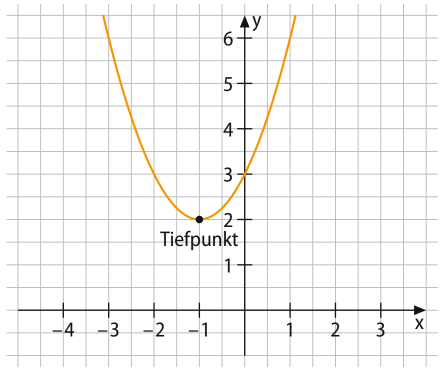
Um die Nullstellen einer Funktion mit dem Funktionsterm f(x) zu bestimmen, löst man eine Gleichung $f(x) = 0$. Je nach Aussehen der Gleichung bieten sich dabei (wenn möglich) unterschiedliche Verfahren an:

Art des Funktionsterms	Vorgehensweise	Beispiel
Gleichungen, bei denen in jedem Summanden ein x (bzw. eine Potenz von x) auftaucht	Ausklammern erzeugt ein Produkt, von dessen Faktoren man die Nullstellen leichter bestimmen und auf das man den Satz vom Nullprodukt anwenden kann.	$0 = x^3 - 2x^2 - x = x \cdot (x^2 - 2x - 1)$ Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_{N1} = 0$, die anderen beiden erhält man aus $x^2 - 2x - 1 = 0$ z. B. mit der p-q-Formel.
Gleichungen der Art $x^n - c = 0$	Umformen zu $x^n = c$ und n-te Wurzel ziehen	$0 = x^4 - 16 \Leftrightarrow x^4 = 16$ $\Rightarrow x_{N1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
Gleichungen, die auf binomische Formeln zurückzuführen sind	Das Distributivgesetz rückwärts anwenden und dann die Nullstelle(n) eines jeden Faktors bestimmen	$0 = 4x^4 - 9 = (2x^2 + 3) \cdot (2x^2 - 3)$ liefert nach dem Satz vom Nullprodukt für $2x^2 - 3 = 0$ die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{1{,}5}$.

Zuweilen kann man Funktionen f in der Form $f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ schreiben $(x_i \in \mathbb{R})$. Dann sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Nullstellen. Wird der Linearfaktor $(x - x_i)$ mit n potenziert, nennt man x_i eine **n-fache Nullstelle** (für $n = 2$: doppelte Nullstelle).
- Ist der Exponent **gerade** (also 2, 4, …), so ist die **Nullstelle** zugleich Extremstelle, d. h. der Graph **berührt** die x-Achse an der Stelle x_i.
- Ist der Exponent **ungerade** (also 1, 3, …), so **schneidet** der Graph die x-Achse an der Stelle x_i.

Aufgaben 6

6 Untersuchen Sie f mit $f(x) = x^2 + 2x + 3$ auf Monotonie und Extrempunkte.
Geben Sie auch die Art des Extremums an.



Lösung:
$f'(x) = 2x + 2$;
$f'(x_0) = 2x_0 + 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$
Für $x < -1$ ist $f'(x) < 0$, d. h. der Graph fällt hier monoton, für $x > -1$ ist $f'(x) > 0$, d. h. der Graph steigt hier monoton. f' hat also einen Vorzeichenwechsel von – nach + bei $x_0 = -1$.
Der Punkt $T(-1|2)$ ist also ein Tiefpunkt des Graphen der Funktion f.

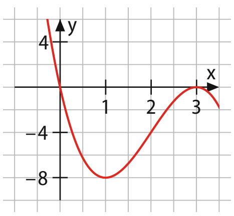
6.1 Untersuchen Sie die Funktionen auf Monotonie und auf Extrempunkte. Geben Sie gegebenenfalls auch an, ob Hoch- oder Tiefpunkte vorliegen.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 1$ **b)** $f(x) = -2x^2 + x$
c) $f(x) = 2x^3 + x$ **d)** $f(x) = 0{,}25x^3 + 4x^2 - 2$
e) $f(x) = \sqrt{x}$; $I = [1; 4]$ **f)** $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $I = [1{,}5; 3]$

6.2 **a)** Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 2 an, die ein lokales Maximum besitzt, das im I. Quadranten liegt.
b) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 3 an, die ein lokales Maximum und ein lokales Minimum besitzt.
c) Geben Sie eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 an, die insgesamt drei Extrema besitzt.

Aufgaben 7

7 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$ rechnerisch und zeichnerisch.



Lösung:
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x \cdot (x^2 - 6x + 9) = -2x \cdot (x-3)^2$.
Nach dem Satz vom Nullprodukt erhält man als Nullstellen $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 3$.

7.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f mit der x-Achse.

a) $f(x) = 3x^2 - 3x - 2$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x$ **c)** $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x$
d) $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 4)$ **e)** $f(x) = x^3 \cdot (x - 1)$ **f)** $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

7.2 Geben Sie jeweils Gleichungen zweier Funktionen an, die die angegebenen Nullstellen haben.

a) $x_{N1} = 2$, $x_{N2} = -3$ **b)** $x_{N1} = 1$, $x_{N2} = 2$, $x_{N3} = 3$ **c)** $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 1$
d) $x_{N1} = \frac{2}{3}$, $x_{N2} = -\frac{3}{2}$ **e)** $x_{N1} = -0{,}\overline{1}$, $x_{N2} = -0{,}\overline{2}$, $x_{N3} = -0{,}\overline{3}$ **f)** $x_{N1} = \sqrt{2}$ und $x_{N2} = \sqrt[3]{2}$

7.3 Skizzieren Sie zu den gegebenen Funktionsgleichungen jeweils einen passenden Graphen.

$f_1(x) = -(x+3)^2(x-1)$

$f_2(x) = (x+1)^3(x-2)^2$

$f_3(x) = -x \cdot (x^2-1) \cdot (x^2-4)$

$f_4(x) = -x(x-2)^3$

1.1 Die Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung

Entdecken

Im Folgenden sollen Sie Termbausteine miteinander kombinieren, zu Funktionen zusammensetzen und Regeln finden, wie die Ableitungsfunktion einer solchen kombinierten Funktion aussieht. Konkret sind folgende Termbausteine vorgegeben:

3 | x | $x - 1$ | $x + 1$ | $x + 2$ | $4x - 1$

- Berechnen Sie von jeder der aus diesen Termbausteinen entstehenden Funktion die Ableitung.

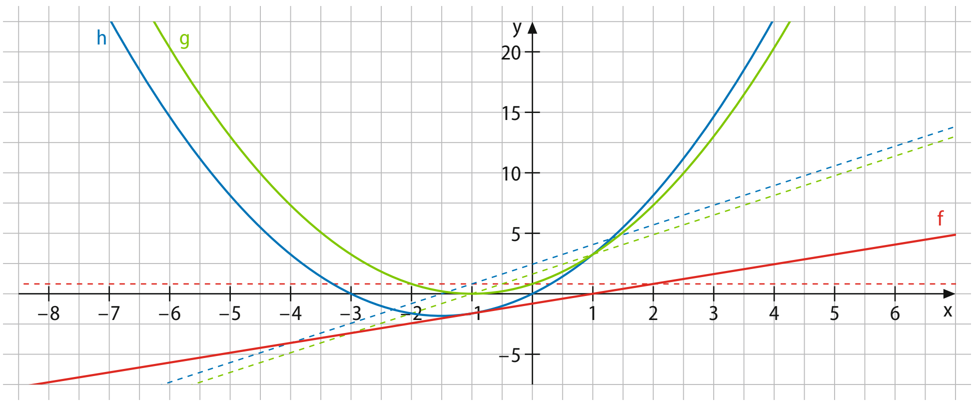
$f_1(x) = 3$	$f'_1(x) =$	$f_2(x) = x$	$f'_2(x) =$	$f_3(x) = x - 1$	$f'_3(x) =$
$f_4(x) = x + 1$	$f'_4(x) =$	$f_5(x) = x + 2$	$f'_5(x) =$	$f_6(x) = 4x - 1$	$f'_6(x) =$

Verstehen

Als erste Kombination betrachten wir die Verknüpfung mittels der Addition und addieren z. B. die Termbausteine $(x + 2)$ und $(4x - 1)$. Dies ergibt $f(x) = (x + 2) + (4x - 1) = 5x + 1$. Wir fragen uns, welche Auswirkung diese Addition auf die Ableitung f′ der Funktion f hat.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Ableitung $f'(x) = 5$ ist, denn bei $f(x) = 5x + 1$ handelt es sich um eine Gerade mit konstanter Steigung 5. Die Ableitung von $g(x) = x + 2$ ist 1, da es sich um eine Gerade mit der konstanten Steigung 1 handelt; die Ableitung von $h(x) = 4x - 1$ ist 4, da es sich um eine Gerade mit der konstanten Steigung 4 handelt.

Schauen wir uns noch eine andere Kombination an: Wir multiplizieren den Term $(x + 1)$ mit sich selbst, addieren den Term $(x - 1)$ dazu und erhalten
$f(x) = (x + 1)^2 + (x - 1) = x^2 + 2x + 1 + x - 1 = x^2 + 3x$.



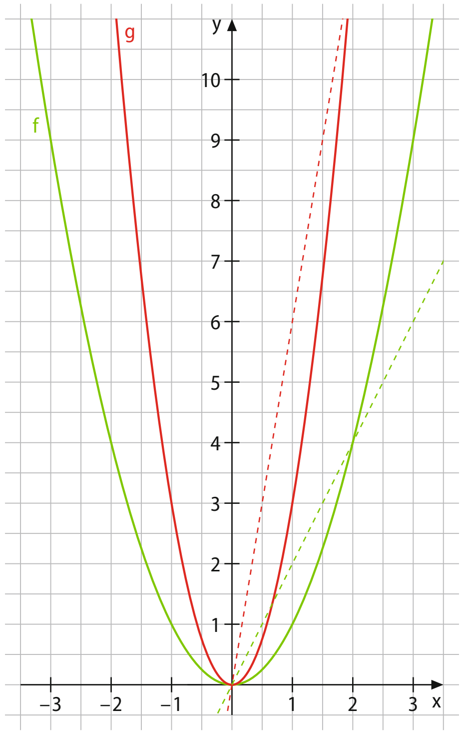
Ermittelt man graphisch die Ableitungsfunktion dieser Terme, erhält man obenstehendes Bild (die Ableitungsfunktionen sind jeweils in derselben Farbe wie die Funktionen gestrichelt). Man erkennt, dass die Ableitungsfunktion des Summenterms die Summe der Ableitungen der beiden Summanden ist. Dies bestätigt das Ergebnis von oben. Wir können also festhalten:

Merke

Summenregel für Ableitungen:
Die Funktion $f = g + h$ hat die Ableitung f′ mit $\mathbf{f'(x) = g'(x) + h'(x)}$.

Nun kombinieren wir den reinen Zahlterm 3 mit Termen so, dass er einen Vorfaktor darstellt. Man erhält z. B. den Term $3x$. Wir schauen uns die Steigungen der zugehörigen Funktionen an: $g(x) = x$ hat die Steigung 1, $h(x) = 3x$ hat die Steigung 3.

Nun kombinieren wir 3 mit $g(x) = x \cdot x = x^2$ und erhalten den Funktionsterm $f(x) = 3x^2$. Der Vorfaktor verändert die Öffnung der zugehörigen Parabel und damit deren Steigung. Man erkennt leicht, dass der Vorfaktor 3 auch in diesem Fall in die Ableitung (gestrichelte Graphen) miteinfließt.
So z. B. ist $f'(2) = 12$ und $g'(2) = 4$, also $f'(2) = 3 \cdot g'(2)$. Wir können also festhalten:

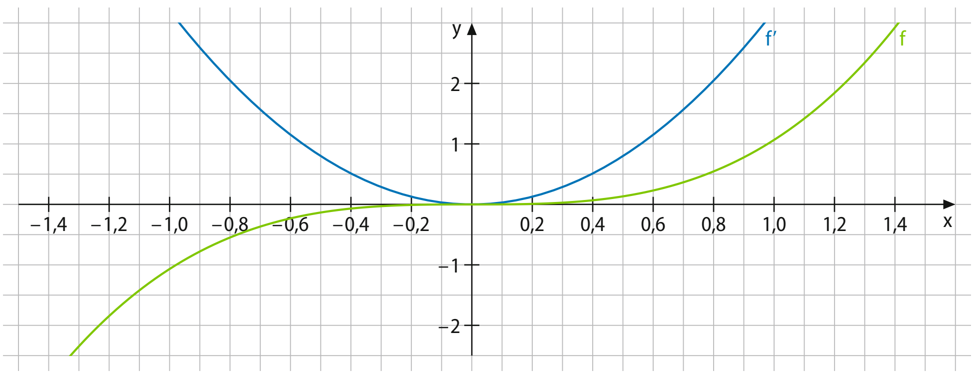


Merke

Faktorregel für Ableitungen:
Die Funktion $f = c \cdot g(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ hat die Ableitung f' mit $\mathbf{f'(x) = c \cdot g'(x)}$.

Nun kombinieren wir den Term x multiplikativ mit sich selbst und erhalten die Funktion $f(x) = x^2$. Stellt man die Funktion graphisch dar, erhält man eine Parabel, deren Steigungen eine Gerade ergeben.

Wir nehmen ein weiteres x hinzu und erhalten den Funktionsterm $f(x) = x^3$. Durch Zeichnen des Graphen und graphisches Ableiten erhält man den Graphen von $f'(x)$.



Die Analyse des Steigungsgraphen ergibt: Der zugrunde liegende Term ist $f'(x) = 3x^2$.

Wir haben anhand dieser Beispiele plausibel gemacht:

Merke

Potenzregel für Ableitungen:
Für jede natürliche Zahl n als Exponent hat die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ die Ableitungsfunktion $\mathbf{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$.

Aufgaben

Zur Erinnerung:

$x^{-1} = \frac{1}{x}$;

$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;

$x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ für $k \in \mathbb{N}$

1 Bestimmen Sie $f'(x)$ mithilfe der Potenzregel.
a) $f(x) = x^4$ **b)** $f(x) = x^{11}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ **e)** $f(x) = x^{-5}$

2 Leiten Sie $f(x)$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel ab.
a) $f(x) = 4x^2 - 5x$ **b)** $f(x) = 6 + 6x - 6x^2$ **c)** $f(x) = x(1 - 3x)$
d) $f(x) = (2 - 3x)^2$ **e)** $f(x) = 7x(2x - 4)$ **f)** $f(x) = 2 + 3(4x - 5)^2$

3 Wie groß ist die Steigung des Graphen von f im angegebenen Punkt P?
a) $f(x) = 2x^2 - x$; $P(2\,|\,6)$ **b)** $f(x) = -3x^3 + 2x^2$; $P(1\,|\,-1)$ **c)** $f(x) = x^2(2 - x)$; $P(-1\,|\,3)$

4 Bestimmen Sie die Steigung der Tangenten an den Graphen von f jeweils an der Stelle $x_0 = 1$.
a) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 1$ **b)** $f(x) = -3(x^3 + 2) + x^2$ **c)** $f(x) = x^2 + (2 - x)^2$

Nachgefragt

- Erläutern Sie, wie man die Funktion f mit $f(x) = (2x - 3)^2$ mithilfe der Potenz-, Summen- und Faktorregel ableiten kann.
- Selina sagt: „Wenn eine Funktion durch Multiplikation des Gliedes mit der höchsten x-Potenz mit 4 gestreckt wird, so muss man auch die Steigung an dieser Stelle mit 4 multiplizieren.“ Wählen Sie eine Funktion und nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage, indem Sie auf eine der Ableitungsregeln Bezug nehmen.

Beispiel
Tangentensteigung

5 In welchen Punkten hat der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$ eine Tangente parallel zur x-Achse?
Lösung:
Eine Tangente parallel zur x-Achse hat die Steigung 0. Gesucht sind also alle Stellen, an denen die erste Ableitung der Funktion gleich 0 ist.
$f'(x) = 3x^2 - 4x$; $3x_E^{\,2} - 4x_E = 0 \iff x_E \cdot (3x_E - 4) = 0 \implies x_{E1} = 0$; $x_{E2} = 1{,}\overline{3}$

6 Bestimmen Sie die Punkte des Graphen mit einer waagrechten Tangente.
a) $f(x) = (0{,}25x - 2)^2$ **b)** $f(x) = (1 - 2x)(1 + 2x + 3x^2)$ **c)** $f(x) = x^2(1 - x)$

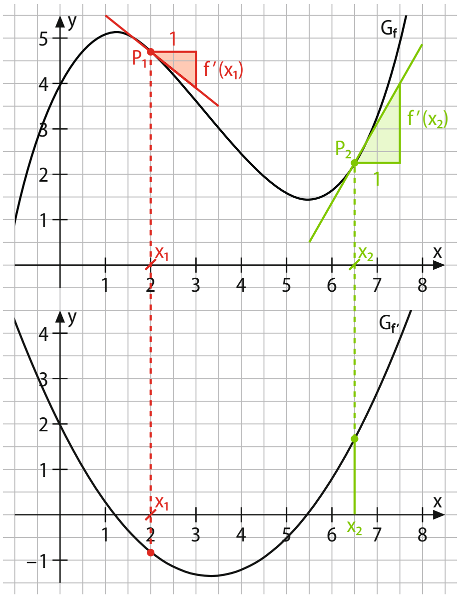
7 Bestimmen Sie die Punkte des Graphen, in denen die Tangente die Steigung 2 hat.
a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ **b)** $f(x) = (x - 2)(x + 3)$ **c)** $f(x) = 2x + 1$

8 Find the points on the graph with the given equation where the tangent to the graph is parallel to the straight line with the equation $y = -3x - 1$.
a) $f(x) = -3x^4 + 3x$ **b)** $f(x) = 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = (x + 1)^2 + 3$

9 Ermitteln Sie rechnerisch den Extrempunkt oder die Extrempunkte der Funktion f. Handelt es sich jeweils um einen Hoch- oder Tiefpunkt?
a) $f(x) = -x^5 + 3x^2$ **b)** $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 2x$ **c)** $f(x) = (x + 1)^3 - 2x - 2$

10 Gegeben sind die Funktion f_1 mit $f_1(x) = (x + 3)^2 - 3$ und f_2 mit $f_2(x) = -(x - 2)^2 + 2$. Bestimmen Sie alle Punkte, an denen die beiden Graphen dieselbe Steigung haben.

11 Jedem Punkt des Graphen der Funktion f lässt sich eine Tangentensteigung zuordnen. Hierzu zeichnet man in jedem Punkt ein Steigungsdreieck ein; die Steigung dieses Dreiecks kann man leicht ermitteln.
Ordnet man nun jedem x-Wert als y-Wert diese Steigung zu, erhält man einen Graphen, der die Steigungen und damit die erste Ableitung des Ausgangsgraphen darstellt.
Diesen Vorgang nennt man **graphisches Differenzieren**.



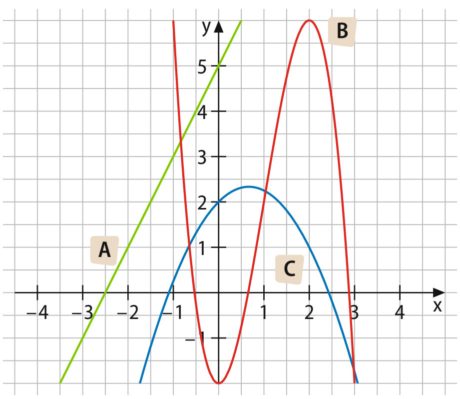
Beispiel
graphisches Differenzieren

12 Zeichnen Sie zunächst den Graphen der Funktion f (z. B. mithilfe einer Wertetabelle oder eines Funktionsplotters). Ermitteln Sie dann den Graphen der Ableitungsfunktion von f durch graphisches Differenzieren. Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis anschließend durch Ableiten der Funktion mithilfe der bekannten Ableitungsregeln.

a) $f(x) = -(x+2)^2 - 1$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 2$ **c)** $f(x) = -0{,}25x^3 + 3x$

13 Welcher Ableitungsgraph passt zu welcher Funktion? Ermitteln Sie hierzu die Ableitung der Funktion und ordnen sie diese einem Schaubild zu.

1 $f(x) = x^2 + 5x + 10$
2 $f(x) = 0{,}25x^2 \cdot (2-x) + 2x$
3 $f(x) = -0{,}5x^4 + 2x^3 - 2x$



14 Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion und anschließend den ihrer Ableitungsfunktion. Nutzen Sie hierzu signifikante Punkte und Ihr Wissen über Kurvenverläufe.

a) $f(x) = (x-3)^2 + 1$ **b)** $f(x) = -x^3 + 2x$ **c)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

15 Untersuchen Sie den Graphen von f mit $f(x) = x^4 - 6x^2 + 3$ auf Symmetrie.

Lösung:
Möglichkeit 1: *Bei ganzrationalen Funktionen gilt: Tauchen im Term nur Potenzen von x mit gerader (ungerader) Hochzahl auf, so ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse (punktsymmetrisch zum Ursprung). Da man 3 als* $3 \cdot x^0$ *schreiben kann und 0 in diesem Fall als gerade gilt, ist der Graph von f achsensymmetrisch.*
Möglichkeit 2: *Allgemein gilt stets: Ist* $f(x) = f(-x)$*, ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse; ist* $f(-x) = -f(x)$*, so ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung. Wir überprüfen:* $f(-x) = x^4 - 6x^2 + 3 = f(x)$*, also ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse.*

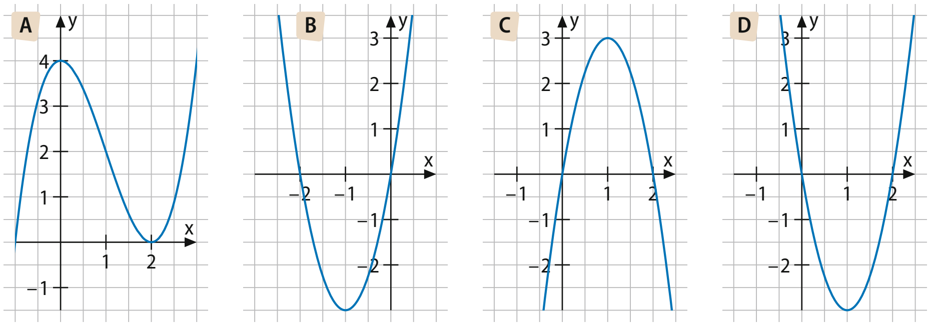
Beispiel
Symmetrie

16 Untersuchen Sie den Graphen von f auf zwei unterschiedliche Arten auf Symmetrie.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x$ **b)** $f(x) = 2x^5 + 2x^3 - x$ **c)** $f(x) = -0{,}25x^3 + 4x^2$

d) $f(x) = -(x+1)^2 - 1$ **e)** $f(x) = (x-3)^2 + 2x^3$ **f)** $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

17 Die Abbildung **A** zeigt den Graphen einer Funktion f. Genau eine der Abbildungen **B** bis **D** stellt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f dar. Finden Sie durch Ausschluss heraus, welche der drei Abbildungen dies ist, indem Sie bei jedem der beiden übrigen Graphen angeben, warum es sich nicht um den Graphen der Ableitungsfunktion f′ handeln kann.



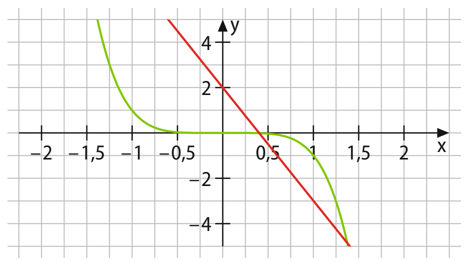
18 Manchmal gibt es kein Verfahren zur direkten Bestimmung der Nullstellen ganzrationaler Funktionen. In diesem Fall kann man die Gleichung so umwandeln, dass die Bestimmung der Nullstellen in die Bestimmung der Schnittstellen zweier Funktionsgraphen transformiert wird. Dies wird an zwei Beispielen dargestellt.

Beispiel
Nullstellen

Bestimmen Sie die Nullstellen der Graphen folgender Funktionen:

a) f mit $f(x) = x^4 - 4x^2$

b) g mit $g(x) = -x^5 + 5x - 2$



Lösung:

a) *Ausklammern von x^2 liefert:*

$x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2$

b) *Man wandelt die Gleichung $-x^5 + 5x - 2 = 0$ um in $-x^5 = -5x + 2$ und bestimmt graphisch (näherungsweise) die Schnittstellen der Funktionsgraphen, die der linken und der rechten Seite der Gleichung zugrunde liegen.*

$x_1 = -1{,}58;\ x_2 = 0{,}4;\ x_3 = 1{,}3$

Satz von Vieta:
Sind p und q die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ und x_1 und x_2 ihre Lösungen, dann gilt:
$p = -(x_1 + x_2)$,
$q = x_1 \cdot x_2$.

19 Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen graphisch und wenn möglich auch rechnerisch.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ **b)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **c)** $f(x) = x^2 + 3x - 4$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x$ **e)** $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ **f)** $f(x) = -x^4 + 2x - 1$

g) $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$ **h)** $f(x) = x^3 - 4x + 4$ **i)** $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$

20 Finden Sie jeweils den Fehler und korrigieren Sie ihn.

a) $f(x) = -5x^5 - 0{,}5x^2;\ f'(x) = -10x^4 - 0{,}5x$ **b)** $f(x) = x^{-4};\ f'(x) = -4x^{-3}$

c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}};\ f'(x) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $f(x) = \sqrt[4]{x^3};\ f'(x) = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3}$

21 Im Folgenden finden Sie einen Beweis für die Faktorregel mittels des Differenzen- und Differentialquotienten. Vervollständigen Sie im Heft die Tabelle, indem Sie jede Umformung kommentieren und dabei auch sagen, warum sie gemacht wurde.

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = k \cdot g(x)$		
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differenzenquotienten	Aus dem Differenzenquotient wird später der Differentialquotient abgeleitet.
$\frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h}$		
$\frac{k \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$		
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left(k \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$	Übergang zum Differentialquotienten	
$f'(x) = k \cdot \lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$		
$f'(x) = k \cdot g'(x)$		

22 Auf ähnliche Art wie in Aufgabe 21 kann man auch die Summenregel beweisen. Vervollständigen Sie den Beweis; kommentieren Sie jeden Ihrer Schritte.

Vorgehensweise symbolisch	Vorgehensweise verbalisiert	Ziel der Umformung
$f(x) = g(x) + k(x)$		
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$		
$\frac{g(x+h) + k(x+h) - g(x) - k(x)}{h}$	Differenzenquotient für eine Summe von Funktionen	
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	allg. Form des Differentialquotienten	Der Differentialquotient liefert die Ableitung.
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} (\qquad\qquad)$	Differentialquotient für obige Funktion	
$f'(x) =$		
$f'(x) = g'(x) + k'(x)$		

Nachgefragt

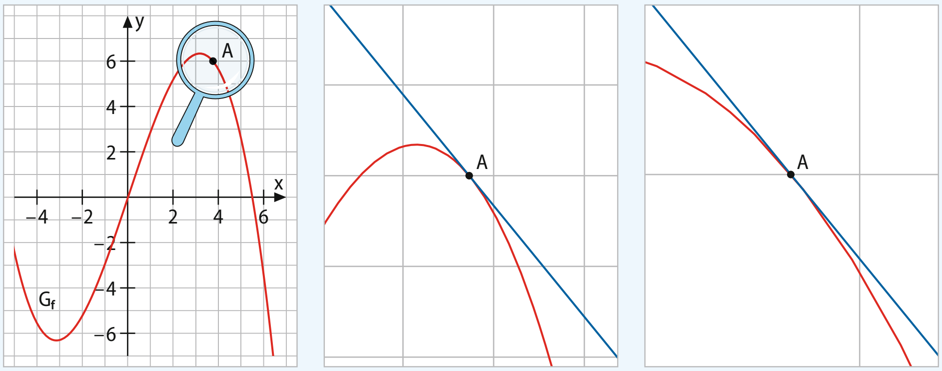
- „Eine Verschiebung der ursprünglichen Funktion um zwei Einheiten nach links verschiebt auch die Ableitungsfunktion um zwei Einheiten nach links." Stimmt das? Untersuchen Sie.
- „Zwei verschiedene Funktionen können nicht die gleiche Ableitungsfunktion haben." Stimmt das? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Axel meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der y-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion an der y-Achse." Hat er recht? Begründen Sie.
- Catrin meint: „Wenn man den Graphen einer Funktion an der x-Achse spiegelt, so spiegelt sich auch der Graph der zugehhörigen Ableitungsfunktion an der x-Achse." Hat sie recht? Begründen Sie.

1.2 Tangenten und Normalen an Graphen

Entdecken

Unter einem Mikroskop sind spannende Dinge zu entdecken: kleinste Tierchen im Wassertropfen, Unterschiede zwischen Salz und Zucker, die Facettenaugen von Fliegen usw. – alles Dinge, die bei der oberflächlichen Makrosicht nicht zu erkennen sind.

Dasselbe wollen wir nun auch mit Graphen von Funktionen machen: Lassen Sie sich von einem Funktionenplotter den Graph einer Kurve erstellen, z. B. den der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 14x$. Zoomen Sie nun an verschiedenen Stellen den Graphen, jeweils mehrfach.



- Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.
- Erläutern Sie mithilfe Ihrer Beobachtungen den folgenden Satz:
  „Eine Kurve kann man sich aus unendlich vielen unendlich kleinen Geradenstücken zusammengesetzt vorstellen."

Verstehen

Fall 1: Tangente an einen Punkt des Graphen

Die im Einstieg thematisierte Funktionenlupe zeigt, dass die **Tangente** in einem Punkt P des Graphen die **beste lineare Approximation (Näherung) der Kurve in einer Umgebung dieses Berührpunktes P** ist. Als eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a\,|\,f(a))$ wollen wir fortan diejenige Gerade bezeichnen, die den Punkt P enthält und den Graphen in P berührt, die also in P dieselbe Steigung wie der Graph von f hat.

In vielen Zusammenhängen ist es wichtig, die Gleichung der Tangente zu kennen. Im Folgenden wollen wir ein Verfahren erarbeiten, wie man die Tangentengleichung für einen Punkt P des Graphen bestimmen kann.

Aus vergangenen Jahrgangsstufen wissen wir, dass Geraden mithilfe einer Gleichung $y = m \cdot x + c$ angegeben werden können, wobei der Parameter m die Steigung der Geraden angibt und der Parameter c den y-Achsenabschnitt, also die y-Koordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse. Die Steigung der Tangente entspricht gemäß der mit der Funktionenlupe gewonnenen Erkenntnis der Steigung des Graphen im Punkt P. Diese wird durch die 1. Ableitung in dem Punkt wiedergegeben, also ist $m = f'(a)$.
Nun müssen wir noch c bestimmen. Hierzu nehmen wir den Punkt $P(a\,|\,f(a))$, setzen dessen Koordinaten in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ ein und ermitteln über die Punkt-Steigungs-Form den Parameter c:
$f(a) = m \cdot a + c$; da $m = f'(a)$ ist, erhalten wir $f(a) = f'(a) \cdot a + c \Rightarrow c = f(a) - f'(a) \cdot a$

Insgesamt erhalten wir so für die Gleichung der Tangente: $y = f'(a) \cdot x + f(a) - f'(a) \cdot a$.
Ausklammern von $f'(a)$ ergibt:
$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$.

Merke

Eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(a \mid f(a))$ erhält man mit der allgemeinen **Tangentengleichung** $\mathbf{t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)}$.

Fall 2: Tangente von einem Punkt außerhalb des Graphen an den Graphen

Nun wollen wir die Gleichung der Tangente ermitteln, die von einem gegebenen Punkt $B(b \mid d)$ außerhalb des Graphen an den Graphen gelegt wird. Es ist also nicht bekannt, in welchem Punkt $P(a \mid f(a))$ der Graph von der Tangente berührt wird, wohl aber ist bekannt, dass der Punkt $B(b \mid d)$ zur Tangente gehört. Ebenso ist bekannt, dass die Tangentensteigung der Steigung im Punkt $P(a \mid f(a))$ entspricht.

1. Schritt: Ausgangspunkt ist die allgemeine Gleichung der Tangente in $P(a \mid f(a))$; sie lautet $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$. Da f' benötigt wird, leiten wir $f(x)$ ab.

2. Schritt: Der Punkt $B(b \mid d)$ muss auf dieser Tangente liegen. Man macht also die Punktprobe mit dem Punkt $B(b \mid d)$. Dazu setzt man in der Tangentengleichung für x die Koordinate b und für y die Koordinate d des Punktes B ein. Man erhält die Gleichung $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$.

In dem Fall, dass keine Tangente existiert, hat die Gleichung im 2. Schritt keine Lösung (Beispiel: $f(x) = x^2$, $B(0 \mid 1)$).

3. Schritt: Da $B(b \mid d)$ gegeben ist, ist in $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$ nur noch a unbekannt. Man bestimmt a; möglicherweise hat die Gleichung mehrere Lösungen $a_1, a_2, a_3 \dots$

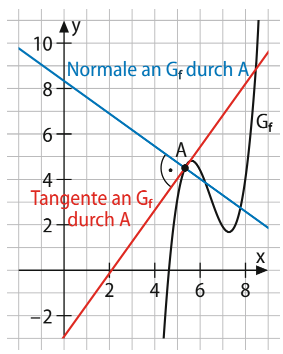
4. Schritt: Durch Einsetzen der Lösungen a_i erhält man die gesuchten Berührpunkte $A_i(a_i \mid f(a_i))$. Die zugehörigen Tangentengleichungen lauten: $y_i = f'(a_i) \cdot (x - a_i) + f(a_i)$.

Merke

Legt man eine **Tangente von einem Punkt $B(b \mid d)$ außerhalb des Graphen** von f an den Punkt $P(a \mid f(a))$ des Graphen an, so hat die zugehörige Tangente die Gleichung $\mathbf{t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)}$, wobei man a über die Gleichung $d = f'(a) \cdot (b - a) + f(a)$ ermittelt.

Liegt der Punkt außerhalb des Graphen, gibt es oft zwei oder mehr Tangenten an den Graphen.

Eine Gerade n, die senkrecht zur Tangente an den Graphen in P verläuft, heißt Normale. Sie haben bereits gelernt, dass für die Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden, die senkrecht zueinander stehen, gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$, also $m_2 = -\frac{1}{m_1}$. Daraus folgt:



Merke

Die Gleichung für die Gerade, die im Punkt $P(a \mid f(a))$ senkrecht auf der Tangente an den Graphen einer Funktion f steht, nennt man **Normalengleichung**. Sie lautet (mit $f'(a) \neq 0$)
$\mathbf{n(x) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a) + f(a)}$.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = 2x^2 - 1$; $P(3 \mid f(3))$ **b)** $f(x) = x^3$; $P(2 \mid f(2))$
c) $f(x) = x^2 + 0{,}5x$; $P(-3 \mid f(-3))$ **d)** $f(x) = x^2 + 5x$; $P(-2 \mid f(-2))$
e) $f(x) = x - x^3$; $P(1 \mid f(1))$ **f)** $f(x) = \frac{1}{x}$; $P(-3 \mid f(-3))$

Beispiel
Tangente von außen

2 **a)** Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten t an den Graphen von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, die von dem außerhalb des Graphen liegenden Punkt $B(4 \mid 2)$ angelegt werden.
b) Berechnen Sie den jeweiligen Steigungswinkel der Tangenten.

Lösung:

a) *Mit $f'(x) = \frac{2}{3}x$ liefert der Ansatz $2 = f'(a) \cdot (4 - a) + f(a)$ die Gleichung*

$2 = \frac{2}{3}a \cdot (4 - a) + \frac{1}{3}a^2$. Wir lösen nach a auf:

$2 = \frac{8}{3}a - \frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{3}a^2 = \frac{8}{3}a - \frac{1}{3}a^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}a^2 + \frac{8}{3}a - 2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 8a + 6 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 4 \pm 3{,}16 \Rightarrow a_1 = 7{,}16;\ a_2 = 0{,}84$

Für a_1 erhält man mit dem Ansatz $t(x) = f'(a_1) \cdot (x - a_1) + f(a_1)$ die Gleichung $t(x) = 4{,}77 \cdot (x - 7{,}16) + 17{,}09 = 4{,}77x - 17{,}06$.

Für a_2 erhält man mit dem Ansatz $t(x) = f'(a_2) \cdot (x - a_2) + f(a_2)$ die Gleichung $t(x) = 0{,}56 \cdot (x - 0{,}84) + 0{,}24 = 0{,}56x - 0{,}24$.

b) *Für den Steigungswinkel a gilt: $\tan(\alpha) = f'(a)$. Für a_1 erhält man somit $\alpha_1 = 78{,}17°$ und für a_2 erhält man $\alpha_2 = 29{,}25°$.*

3 Bestimmen Sie die Gleichung(en) der Tangente(n) t an den Graphen von f, die von dem außerhalb des Graphen liegenden Punkt B (b | d) angelegt wird (werden), und berechnen Sie den jeweiligen Steigungswinkel.

a) $f(x) = x^2$; $P(0 \mid -1)$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^3$; $P(1 \mid -2)$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x}$; $P(-2 \mid 2)$

4 Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen n an den Graphen von f im Punkt P.

a) $f(x) = x^2 + 5x$; $P(1 \mid 6)$ **b)** $f(x) = x^3$; $P(0{,}5 \mid 0{,}125)$ **c)** $f(x) = \sqrt{x} - x$; $P(4 \mid -2)$

Nachgefragt

- Ursprünglich haben Sie Tangenten in der Geometrie als Kreistangenten kennengelernt. Beschreiben Sie, welche Gemeinsamkeiten und welche Unterschiede zu den Tangenten an Funktionsgraphen bestehen.
- Erläutern Sie, wie man Kreistangenten konstruieren kann.
- Die geometrische Konstruktion von Tangenten an Funktionsgraphen funktioniert nur bei sehr wenigen Funktionen wie z. B. bei Parabeln. Recherchieren Sie, wie man mittels der Tangenten an eine Parabel deren sogenannten Brennpunkt konstruieren kann.

5 Geben Sie die Gleichung der Tangenten und der Normalen an den Graphen der Funktion f in den Punkten $P(1 \mid f(1))$ und $Q(-1 \mid f(-1))$ an.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{8x^3 - 4x}{2x}$ **c)** $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

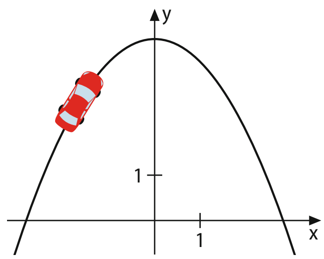
6 **a)** Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x$ und g mit $g(x) = -x^2 + 5x$ in einem Punkt schneiden und in einem Punkt berühren. Ermitteln Sie jeweils die Koordinaten der Punkte.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der gemeinsamen Tangente der Graphen von f und g.

7 Ein Auto rutscht bei spiegelglatter Fahrbahn von der Strecke, die durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4 - 0{,}5x^2$ beschrieben werden kann.

a) Das Auto rutscht im Punkt $(-1{,}5\,|\,2{,}875)$ von der Strecke. Prallt es gegen einen Felsen, der bei $(0\,|\,5)$ liegt?

b) Das Auto prallt im Punkt $(0\,|\,6)$ gegen einen Baum. Die zu Hilfe gerufene Polizei muss nun rekonstruieren, wo das Auto die Strecke verlassen hat.



Beispiel
Tangenten im Anwendungskontext

Lösung:

a) *Wir ermitteln die Tangentengleichung an den Graphen von f im Punkt $(-1{,}5|2{,}875)$. Mit dem Ansatz $t(x) = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$ erhalten wir mit $f'(x) = -x$, $a = -1{,}5$ und $f(a) = 2{,}875$ als Tangentengleichung*
$t(x) = f'(-1{,}5)\cdot(x + 1{,}5) + f(1{,}5) = 1{,}5\cdot(x + 1{,}5) + 2{,}875 = 1{,}5x + 5{,}125$.
Setzen wir $x = 0$ ein, erhalten wir $t(0) = 5{,}125$. Das Auto prallt nicht gegen den Felsen.

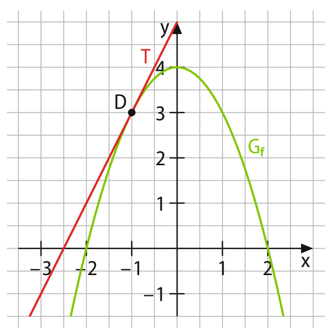
b) *Wir ermitteln die Tangentengleichung über den Ansatz $t(x) = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$, wobei a über die Gleichung $d = f'(a)\cdot(b-a) + f(a)$ ermittelt wird und $b = 0$, $d = 6$ ist.*
$d = f'(a)\cdot(b-a) + f(a) \Leftrightarrow 6 = -a\cdot(6-a) + 4 \Leftrightarrow a_2 - 6a - 2 = 0$
$\Leftrightarrow a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2+9} = 3 \pm 3{,}32 \Rightarrow a_1 = 6{,}32,\ a_2 = -0{,}32$.
Die Stelle a_1 scheidet aus, da das Auto von links kommt. $\Rightarrow a = -0{,}32$.
Das Auto hat die Strecke im Punkt $(-0{,}32|3{,}95)$ verlassen.

8 Ein Heuhaufen kann mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 4$ modelliert werden. An den Haufen soll eine Leiter so angelehnt werden, dass sie ihn in einer Höhe von 3 m vom Boden aus berührt.

a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung im Punkt $(3\,|\,f(3))$.

b) Unter welchem Winkel zum Boden muss die Leiter angelegt werden? Berechnen Sie dazu den Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse.

c) Wie weit vom Fuß des Heuhaufens muss die Leiter auf dem Boden aufgesetzt werden?



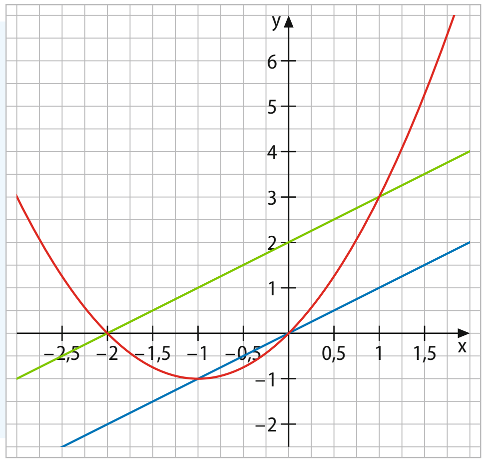
Nachgefragt

- Lassen Sie von einem Plotter die Graphen der Funktionen f_1 mit $f_1(x) = x^{100} + 1$ und f_2 mit $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1$ zeichnen. Die Graphen scheinen ziemlich „eckig“ zu sein. Zoomen Sie in die „Ecken“ und erläutern Sie den Zusammenhang zum Inhalt dieses Kapitels.
- Recherchieren Sie, was man unter „Hüllkurven“ versteht, zeichnen Sie mithilfe eines Funktionenplotters die Hüllkurve einer Funktion und erläutern Sie den Zusammenhang zum Inhalt des Kapitels.

Entdecken

Kombiniert man die beiden Terme x und $(x + 2)$ durch Multiplikation, erhält man $x \cdot (x + 2)$. Die Abbildung zeigt die Graphen dieser Funktionen.

- Warum können Sie anhand der Graphen entscheiden, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen beider Faktoren ist, d. h. wenn $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ gilt, ist $f'(x) \neq g'(x) \cdot h'(x)$?



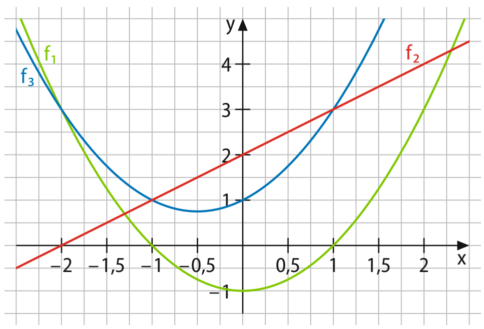
Verstehen

Bisher haben wir vor allem ganzrationale Funktionen, z. B. f mit $f(x) = x^3 + 2x - 1$, betrachtet; in ihnen sind Termbausteine (hier x^3, $2x$ und 1) entweder additiv oder subtraktiv verknüpft.

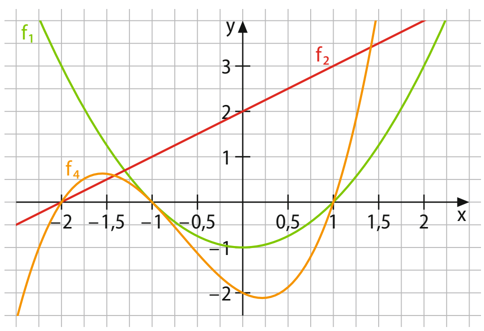
Zur Erinnerung:
3. binomische Formel
$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$

Im Folgenden wollen wir die multiplikative Verknüpfung von Termbausteinen betrachten. Zunächst verknüpfen wir die beiden Termbausteine $(x^2 - 1)$ und $(x + 2)$ additiv miteinander und schauen uns sowohl die Graphen von $f_1(x) = x^2 - 1$ und $f_2(x) = x + 2$ an als auch den Graphen der durch Addition entstandenen Funktion $f_3(x) = (x^2 - 1) + (x + 2) = x^2 + x + 1$.

Man erkennt: Die Addition der beiden Funktionen verändert den Graphen der Funktion, die den höheren Grad hat (also $f_1(x)$), nicht wesentlich, er verschiebt sich, wodurch sich auch die Anzahl der Nullstellen ändert; der prinzipielle Kurvenverlauf aber ist ähnlich.
Nun multiplizieren wir die beiden Terme miteinander und betrachten die daraus resultierende Funktionsgleichung und deren Graphen:
$f_4(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.



Wir sehen, dass sich nun einiges verändert hat: Der prinzipielle Kurvenverlauf hat sich ebenso verändert wie die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Extrempunkte, das Steigungsverhalten, die Monotonie. Insofern ist es folgerichtig, dass sich auch die Ableitung ändert, wenn das Produkt aus Termen gebildet wird.



Merke

Bildet man das Produkt zweier Funktionen, entsteht eine neue Funktion mit gänzlich anderen Eigenschaften als die beiden Ausgangsfunktionen. Unter anderem ist auch deren Steigungsverhalten völlig verschieden und somit deren Ableitung.

Im vorliegenden Fall ist die Ableitung des Produkts der beiden Funktionen f_1 und f_2 leicht zu bestimmen, denn das Ausmultiplizieren und anschließende Ableiten liefert das Gewünschte:
$f_4(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
$f'_4(x) = 3x^2 + 4x - 1.$

In vielen Fällen ist es aber wünschenswert, manchmal auch gar nicht anders möglich, die Ableitung direkt (ohne Ausmultiplizieren) zu bestimmen.
Wir starten mit einer Vermutung: Ist die Ableitung der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ vielleicht $f(x) = u'(x) \cdot v'(x)$?
Für obiges Beispiel würde dies mit $u(x) = x^2 - 1$ und $v(x) = x + 2$ bedeuten:
$f'_4(x) = 2x \cdot 1 = 2x,$ also eine lineare Funktion. Die Steigung des Graphen von $f_4(x)$ würde also beständig zunehmen. Das ist falsch, wie man am Graphen der Funktion $f_4(x)$ sieht.

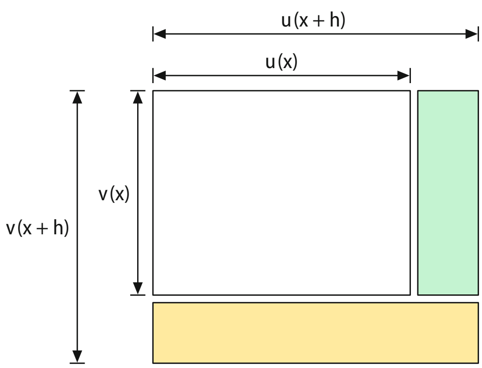
Wir müssen also einen anderen Weg wählen: Für jeden Wert von x können wir u (x) und v (x) als Länge und Breite eines Rechtecks interpretieren und das Produkt von u und v als dessen Flächeninhalt.

Ändern wir x um den Betrag h, hat dies Auswirkungen auf u und auf v, beide Rechtecksseitenlängen ändern sich und somit auch der Flächeninhalt des Rechtecks.

Den Rand kann man in zwei Teile zerlegen und die Flächeninhalte jeweils berechnen:

$(u(x + h) - u(x)) \cdot v(x)$

$(v(x + h) - v(x)) \cdot u(x + h)$



Wir erinnern uns: Die Ableitung an einer Stelle x kann man mithilfe des Differentialquotienten berechnen: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$. Der Differentialquotient gibt die (momentane) Änderung (hier: des Flächeninhalts) an.

Da uns die Ableitung interessiert, wenden wir diese Definition auf unsere Veranschaulichung mittels der Funktionen u und v an. Die Subtraktion der beiden Rechteckflächen liefert bei gleichzeitiger Division durch h:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} \cdot v(x) + \lim_{h \to 0} u(x) \cdot \frac{v(x + h) - v(x)}{h}$$
$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Wir erhalten damit die

Merke

Produktregel der Differentialrechnung:
Ist f das Produkt zweier Funktionen u und v, d. h. gilt $f = u \cdot v$, so kann man die Ableitung dieses Produkts wie folgt berechnen: $\mathbf{f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$.

Merkregel:
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Aufgaben

Beispiel
Produktregel

1 Leiten Sie mit der Produktregel ab: $f(x) = x^3 \cdot (x-3)$.

Lösung:

Mit $u(x) = x^3$ und $v(x) = (x-3)$ ergibt sich:

$f'(x) = 3x^2 \cdot (x-3) + x^3 \cdot 1 = 3x^3 - 9x^2 + x^3 = 4x^3 - 9x^2$

2 Leiten Sie mit der Produktregel ab.

a) $f(x) = (1+2x)^2$ **b)** $f(x) = x \cdot (x+5)$ **c)** $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$

d) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = (x+2) \cdot (2x-3)$ **f)** $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt{x^3}$

3 Ergänzen Sie die fehlenden Bausteine.

a) $f(x) = (x+4)^2$; $f'(x) = \bigcirc \cdot (x+4) + \square \cdot 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (x+1)$; $f'(x) = \bigcirc \cdot (x+1) + \sqrt{x} \cdot 1$

c) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x^3}$; $f'(x) = 2 \cdot \bigcirc + 2x \cdot \square$

d) $f(x) = (3x+2) \cdot (2x-3)$; $f'(x) = \bigcirc \cdot \square + \triangle \cdot 2$

Lösungen zu 4:
$2x-2$; $3x^2$; $3x^2+4x$; $3x^2+2x-1$; $-4x^3+3x^2$; $4x^3-16x$

4 Leiten Sie ab, indem Sie **1** erst ausmultiplizieren bzw. indem Sie **2** die Produktregel anwenden. Vergleichen Sie Ihre beiden Ergebnisse.

a) $f(x) = x^2(2+x)$ **b)** $f(x) = (x-1)^2$ **c)** $f(x) = x(x^2+x-1)$

d) $f(x) = (x+2)^2(x-2)^2$ **e)** $f(x) = (x+1)(x^2-x+1)$ **f)** $f(x) = x^3(1-x)$

5 Bilden Sie die erste Ableitung auf zwei verschiedene Arten.

a) $f(x) = (x+1)(3x-3)$ **b)** $f(x) = (x^2-1)(x+1)$ **c)** $f(x) = (x^2+2)^2$

d) $f(x) = 3x \cdot \sqrt{x}$ **e)** $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ **f)** $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x^3}$

6 Welche Regeln werden für die Bestimmung der Ableitung jeweils benötigt?

a) $f(x) = x^3(x^2-1)$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot (x-1)^2$

c) $f(x) = x\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = (x+2)^2(x^2-1)$

e) $f(x) = (x^2-x)^2$ **f)** $f(x) = \sqrt{2x} - x^2$

Potenzregel | Summenregel | Faktorregel | Produktregel

Nachgefragt

- Entscheiden Sie, bei welchen der angegebenen Funktionen die Produktregel zur Bestimmung der Ableitung angewendet werden kann und ob dies jeweils sinnvoll ist.
  $f_1(x) = x \cdot x$ $f_2(x) = \pi \cdot x^3$ $f_3(x) = (x-1)^2$ $f_4(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x}$
- Geben Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, bei dem die Anwendung der Produktregel das Aufstellen der Ableitungsfunktion erleichtert.
- Zeigen Sie an einem geeigneten Beispiel, welcher der beiden Vorschläge für die Ableitungsregel von Produkten $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ richtig ist.
  1 $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x)$ **2** $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

7 Wo steckt der Fehler?

a) $f(x) = 2x \cdot \sqrt{x}$; $f'(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $f(x) = (x^2-2)^2$; $f'(x) = 4x^2(x^2-2)$

c) $f(x) = x^2(x+3)$; $f'(x) = 2(x+3) + x^2 \cdot 3$ **d)** $f(x) = \sqrt{4x} \cdot \sqrt{9x}$; $f'(x) = 2x \cdot \sqrt{9x} + \sqrt{4x} \cdot 3x$

8 Zeigen Sie, dass die Funktion f′ die Ableitung der Funktion f ist:
$f'(x) = 6 \cdot (3x+2)$; $f(x) = (3x+2)^2$.

Lösung:
Wir leiten $f(x) = (3x+2)^2 = (3x+2)\cdot(3x+2)$ *nach der Produktregel ab:*
$f'(x) = 3\cdot(3x+2) + (3x+2)\cdot 3 = 9x+6+9x+6 = 18x+12 = 6\cdot(3x+2)$.

Beispiel
Produktregel

9 Zeigen Sie jeweils, dass F diejenige Funktion ist, deren Ableitung f ist.

a) $F(x) = (2x-4)^2$; $f(x) = 8x-16$
b) $F(x) = \left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2$; $f(x) = 4x^3-\frac{8}{3}x$
c) $F(x) = (x^2-1)\cdot(x+1)$; $f(x) = 3x^2+2x-1$
d) $F(x) = (x^2+3x)\cdot(3x-3)$; $f(x) = 3(3x^2+4x-3)$

Die Funktion F nennt man auch ***Stammfunktion*** *von f.*

10 Calculate the derivatives of f and determine all x for which the graph of f has a horizontal tangent.

a) $f(x) = 3(x+1)^2$
b) $f(x) = 8x^3+4x$

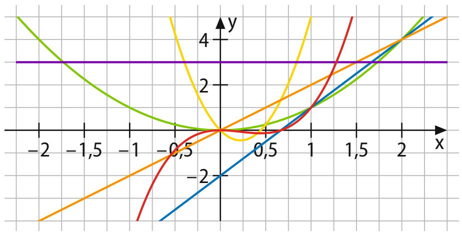
11 Geben Sie jeweils eine Funktion f an, die die Ableitungsfunktion f′ besitzt.

a) $f'(x) = x+4x^2$
b) $f'(x) = 4$
c) $f'(x) = 0$
d) $f'(x) = 2+0{,}5x$
e) $f'(x) = (1-x)^2$
f) $f'(x) = (x-1)^2$

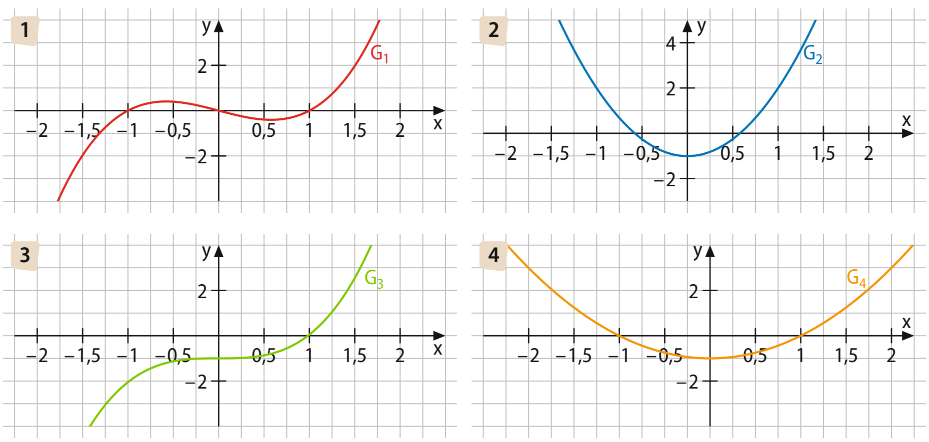
12 Es ist $f'(x) = 2-x+3x^2$. Geben Sie jeweils diejenige Funktion f an, die die Ableitung f′ besitzt und deren Graph …

a) durch den Ursprung verläuft.
b) durch den Punkt $P(2\,|\,-3)$ verläuft.

13 Aus den beiden Funktionen $f_1(x) = x^2$ und $f_2(x) = 3x-2$ wird die Funktion $f_3(x) = x^2\cdot(3x-2)$ gebildet.
Im Bild sind die Graphen von $f_1, f_2, f_3, f'_1, f'_2$ und f'_3 dargestellt. Welcher Graph gehört zu welcher Funktion bzw. Ableitungsfunktion?

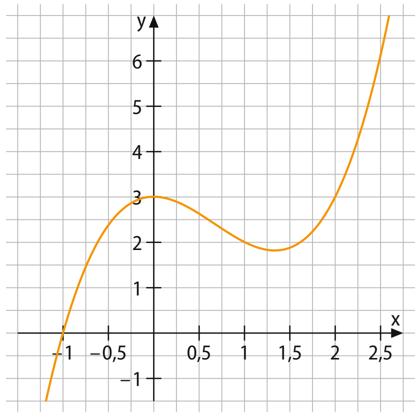


14 Welcher der abgebildeten Graphen gehört zur Ableitungsfunktion von f mit $f(x) = (x^2+x)\cdot(x-1)$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

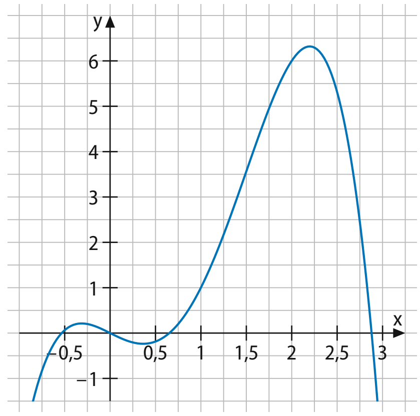


15 Schätzen Sie den Wert der Steigung an den angegebenen Stellen und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse rechnerisch.

a) $f(x) = x^2(x-2)+3;\ x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1$



b) $f(x) = -x(x^3+3x^2-1);\ x_1 = -0{,}5;\ x_2 = 1$



16 **a)** Bestimmen Sie die Nullstellen x_{N_1} und x_{N_2} der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}\cdot(x-1)$.

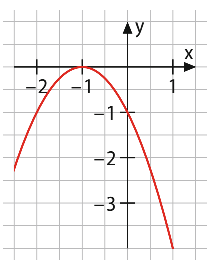
b) Welche Steigung haben die Tangenten an den Graphen der Funktion f in x_{N_1} und x_{N_2}?

Eine Skizze hilft.

c) Überprüfen Sie, ob der Graph der Funktion f eine waagerechte Tangente besitzt.

17 Überprüfen Sie folgenden Satz: Wenn der Graph von f mit $f(x) = 3x^3 - 4x$ an der Stelle $x_0 = a$ eine waagerechte Tangente hat, dann hat auch der Graph von g mit $g(x) = [f(x)]^2$ dort eine waagerechte Tangente.

- Ermitteln Sie zunächst die Stellen mit waagerechter Tangente.
- Stellen Sie den Term g(x) auf; ermitteln Sie die Stellen mit waagrechter Tangente.
- Vergleichen Sie anschließend.



Doppelte Nullstelle *heißt, dass dort Nullstelle und Extremstelle zusammenfallen.*

18 Der Graph der Funktion f_1 mit $f_1(x) = -(x+1)^2$ besitzt an $x_0 = -1$ eine doppelte Nullstelle.

a) Zeigen Sie, dass auch der Graph der Funktion f_2 mit $f_2(x) = x\cdot f_1(x)$ die x-Achse im Punkt $(-1\,|\,0)$ berührt.

b) Ist ein Hochpunkt des Graphen von f_1 auch ein Hochpunkt des Graphen von f_2? Untersuchen Sie.

c) Durch die Hinzunahme eines weiteren Faktors x erhält man die Funktion f_3 mit $f_3(x) = -x^2\cdot(x+1)^2$. Welche Veränderung bewirkt dies am Graphen? Überlegen Sie und überprüfen Sie anschließend durch Rechnen.

19 Der Graph der Funktion g_1 mit $g_1(x) = (x+2)^2\cdot(x-1)^2$ besitzt zwei doppelte Nullstellen.

a) Geben Sie diese beiden doppelten Nullstellen an.

b) Begründen Sie, dass es sich tatsächlich um doppelte Nullstellen handelt, d.h. weisen Sie das gleichzeitige Vorhandensein von Extrema an diesen Stellen nach.

c) An welchen Stellen besitzt die Tangente an dem Graphen von g_1 die Steigung -4?

d) Beschreiben Sie (ohne vorherige Berechnung), wodurch sich der Graph der Funktion g_2 mit $g_2(x) = (x+2)^2 + (x-1)^2$ von dem von g_1 unterscheidet.

e) Weisen Sie nach, dass man $g_1'(x)$ in der Form $g_1'(x) = 2(x+2)(x-1)(2x+1)$ schreiben kann. Bestimmen Sie mit dieser Darstellung die Monotoniebereiche der Funktion $g_1(x)$.

f) Untersuchen Sie die Funktion g_2 auf Symmetrie.

Merke

Ist ein Faktor eines Funktionsterms ein Quotient, in dessen Nenner die Variable steht, erhält man eine Quotientenfunktion: $f(x) = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$. Die Ableitung dieser Quotientenfunktion ergibt sich aus der Produktregel; man nennt sie **Quotientenregel**: Für die Ableitung f' des Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ zweier differenzierbarer Funktionen u und v gilt

$$\mathbf{f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}}.$$

Beispiel Quotientenregel

20 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2}{x^2 - x}$ mit der Quotientenregel. Gibt es noch eine andere (vielleicht geschicktere, weil weniger aufwändige) Möglichkeit?

Lösung:

Mit $u(x) = 2x^3 - 2x^2$ und $v(x) = x^2 - x$ ergibt sich $u'(x) = 6x^2 - 4x$ und $v'(x) = 2x - 1$.

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 4x) \cdot (x^2 - x) - (2x^3 - 2x^2) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{(6x^2 - 4x) - (2x) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x)} = \frac{6x - 4 - 4x + 2}{x - 1} = \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$$

In diesem Fall ist es geschickter, den Funktionsterm vor dem Ableiten zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x^2}{x^2 - x} = \frac{2x^2(x - 1)}{x(x - 1)} = 2x \Rightarrow f'(x) = 2.$$

21 Ermitteln Sie jeweils die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{2x - 1}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{3x + 2}{x^2}$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2x}$

d) $f(x) = \frac{3}{2x^3}$ **e)** $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x \cdot (x - 2)}$ **f)** $f(x) = \frac{(3x + 3) \cdot (x - 1)}{x^4 \cdot (x^2 - 1)}$

22 An welchen Stellen hat die Ableitung der Funktion den Wert a?

a) $f(x) = \frac{1 - x^2}{x}$; $a = -3$ **b)** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$; $a = -1$ **c)** $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; $a = -1$

23 An welchen Stellen stimmen die Funktionswerte von f′ und g′ überein? Was bedeutet dies geometrisch? Skizzieren Sie jeweils die Graphen der Funktionen f und g.

a) $f(x) = \frac{1}{x + 1}$; $g(x) = \frac{1}{x - 1}$ **b)** $f(x) = \frac{-2x}{\frac{1}{2}x - 1}$; $g(x) = (x - 2)^2$

24 Überprüfen Sie an Beispielen und beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Hat der Graph von f an einer oder mehreren Stellen die x-Achse als waagrechte Tangente, dann hat auch der Graph von $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, mindestens eine waagrechte Tangente.

Nachgefragt

- Skizzieren und erläutern Sie die Vorgehensweise, wie man die Produktregel herleiten kann.
- Führen Sie ein Beispiel an, bei dem das Aufstellen der Ableitung unter Zuhilfenahme der Produktregel sehr sinnvoll ist und den Arbeitsaufwand minimiert. Führen Sie ein zweites Beispiel einer Funktion an, die man sowohl mit der Produktregel als auch ohne die Produktregel ableiten kann. Führen Sie drittens ein Beispiel an, bei dem man die Produktregel zwar anwenden kann, bei dem sie aber keine Erleichterung bringt.
- Erläutern Sie an einem Beispiel, dass die Faktorregel ein Spezialfall der Produktregel ist.
- Erläutern Sie an einem Beispiel, in welchem Kontext man die Differentialrechnung (und damit zum Beispiel auch die Produktregel) anwenden kann.
- Recherchieren Sie: Was versteht man unter dem isoperimetrischen Problem? Was hat es mit dem Inhalt dieses Kapitels zu tun?

1.4 Die Verkettung von Funktionen und die Kettenregel

Entdecken

Mit einem 3D-Drucker können in mehreren Schritten komplexe Werkstücke hergestellt werden. Dabei baut jeder Schritt auf das Ergebnis des jeweils vorangehenden Schritts auf.

- Ähnliches ist auch in der Mathematik möglich. Inwiefern kann man Funktionen wie f mit $f(x) = (x+1)^2$ oder g mit $g(x) = \sqrt{3x-1}$ als Hintereinanderausführung von Funktionen interpretieren?
- Finden Sie weitere Beispiele für eine solche „Verkettung“ von Funktionen.

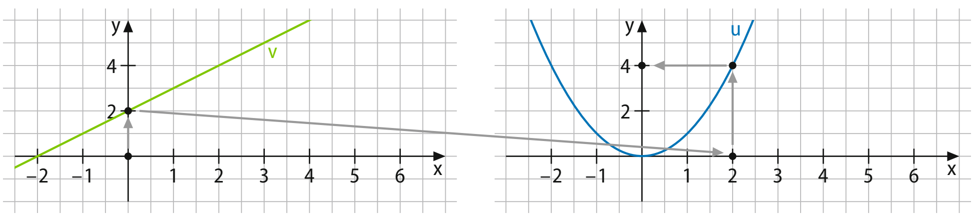
Verstehen

Bisher haben Sie Funktionen bzw. Termbausteine stets durch die Operatoren $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ verknüpft. Nun lernen Sie eine neue Art der Verknüpfung kennen: die Verkettung. Bei der Verkettung werden Funktionen hintereinander ausgeführt.
Wir betrachten hierzu als Beispiel die Funktion f mit $f(x) = (x+2)^2$. Man wird zunächst $(x+2)$ berechnen und das Ergebnis anschließend quadrieren. Zuerst wird also mit v der Funktionswert $v(x) = (x+2)$ ermittelt und dann wird auf diesen Funktionswert die Funktion u mit $u(x) = x^2$ angewendet.

x → **Funktion v** → v (x) → **Funktion u** → **u (v (x))**

Die nebenstehende Wertetabelle spiegelt diesen Prozess wider.
Graphisch umsetzen kann man ihn, indem man zunächst das Schaubild von $v(x) = (x+2)$ zeichnet und anschließend auf Werte dieses Schaubilds die Funktion $u(v(x)) = (x+2)^2$ anwendet.

x	v (x)	u (v (x))
−1	1	1
−0,5	1,5	2,25
0	2	4
0,5	2,5	6,25
1	3	9



u ∘ v liest man „u verkettet mit v“.

Man bezeichnet eine solche Art der Verknüpfung als Verkettung $f = u \circ v$ zweier Funktionen.

Merke

Beim Verketten zweier Funktion u und v entsteht eine neue Funktion $f = u \circ v$ mit dem Funktionsterm $f(x) = u(v(x))$.

Beispiel I:
$v(x) = x + 2,\ u(x) = x^2 \quad \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = (x+2)^2$
$v\colon x \mapsto v(x)$ wird innere Funktion und $u\colon x \mapsto u(x)$ wird äußere Funktion genannt.

Beispiel II:
$v(x) = 2 + 3x,\ u(x) = \sin(x) \ \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = \sin(2 + 3x)$.

Die Frage ist nun: Wie sieht die Ableitung solcher verketteter Funktionen aus?

Wir versuchen, diese Frage zu beantworten, indem wir die Verkettung zunächst auflösen und die daraus entstehende Funktion ableiten. Wir nehmen hierzu den Termbaustein $(4x-1)$ und multiplizieren ihn mit sich selbst; so erhalten wir $(4x-1)^2$.
Die Funktion f mit $f(x) = (4x-1)^2$ können wir – wie oben beschrieben – als Verkettung von $v(x) = (4x-1)$ mit $u(x) = x^2$ verstehen. Wir lösen die Verkettung nun auf:
$f(x) = (4x-1)^2 = (4x-1)\cdot(4x-1) = 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 16x^2 - 8x + 1.$
Diesen Ausdruck können wir leicht ableiten:
$f'(x) = 32x - 8 = 4\cdot(8x-2) = 4\cdot 2\cdot(4x-1).$
Wir vergleichen diesen Ausdruck mit der Ableitung der inneren Funktion und der Ableitung der äußeren Funktion: $v(x) = (4x-1) \Rightarrow v'(x) = 4$
$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

Zur Erinnerung:
2. binomische Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, dass man die Ableitung einer verketteten Funktion bildet, indem man die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert. Wir wollen diese Vermutung anhand zweier weiterer Beispiele überprüfen.

1 Wir bilden aus $u(x) = x-1$ und $v(x) = 3x$ **a)** die Verkettung $u(v(x))$ und **b)** die Verkettung $v(u(x))$ und bestimmen jeweils ihre Ableitungen.

a) $u(v(x)) = u(3x) = (3x) - 1 = 3x - 1$
Die Ableitung davon ist 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion u die Zahl 1 und als Ableitung der äußeren Funktion v die Zahl 3. Das Produkt ergibt ebenfalls 3.

b) $v(u(x)) = v(x-1) = 3(x-1) = 3x - 3$
Die Ableitung davon ist wiederum 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion v die Zahl 3 und als Ableitung der äußeren Funktion u die Zahl 1. Das Produkt ergibt wieder 3.

2 Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$ und $D = \mathbb{R}^+$. Zur Berechnung der Ableitung formen wir zunächst um: $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} = x+2$. Die Ableitung ist 1.
Berechnet man die Ableitung über unsere Regel, ist $u(x) = x^2 + 4x + 4$ die innere Funktion u. Ihre Ableitung ist $u'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$.
Die äußere Funktion v ist $\sqrt{x} = x^{0,5}$, ihre Ableitung ist $v'(x) = 0{,}5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Insgesamt ergibt sich als Ableitung $f'(x) = \frac{2(x+2)}{2\cdot\sqrt{(x+2)^2}} = 1.$

Drei Positivbeispiele genügen natürlich nicht, um einen Satz zu beweisen. Das war hier aber auch gar nicht der Anspruch, sondern wir wollten ihn nur plausibel machen. Wir können auf dieser Basis also festhalten:

Merke

Die Ableitungsregel für eine verkettete Funktion $f(x) = u(v(x))$ lautet:

$$\mathbf{f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Dabei ist
- $u'(v(x))$ die Ableitung der **äußeren Funktion** an der inneren Funktion und
- $v'(x)$ die Ableitung der **inneren Funktion**.

Merkregel:
innere Ableitung mal äußere Ableitung

Aufgaben

1 Bilden Sie $u(v(x))$ und $v(u(x))$.

a) $u(x) = 3x;\ v(x) = 4x$ **b)** $u(x) = 5x;\ v(x) = x - 4$ **c)** $u(x) = 2x;\ v(x) = x^2$

d) $u(x) = 2x + 1;\ v(x) = 1 - x^2$ **e)** $u(x) = x - 2;\ v(x) = \sqrt{x}$ **f)** $u(x) = \frac{1}{x};\ v(x) = x^2$

2 Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = 2x + 1$ und $v(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

3 Bilden Sie $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ für $u(x) = 2\sqrt{x}$ und $v(x) = \frac{1}{x^2}$.

4 Stellen Sie die Funktionen f als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.

a) $f(x) = (x + 4)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ **c)** $f(x) = \frac{2}{3x + 4}$ **d)** $f(x) = x^2 + 6x + 9$

Beispiel
innere und äußere Funktion

5 Bestimmen Sie die innere Funktion $v(x)$ und die äußere Funktion $u(x)$ der Funktion f, die als Verkettung von u und v interpretiert werden kann: $f(x) = (x + 2)^2$. Bestimmen Sie anschließend $f(x) = v(u(x))$.

Lösung:

Als innere Funktion wählt man $v(x) = x + 2$, als äußere Funktion $u(x) = x^2$.

$v(u(x)) = (x^2) + 2 = x^2 + 2$.

6 Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Bestimmen Sie die innere Funktion v und die äußere Funktion u.

a) $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ **c)** $f(x) = x^2 + 8x + 16$

d) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x^2 + 1}}$ **e)** $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ **f)** $f(x) = \frac{2x}{4x^3 - 6x^2}$

Nachgefragt

- Ebenso wie in der Mathematik ist auch im Alltag die Reihenfolge der Verkettung von Ausdrücken in der Regel von Bedeutung. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf $u(v(x)) = v(u(x))$ bzw. $u(v(x)) \neq v(u(x))$.
  a) *Macht der Sprache und Sprache der Macht*
  b) *Studie der Themen und Themen der Studie*
  c) *Rundfahrt der Sieger und Sieger der Rundfahrt*
  d) *Liga der Champions und Champions der Liga*
  e) *Teiler der Zahl und Zahl der Teiler.*
- Erläutern Sie anhand einer Wertetabelle, dass die Reihenfolge bei der Verkettung der Funktionen f mit $f(x) = 3x - 2$ und g mit $g(x) = \sqrt{x + 1}$ eine Rolle spielt.
- In der Regel ist $u(v(x)) \neq v(u(x))$. Geben Sie drei Beispiele an, in denen $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

Beispiel
Kettenregel

7 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + 5x)^2$ auf zwei Arten.

Lösung:

1 *Mithilfe der Kettenregel: $u(v) = v^2;\ u'(v) = 2v;\ v(x) = 4 + 5x;\ v'(x) = 5;$*
$f'(x) = u'(v) \cdot v'(x) = 2 \cdot (4 + 5x) \cdot 5 = 40 + 50x$

2 *Mithilfe einer binomischen Formel erhält man $f(x) = 16 + 40x + 25x^2$; somit ist*
$f'(x) = 40 + 25 \cdot 2x = 40 + 50x$.

8 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit von f(x) auf zwei verschiedene Arten.

a) $f(x) = (2x-2)^2$ **b)** $f(x) = (x+1)^3$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2x^2-x}$

d) $f(x) = \frac{x}{2x^2-x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$ **f)** $f(x) = (x^2-10x+25)^{-2}$

Zur Erinnerung:
$\frac{1}{x} = x^{-1}$

9 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (wenn möglich) das Ergebnis.

a) $f(x) = (2x+4)^5$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{x+1}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^5+5}$ **f)** $f(x) = (5x^4-2x)^{-3}$

10 Untersuchen Sie f mit $f(x) = (5x+5)^2$ auf Monotonie und auf Extremstellen.

Lösung:

Nach der Kettenregel mit $v(x) = (5x+5)$ und $u(x) = x^2$ ist $f'(x) = 2(5x+5)\cdot 5 = 50x+50$.
Aus $50x+50 = 0$ erhält man $x = -1$.
Da $f'(x) < -1$ für alle $x < -1$ gilt, ist die Funktion für $x < -1$ streng monoton fallend;
für $x > -1$ ist $f'(x) > 0$, hier ist die Funktion also streng monoton steigend.
Da an $x = -1$ ein Vorzeichenwechsel in der 1. Ableitung von – nach + vorliegt, handelt es sich um eine Minimalstelle.

Beispiel
Monotonie

11 Find the intervals of monotonicity of the given function f and identify its extrema.

a) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2+0{,}5}$ **c)** $f(x) = (x+1)^3-2x-4$

12 Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im angegebenen Intervall I?

a) $f(x) = \sin(x+1)\cdot\sqrt{x+1}$; $I = [0; \pi]$ **b)** $f(x) = \cos^2(x+1) - 0{,}5$; $I = [0; 2]$

Zur Erinnerung: *Schneidet der Graph die x-Achse an der Stelle x_0, berechnet man den Schnittwinkel α über $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$.*

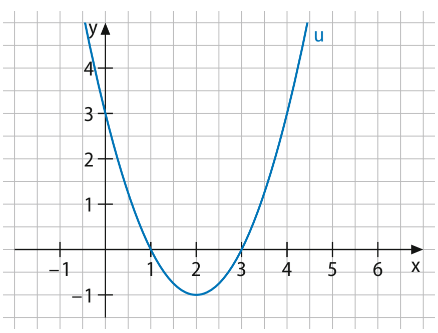
13 Vorgelegt sind die sechs Funktionsterme

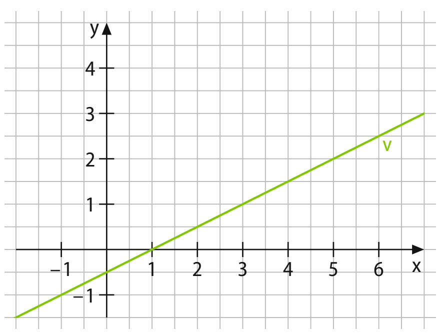
$f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 2x-1$ | $f_3(x) = 1+x$ | $g_1(x) = 3x-1$ | $g_2(x) = x^2-1$ | $g_3(x) = 2-3x$

Finden Sie heraus, welcher der folgenden Terme gleich $f_1(g_1(x))$, $f_1(g_2(x))$, $f_1(g_3(x))$, $f_2(g_1(x))$, $f_2(g_2(x))$, $f_2(g_3(x))$, $f_3(g_1(x))$, $f_3(g_2(x))$, $f_3(g_3(x))$ ist.

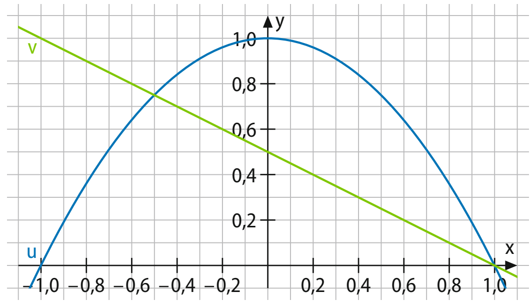
$3(2x-1)$ | $3-6x$ | $3x$ | x^2 | $2x^2-3$ | $9x^2-6x+1$ | x^4-2x^2+1 | $(2-3x)^2$ | $3-3x$

14 Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v. Bestimmen Sie für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ näherungsweise $u(v(x_0))$, $u(v(x_1))$ und $u(v(x_2))$ sowie $v(u(x_0))$, $v(u(x_1))$ und $v(u(x_2))$.

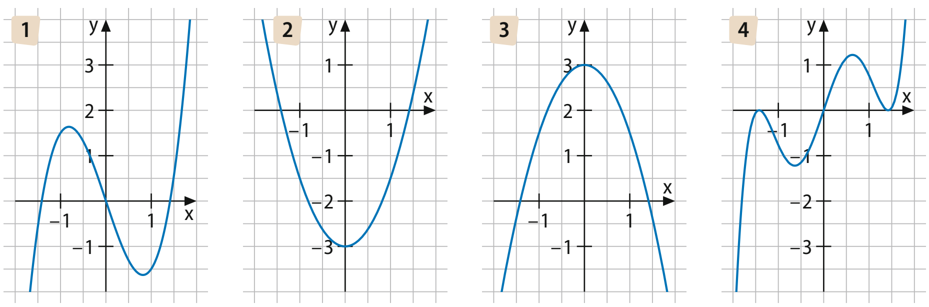




15 Bestimmen Sie zunächst die beiden Funktionsterme von u und v aus den jeweiligen Graphen und ermitteln Sie dann $u(v(x_0))$ und $v(u(x_0))$ für $x_0 = -1$, 0 und 1.



16 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (0{,}5x^2 - 1)^3$. Welcher der abgebildeten Graphen ist der von $f'(x)$? Argumentieren Sie.



17 Bestimmen Sie die Funktionen, die die angegebenen Ableitungen haben.

a) $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ **b)** $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$ **c)** $f'(x) = 4(x+3)^3$

d) $f'(x) = 12(x+3)$ **e)** $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ **f)** $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

18 Wo steckt der Fehler? Korrigieren Sie.

a) $f(x) = (4x-1)^3$; $f'(x) = 3(4x-1)^2$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - x}$; $f'(x) = \frac{1}{2}(6x-1)$

c) $f(x) = \frac{3}{x+1}$; $f'(x) = \frac{9}{(x+1)^2}$

19 Für welchen Wert von k entsteht ein Graph, der an der Stelle x_0 einen Extrempunkt besitzt? Geben Sie auch an, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

a) $f(x) = ((x+k)^2 + x)^2$; $x_0 = -2$ **b)** $f(x) = (x^2 + kx)^3$; $x_0 = 1$ **c)** $f(x) = ((x+k)^2 - 1)^4$; $x_0 = 1$

20 Man kann auch drei Funktionen miteinander verketten und davon die Ableitung bestimmen.

a) Ermitteln Sie die Ableitung von $k(x) = f(g(h(x)))$, indem Sie zunächst die Ableitung von $g(h(x))$ bestimmen und dann noch mit f verketten.

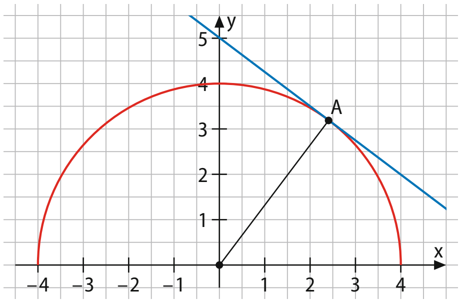
b) Führen Sie das Ganze am Beispiel $k(x) = (\sqrt{3x-1})^2$ durch.

21 Überprüfen Sie an einem Beispiel für $g(x) = [f(x)]^2$ den Satz: „Falls der Graph von f an der Stelle a eine waagrechte Tangente hat, dann hat auch der Graph der Funktion g an dieser Stelle eine waagrechte Tangente."

22 An den Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ wird im Punkt $A(x_0 | f(x_0))$ eine Tangente angelegt (siehe Zeichnung).

a) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente mithilfe der Eigenschaft der Tangente, dass sie senkrecht zum Radius steht.

b) Bestätigen Sie Ihr Ergebnis mithilfe von $f'(x)$.



Tipp:
Für die Steigungen m_1 und m_2 zweier senkrechter Geraden gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

23 Es ist $u(x) = 4x^2 + 2x$ und $v(x) = 3x - 5$.
Bilden und vereinfachen Sie die Funktionsterme $h(x) = u(v(x))$ und $k(x) = v(u(x))$ sowie ihre Ableitungen $h'(x)$ und $k'(x)$ und vergleichen Sie $[u(v(x))]'$ und $[v(u(x))]'$ miteinander. Was fällt Ihnen auf?

24 An den Graphen von f mit $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ sollen an den Stellen −0,5 und 0 die Tangenten angelegt werden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Tangenten.

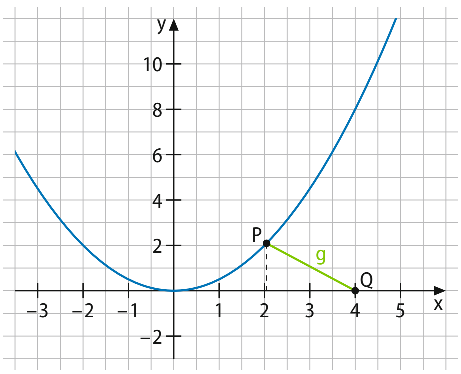
25 Wählen Sie für u(x), v(x) und w(x) drei einfache Funktionen. Bestimmen Sie $u(v(w(x)))$ und ermitteln Sie die Ableitung dieser doppelt verketteten Funktion. Versuchen Sie, eine Regel aufzustellen.

26 **a)** Bestimmen Sie den Punkt P auf der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$, der den kürzesten Abstand vom Punkt $Q(4|0)$ hat.

Tipp 1: Den Abstand können Sie mit dem Satz des Pythagoras bestimmen.

Tipp 2: Von dieser Abstandsfunktion ist das Minimum gesucht.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade PQ senkrecht zur Tangenten an den Graphen im Punkt P steht.

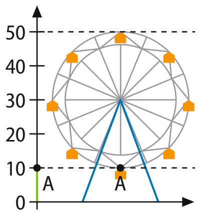


Nachgefragt

- Ist die Verkettung zweier linearer Funktionen wie z. B. $f(x) = 2(x + 2) + 3$ mit $u(x) = 2x + 3$ und $v(x) = x + 2$ wieder eine lineare Funktion? Beurteilen Sie anhand mehrerer konkreter Beispiele.
- Überprüfen Sie bei der Funktion g mit $g(x) = \sqrt{f(x)}$, ob gilt: Falls der Graph von f an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente hat, dann hat auch der Graph von g an x_0 eine waagrechte Tangente. Wählen Sie zunächst eine konkrete Funktion mit waagerechter Tangente und überprüfen Sie; danach sollten Sie die Überprüfung für eine allgemeine Funktion f durchführen.
- Probieren Sie anhand mehrerer Beispiele aus, ob $[u(v(x))]' = [v(u(x))]'$ sein kann, ohne dass $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

1.5 Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitung

Entdecken



Jede Gondel eines Riesenrads verändert beim Drehen des Rads ständig ihre Höhe über dem Boden.

- Beobachten Sie die Höhe über dem Boden einer Gondel für eine Umdrehung des Riesenrads und zeichnen Sie diese Höhe im Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Zeit ein (konstante Geschwindigkeit wird vorausgesetzt).
- Untersuchen Sie den entstehenden Graphen. Welche Eigenschaften hat er? Wie würde er sich bei der nächsten Umdrehung des Rads verändern?

Verstehen

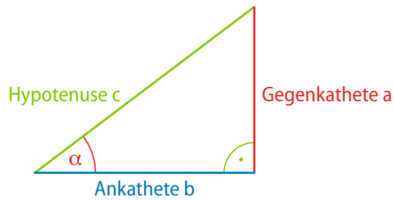
Wir nehmen die neuen Termbausteine sin und cos hinzu und betrachten Funktionen wie $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - 3)$ sowie deren Ableitung.

Hierzu wiederholen wir zunächst, wie der Sinus und der Kosinus sowie die Sinus- und die Kosinusfunktion definiert sind und wie deren Ableitungen aussehen.

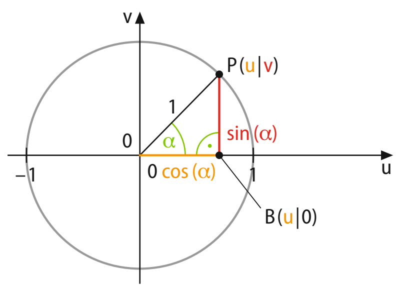
Für Winkel zwischen 0° und 90° sind Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck definiert als

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$



Wendet man diese Definition auf ein Dreieck im Einheitskreis an, also auf ein Dreieck, dessen Hypotenusenlänge 1 ist, kann man wie folgt definieren:
Liegt der Punkt $P(u|v)$ auf dem Einheitskreis, gilt für das zum Winkel α gehörende rechtwinklige Dreieck:
$\sin(\alpha) = v$ und $\cos(\alpha) = u$.

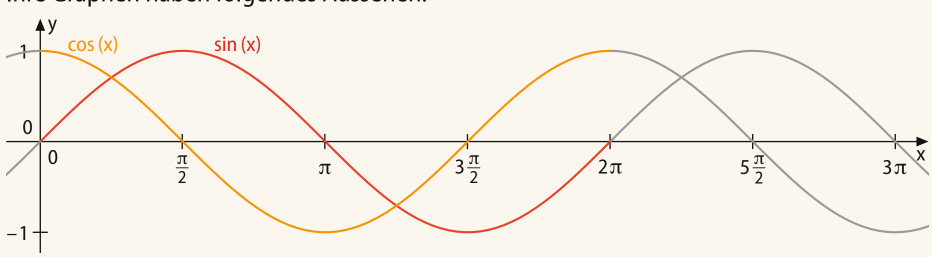


Mithilfe des Einheitskreises kann man Winkel also durch Längen ausdrücken.
Gleichzeitig wird durch jeden Winkel ein Kreisbogen der Länge x festgelegt, da α und x zueinander proportional sind. **x** nennt man das **Bogenmaß des Winkels α**.

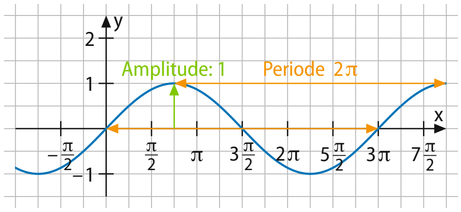
Merke

*Die Sinus- und die Kosinusfunktion gehören zu den **trigonometrischen Funktionen**.*

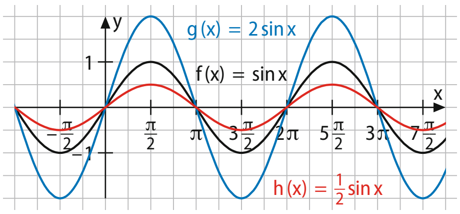
Die eindeutige Zuordnung, die jeder reellen Zahl x den Wert sin (x) zuordnet, nennt man **Sinusfunktion** $\mathbf{f(x) = \sin(x)}$. Analog nennt man die eindeutige Zuordnung, die jeder reellen Zahl x den Wert cos(x) zuordnet, **Kosinusfunktion** $\mathbf{g(x) = \cos(x)}$.
Ihre Graphen haben folgendes Aussehen:



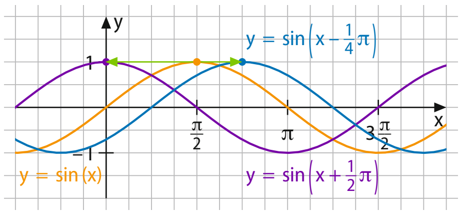
Die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen wiederholen sich jeweils nach 2π. 2π nennt man die **Periode**, den maximalen „Ausschlag“ der Funktionswerte (von der x-Achse aus gesehen) **Amplitude**.



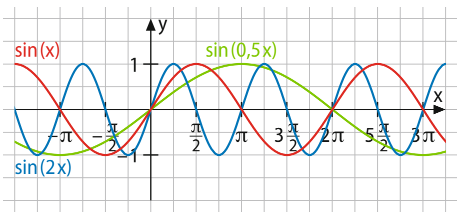
Kombinieren wir die Sinusfunktion mit den uns bekannten Termbausteinen, erhalten wir z. B. die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin(3(x-4)) + 3$, allgemein: $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$.
Wir variieren nun die einzelnen Parameter a, b, c und d, lassen uns die Graphen mit einem Funktionsplotter zeichnen, um ein Muster bezüglich der Auswirkungen zu erkennen.



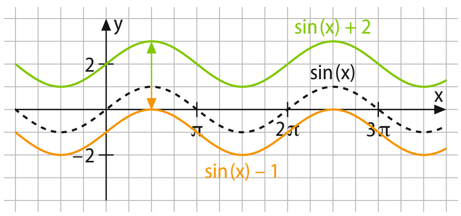
Der Parameter a bewirkt eine Streckung oder Stauchung des Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung. Die Zahl $A = |a|$ ist die Amplitude der Funktion.



Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung.



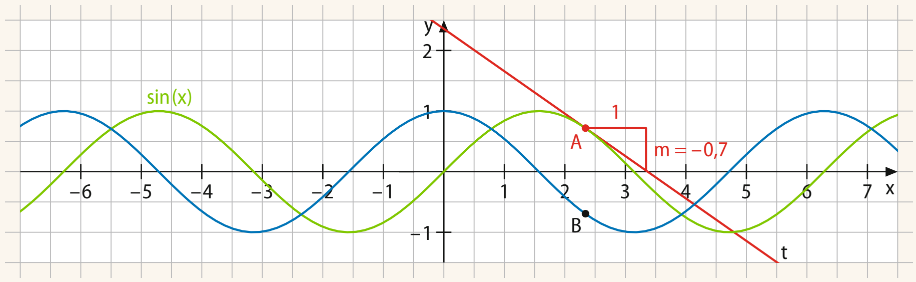
Der Parameter b bewirkt eine Streckung des Graphen der Sinusfunktion in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$. Die Funktion f mit $f(x) = \sin(b \cdot x)$ hat die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$.



Der Parameter d bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in y-Richtung.

Merke

Durch Betrachten der Tangentensteigungen des Graphen der Sinusfunktion (graphisches Differenzieren) erhält man folgenden Zusammenhang:



Für $f(x) = \sin(x)$ gilt: $f'(x) = \cos(x)$. Für $g(x) = \cos(x)$ gilt: $g'(x) = -\sin(x)$.

Aufgaben

1 Da durch jeden Winkel α ein Kreisbogen der Länge x (das **Bogenmaß des Winkels α**) festgelegt wird, und da der Umfang des Kreises $U = 2\pi r$ und damit der Umfang des Einheitskreises $(r = 1)$ $U = 2\pi$ ist und einem Vollwinkel von $\alpha = 360°$ entspricht, erhält man:

Gradmaß α	360°	180°	90°	1°	n°
Bogenmaß x	2π	π			

Beim Taschenrechner muss man den Modus von Gradmaß (degree, DEG) auf Bogenmaß (radian, RAD) umschalten, um Winkel im Bogenmaß zu bestimmen.

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

b) Begründen Sie auf Basis der Tabelle, dass gilt: $x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$.

c) Jede reelle Zahl bzw. jedes Bogenmaß x kann folglich als Winkel α aufgefasst werden. Begründen Sie, dass gilt: $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$.

Beispiel
Bogenmaß und Gradmaß

2 Verwandeln Sie vom Bogenmaß ins Gradmaß oder umgekehrt.

a) $\alpha = 45°$ **b)** $x = \frac{\pi}{2}$

Lösung:

a) *Wegen* $x = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi$ *ergibt sich für* $\alpha = 45°$*:* $x = \frac{1}{4} \cdot \pi$.

b) *Wegen* $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$ *ergibt sich* $x = \frac{\pi}{2}$*:* $\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot 180° = 90°$.

3 Verwandeln Sie ins Gradmaß.

a) π **b)** 10 **c)** 1 **d)** 0,1

4 Verwandeln Sie ins Bogenmaß.

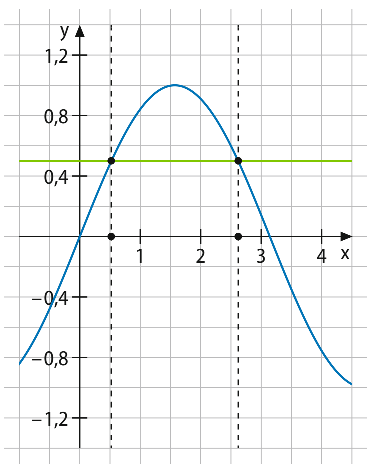
a) 45° **b)** 60° **c)** 210° **d)** 380°

Beispiel
Gleichung lösen

5 Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0{,}5$ im Intervall $[0; 4]$ und geben Sie diese sowohl im Bogen- als auch im Gradmaß an.

Lösung:

1 *Graphisch: Zeichnen Sie die linke Seite der Gleichung und die rechte und ermitteln Sie die Schnittpunkte beider Graphen. Man erhält* $x_1 \approx 0{,}5$ *und* $x_2 \approx 2{,}6$*.*
Wegen $\alpha = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$ *entspricht dies* $x_1 \approx 30° = \frac{\pi}{6}$ *und* $x_2 \approx 150° = \frac{5\pi}{6}$*.*



2 *Rechnerisch: Der Taschenrechner liefert für* $\sin^{-1}(0{,}5)$ *den Wert* $x_1 = 0{,}52$*.*

6 Bestimmen Sie die Lösung(en) folgender Gleichungen im Intervall $[0; 2\pi]$ und geben Sie diese sowohl im Bogen- als auch im Gradmaß an.

a) $\sin(x) = 0{,}75$ **b)** $\sin(x) = -0{,}25$ **c)** $\sin(x) = -1$

d) $\cos(x) = 0{,}75$ **e)** $\cos(x) = -0{,}25$ **f)** $\cos(x) = -1$

Nachgefragt

- Geben Sie in eigenen Worten wieder, welche Konsequenzen die Übertragung der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ auf den Einheitskreis hat und in welchem Zusammenhang das Bogenmaß hierzu steht.
- Erläutern Sie, weshalb gilt: $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Erläutern Sie, wie man anschaulich erklären kann, dass die Ableitung der Sinusfunktion die Kosinusfunktion ist.
- Wie lautet die 111-te Ableitung und wie die 222-te Ableitung von sin (x), wie die 333-te und 444-te Ableitung von cos (x)? Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

7 Bestimmen Sie Amplitude und Periode der folgenden trigonometrischen Funktionen f.

a) $f(x) = 3\sin(2x)$ **b)** $f(x) = \sin(3x)$

c) $f(x) = 3\cos(2x)$ **d)** $f(x) = 2\cdot\sin(3x+4) - 5$

8 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 3\cdot\sqrt{\sin(x)}$.

Beispiel
Ableitung

Lösung:

Der Vorfaktor 3 ist vom Ableiten nicht betroffen, er bleibt erhalten. Den Wurzelausdruck leitet man mittels der Kettenregel ab, wobei $v(x) = \sin(x)$ die innere Funktion und $u(x) = \sqrt{x}$ die äußere Funktion ist.

Es ist $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ und $v'(x) = \cos(x)$.

$$f'(x) = 3\cdot\cos(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}.$$

9 Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen f.

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ **b)** $f(x) = 4\cdot\cos(x)$ **c)** $f(x) = 2\cdot\sin(x) + 3$

d) $f(x) = \sqrt{\sin(x)} + 3x - 1$ **e)** $f(x) = (\cos(x))^2 + \frac{2}{3}x^3$ **f)** $f(x) = \frac{1}{2\cdot\sin(x)} + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ **h)** $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ **i)** $f(x) = x^2\cdot\sin^2(x)$

10 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen und geben Sie jeweils Amplitude und Periode an.

a) $f(x) = 2\cdot\sin(0{,}5x) - 1$ **b)** $f(x) = -\cos(2x-\pi) + 2$ **c)** $f(x) = -2\cdot\sin(2\pi x) + \pi$

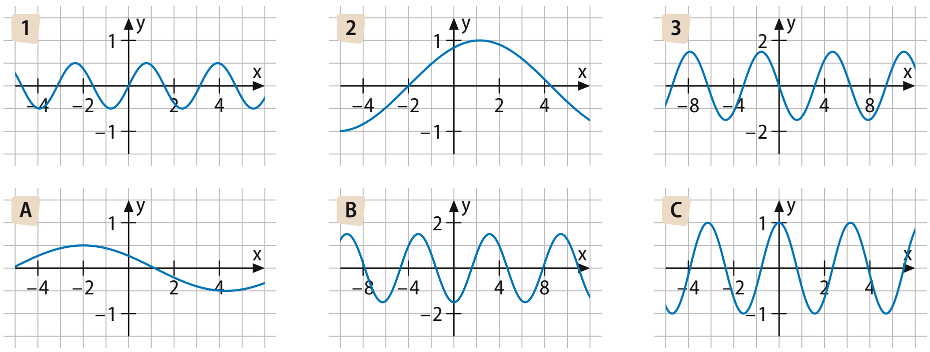
d) $f(x) = 1{,}5\sin(x) + 2$ **e)** $f(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **f)** $f(x) = \sin^2(x)$

11 Determine the amplitude and the period for the following functions f and calculate their derivative f′.

a) $f(x) = \sin(2x) + 2$ **b)** $f(x) = -4\cos(\pi)$ **c)** $f(x) = -0{,}5\cdot\sin(0{,}1x)$

d) $f(x) = \cos(2x) + 2$ **e)** $f(x) = \frac{1}{4}\cdot\sin\left(\frac{x}{4}\right)$ **f)** $f(x) = -0{,}2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right) - \pi$

12 Ordnen Sie jedem Graphen **1** bis **3** der Sinusfunktionen den zugehörigen Graphen der Ableitung (**A** bis **C**) zu. Bestimmen Sie jeweils sowohl die Gleichung der Funktion als auch die der Ableitungsfunktion; überprüfen Sie anschließend den graphisch gewonnenen Term der Ableitungsfunktion, indem Sie f ableiten.



Beispiel
Gleichung lösen

Die Gleichung $\sin(x) = 1$ kann man mit dem Taschenrechner lösen, indem man $\sin^{-1}(1)$ eingibt. Der Taschenrechner liefert $1{,}57 = \frac{\pi}{2}$.

13 Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 1$ im Intervall $[-\pi; \pi]$ und veranschaulichen Sie Ihre Lösung auch graphisch.

Lösung:

$\sin(x) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin^{-1}(1) = x;\;\; x = \frac{\pi}{2}$

14 Geben Sie an, in welchen Punkten der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ dieselbe Steigung hat wie …

a) die 1. Winkelhalbierende.
b) die 2. Winkelhalbierende.
c) die x-Achse.
d) die Gerade mit der Gleichung $y = -0{,}5x + 2$.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x)$.

a) Ermitteln Sie im Intervall von –1 bis 4 die Koordinaten aller Punkte, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und ermitteln Sie alle Extrempunkte des Graphen von f.

c) Der Graph von f hat mit der Parabel P mit der Gleichung $y = -\frac{4}{\pi^2} \cdot x \cdot (x - \pi)$ zwei Punkte gemeinsam. Geben Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte A und B an und untersuchen Sie, ob sich die beiden Graphen in den Punkten A und B berühren oder schneiden.

16 Die durchschnittliche Tageslänge (in Stunden) in Deutschland, also die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang, kann näherungsweise durch die Funktion f mit

$f(x) = 4{,}4 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right] + 12{,}2;\; D_f = \{1; 2; 3; \ldots; 365\}$, wiedergegeben werden;

hierbei bedeutet f(x) die durchschnittliche Tageslänge am x-ten Tag des Jahres.

a) Skizzieren Sie den Graphen G_f bzw. lassen Sie ihn sich von einem Funktionsplotter zeichnen (in Ihrer Zeichnung dürfen Sie D_f durch $[1; 365]$ ersetzen).

b) Ermitteln Sie die größte und die kleinste Tageslänge sowie das jeweilige Datum.

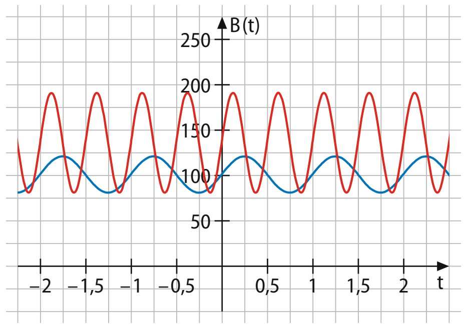
c) Ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die durchschnittliche Tageslänge am Frühlingsanfang (21. März), am Sommeranfang (21. Juni), am Herbstanfang (23. September) und am Winteranfang (21. Dezember).

17 Die Funktionen f und g haben folgendes Aussehen: $f: f(x) = 2(\sin x)^2 - 1$ und $g: g(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2}$.

a) Was können Sie zum Definitionsbereich der Funktion g sagen?

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte der Graphen der beiden Funktionen im Intervall von -4 bis 4 sowie die Koordinaten derjenigen Punkte, die die beiden Graphen miteinander gemeinsam haben. Was fällt Ihnen auf?

18 Der Blutdruck B(t) (in mmHg) einer Sprinterin kann im Ruhezustand (Puls: 60) näherungsweise durch den Term $B_1(t) = 100 + 20\sin(2\pi t)$ (Zeit t in s) und nach einer Trainingsbelastung (Puls: 120) näherungsweise durch den Term $B_2(t) = 135 + 55\sin(4\pi t)$ beschrieben werden.



Die Einheit mmHg (Millimeter Quecksilbersäule) wird bei der Angabe von Druckverhältnissen benutzt, z. B. bei Blutdruckwerten. 1 mmHg ist der Druck, den eine Quecksilbersäule von 1 mm Höhe ausübt.

a) Welcher der beiden Graphen gehört zu B_1, welcher zu B_2? Begründen Sie.

b) Geben Sie jeweils Beispiele für Zeitpunkte an, zu denen der Blutdruck besonders stark zunimmt (bzw. besonders stark abnimmt).

c) Reflektieren Sie: Warum ist Bluthochdruck so gefährlich? Woher kommt er? Was passiert bei einem Blutdruck von 200 mmHg?

19 Es besteht der in der Tabelle abgebildete Zusammenhang zwischen einem Winkel und den zugehörigen sin-, cos- und tan-Werten (im Gradmaß).
Leiten Sie diese Zusammenhänge her.

Winkel α	sin (α)	cos (α)	tan (α)
0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	0
30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	–

Tipp 1: Warum ist das Dreieck bei einem 45°-Winkel gleichschenklig?

Tipp 2: Ergänzen Sie das Dreieck mit dem 30°-Winkel zu einem gleichschenkligen Dreieck.

Tipp 3: Benutzen Sie den Satz des Pythagoras.

Nachgefragt

- Nehmen Sie Stellung zu der Aussage, dass eine Verschiebung in x-Richtung die Periodenlänge einer Sinusfunktion verändert.
- Helene meint: „Die Ableitung einer Sinusfunktion $\sin(b \cdot x)$ hat immer die gleiche Amplitude wie die Funktion selbst.“ Stimmt das? Argumentieren Sie.
- Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen.
  - **1** „Die Periodenlänge der Funktion $\sin(b \cdot x)$ ist umgekehrt proportional zu b.“
  - **2** „Die Veränderung der Amplitude der Kosinusfunktion hat keinen Einfluss auf die Lage der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.“

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

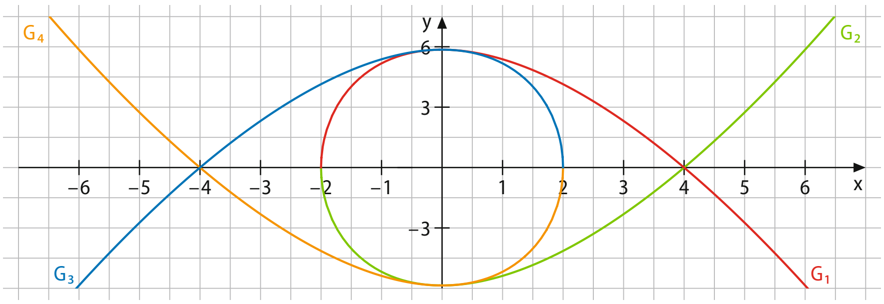
Warm up

A Leiten Sie ab.
a) $f_1(x) = -3(x-3)^3$ b) $f_2(x) = \sqrt{x^3 + 3x}$ c) $f_3(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

B Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen, einmal ohne Zuhilfenahme der Ableitung, einmal mithilfe der Ableitung.
a) $g_1(x) = -2x^2 + 8x - 4$ b) $g_2(x) = 3x^2 + 12x + 9$

C Lösen Sie folgende Gleichungen.
a) $(x+2) \cdot (x-4) = 0$ b) $x^2 + 4x + 4 = 0$ c) $x - 1 = \sqrt{x+1}$

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}\,(x-4)$.
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an und erläutern Sie dies.
b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) des Graphen von f sowie seine Extremstelle(n).
c) Ordnen Sie der Funktion f ihren Graphen zu und geben Sie für die anderen Graphen jeweils einen passenden Funktionsterm an.



d) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.
e) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$ verläuft.
f) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Über einem Intervall streng monoton steigende Funktionen können in der ersten Ableitung in diesem Intervall keine Nullstelle haben.“

Aufgabe 2

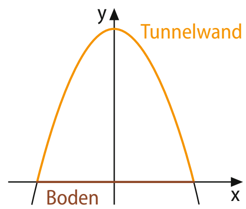
Warm up

A Zerlegen Sie (durch Ausklammern und/oder Anwendung der binomischen Formeln) so weit wie möglich in Faktoren.
a) $-2v^3 + 12v^2w - 18vw^2$ b) $-333m^4 + 37n^2$

B Ermitteln Sie die Schnittpunkte folgender Funktionen zeichnerisch und rechnerisch.
$f(x) = (x+1)^2$ und $g(x) = -(x+1)(x-2)$

C Ermitteln Sie jeweils den Scheitel der quadratischen Funktionen.
a) $y = x^2 + 6x + 9$ b) $y = x^2 + 6x + 5$ c) $y = x^2 + 7x + 12$

2 Sie haben sich mit Ihrem Auto in den Bergen verirrt und kommen an einen Tunnel. Die maximale Höhe des Tunnels wird mit 3 m angegeben, die maximale Breite am Boden ebenfalls mit 3 m. Ihr Auto ist 1,70 m breit und 1,50 m hoch.



a) Stellen Sie einen quadratischen Term auf, mit dem Sie die Tunnelwände modellieren können.

b) Schließen Sie vom Graphen der Funktion f auf den Graphen der Ableitungsfunktion f'.

c) Berechnen Sie den Winkel, den die Tunnelwände mit dem Boden einschließen.

d) Berechnen Sie, ob Ihr Auto durch den Tunnel passt.

Aufgabe 3

Warm up

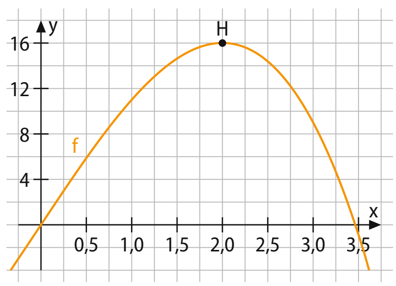
A Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^5 + 3x^3 + x$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ **c)** $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$

B Untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen, Monotonie und Extremstellen und skizzieren Sie anschließend den jeweiligen Graphen.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ **b)** $f(x) = 3x^3 - 12x^2 + 12x$ **c)** $f(x) = x^2(x - 1)$

3 Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2\,|\,16)$.



a) Vergrößern Sie das Intervall in geeigneter Weise und vervollständigen Sie so den Graphen.

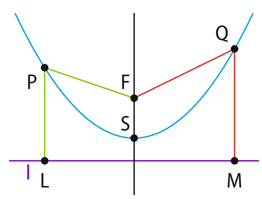
b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Zudem ist ihre Steigung dieselbe wie die, die der Graph von f im Punkt $P(2{,}5\,|\,14{,}375)$ aufweist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der y-Achse.

c) Der Funktionsterm von f wird verändert, man erhält die Funktion h mit dem Term $h(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Führen Sie zwei wesentliche Veränderungen im Graphen an und deren Ursache.

d) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f und beschreiben Sie, wie Sie vorgegangen sind.

e) Berechnen Sie die Extrema von f und von h sowie die jeweiligen Nullstellen (möglichst exakt, ansonsten näherungsweise).

f) Der Ausschnitt des Graphen ähnelt einer Parabel. Eine Parabel ist definiert als Menge aller Punkte X (der Ebene), von denen jeder von einer gegebenen Geraden, der sogenannten Leitgeraden l, und von einem festen Punkt, dem Brennpunkt F, jeweils gleichen Abstand hat. Der Punkt, der in der Mitte zwischen Brennpunkt und Leitgerade liegt, heißt Scheitel S der Parabel. Die Verbindungsgerade von Brennpunkt und Scheitel wird auch Achse der Parabel genannt.
Skizzieren Sie die ungefähre Lage der Leitgeraden und des Brennpunkts für eine Parabel, die dem Ausschnitt des Graphen von f ähnelt.



g) Beschreiben Sie, wie die Lage von Leitgerade und Brennpunkt die Öffnung der Parabel beeinflussen.

Aufgabe 4

Warm up

A Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x-1)$ **b)** $f(x) = (\sin(x))^2 - 3\cos(2x)$

B Bestimmen Sie Amplitude und Periode und skizzieren Sie den Graphen.

a) $f(x) = 2\sin(2(x-2))$ **b)** $f(x) = -\cos(-x) - 1$

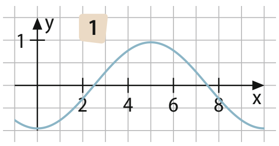
4 Am Elbufer wird täglich der Wasserstand gemessen. Durch Ebbe und Flut entsteht eine wellenförmige Kurve, wenn man die Werte in einem Koordinatensystem veranschaulicht. Die Messwerte können durch folgende Funktionsgleichung wiedergegeben werden:
$f(t) = 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right) + 1{,}5$ (t in h, f(t) in m).

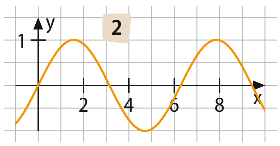
a) Geben Sie den Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

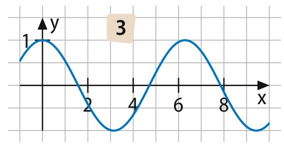
b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen.

c) Steigt oder fällt der Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Welcher der folgenden Graphen gehört zur ersten Ableitung von f? Begründen Sie.







e) Berechnen Sie: Wann erreicht der Wasserstand sein Maximum, wann sein Minimum? Wie hoch ist das Wasser dann jeweils? Wie groß ist der Tidenhub, also der Unterschied zwischen dem Scheitelpegel (Flut) und dem untersten Pegelstand (Ebbe)?

Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

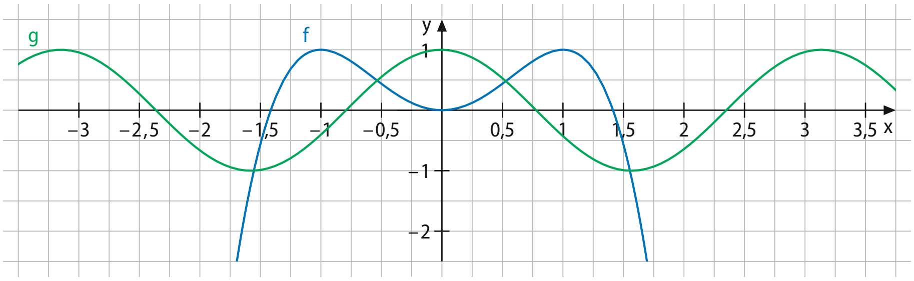
- Zuordnen von Termen und Graphen
- Aufstellen eines Terms zu einer gegebenen Sachsituation, Sachsituationen modellieren
- Ableitungen im Sachzusammenhang interpretieren (z. B. als Steigung) und Ableitungen berechnen (dabei Ableitungsregeln anwenden)
- Signifikante Punkte eines Graphen (Nullstellen, Extremstellen) berechnen, Graphen auf Monotonie untersuchen
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als Ableitungsgraphen identifizieren
- Graphen auf Symmetrie untersuchen, speziell auch die ganzrationaler Funktionen

Typische Aufgabenteile für das Warm up:

- Lösen von linearen, quadratischen, Bruch-, Wurzel- und Potenzgleichungen
- Extrema quadratischer Funktionen mit und ohne Ableitung bestimmen
- Faktorisieren von Summen und Differenzen
- Aussagen treffen über die Parameter von Funktionen
- Ganzrationale Funktionen auf Symmetrie, Monotoniebereiche und Extrema untersuchen und ihre Graphen skizzieren
- bei trigonometrischen Funktionen Amplitude und Periode bestimmen und die Funktionen ableiten

Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer Abiturprüfung gestellt werden können.

1 Die Abbildung zeigt die Graphen einer ganzrationalen Funktion f und einer trigonometrischen Funktion g.



a) Ordnen Sie die Funktionen f und g den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c) Entscheiden Sie begründet, welcher der angegebenen Terme zum Graphen der trigonometrischen Funktion passt.
$f_1(x) = \cos(x)$ $\quad f_2(x) = \cos(0{,}5x)$ $\quad f_3(x) = \cos(2x)$ $\quad f_4(x) = \cos(x - \pi)$

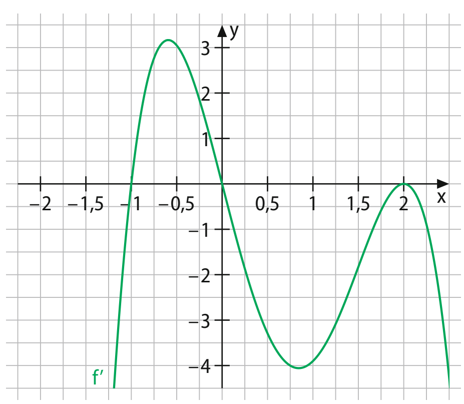
d) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Produkts der beiden Funktionen f und g sowie den von dessen Ableitungsfunktion.

e) Leiten Sie die ganzrationale Funktion k mit $k(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)$ auf zwei verschiedene Arten ab. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie jeweils benutzt haben.

f) Erläutern Sie für eine der benutzten Ableitungsregeln, wie man sie plausibel machen oder herleiten kann.

g) Geben Sie möglichst viele Vorgehensweisen an, wie man die Nullstellen der ganzrationalen Funktion k (auch näherungsweise) bestimmen kann.

2 Gegeben ist der Ausschnitt des Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f.



a) Wodurch unterscheiden sich die drei gegebenen Nullstellen? Worin äußert sich dies im Term von f′?

b) Stellen Sie unter Benutzung der gegebenen Nullstellen und des globalen Verlaufs des Graphen einen möglichen Term für f′ auf.

c) Erläutern Sie die Bedeutung der Nullstellen von f′ für den Graphen von f.

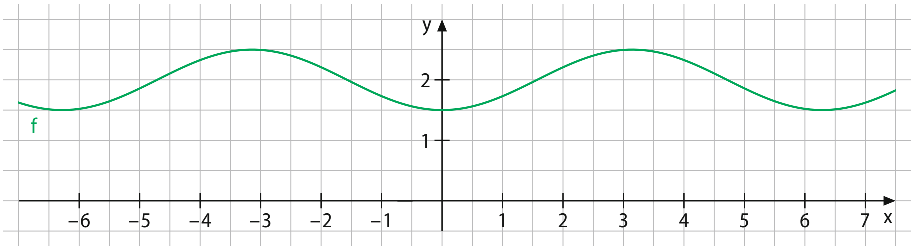
d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

e) Skizzieren Sie den Graphen von f.

f) Welchen minimalen Grad hat f′, welchen f?

g) Stellen Sie einen möglichen Funktionsterm für f auf.

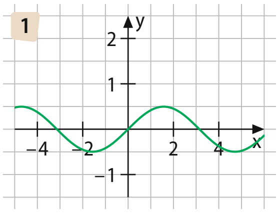
3 Gegeben sind die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ und ihr Graph.

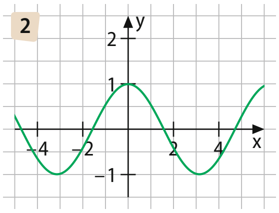


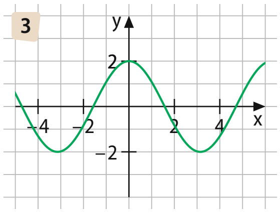
a) Machen Sie im Graphen die Amplitude und die Periode kenntlich.

b) Erläutern Sie, wie der Graph von f aus dem der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht.

c) Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′ von f. Entscheiden Sie begründet, welcher der Graphen den der Ableitungsfunktion darstellt.



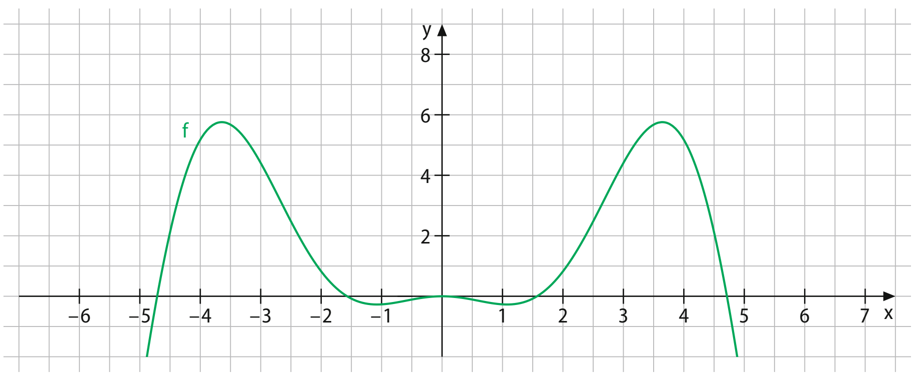




d) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Eine trigonometrische Funktion ist durch die Angabe der Koordinaten eines beliebigen Hochpunktes und eines beliebigen Tiefpunktes ihres Graphen eindeutig bestimmt.

e) Erläutern Sie, wie man die Sinusfunktion aus der trigonometrischen Beziehung $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ erhält. Verwenden und erläutern Sie dabei auch die Begriffe „Einheitskreis“ und „Bogenmaß“.

Eine mögliche Erweiterung:



f) Der Funktionsterm von f wird abgewandelt, so dass man $h(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ erhält. Der Graph von h ist für das Intervall $I =]-2\pi; 2\pi[$ oben abgebildet. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph achsensymmetrisch ist.

g) Skizzieren Sie im gleichen Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion.

h) Leiten Sie h ab und vergleichen Sie mit Ihrem Ergebnis aus g).

Reflexion

Arbeitsaufträge und Fragen zur Vorbereitung auf das Abitur	Hilfe
Beschreiben Sie an einem Beispiel, was man unter graphischem Differenzieren versteht, und wie man dabei vorgeht.	S. 23/11
Was sagt die Ableitung an einer Stelle des Graphen einer Funktion aus?	S. 16/5
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen das Bestimmen der Ableitung eine Rolle spielt.	S. 47/18
Beschreiben Sie, wie man das Extremum einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit und ohne das Bestimmen einer Ableitung finden kann. Führen Sie beide Verfahren an einem konkreten Funktionsterm durch.	S. 12/2, 18/6
Beschreiben Sie an einem konkreten Beispiel, was man unter der Verkettung einer Funktion versteht.	S. 36
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Produktregel ableiten kann, bei dem man die Produktregel aber auch umgehen könnte.	S. 32/4
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Kettenregel ableiten kann, bei dem man die Kettenregel aber auch umgehen könnte.	S. 38/7, 39/8
Erläutern Sie an einem konkreten Funktionsterm, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen der Faktoren ist.	S. 31
Machen Sie die Faktorregel für Ableitungen an einem konkreten Beispiel plausibel. Warum bleibt der Vorfaktor bei der Ableitung erhalten?	S. 21
Warum fällt das absolute Glied, also der Teil eines Terms, der mit keinem x verknüpft ist, beim Ableiten weg?	S. 20
Beschreiben Sie, wie man die Ableitung einer Funktion an einer Stelle ohne Ableitungsregeln ermitteln kann. Benutzen Sie dabei auch die Begriffe Differenzen- und Differentialquotient sowie Sekanten- und Tangentensteigung. Inwiefern spielt der Grenzwert in diesem Kontext eine Rolle?	S. 16/5
Beschreiben Sie an einem selbstgewählten Beispiel, wie man Graphen ganzrationaler Funktionen auf Symmetrie untersuchen kann.	S. 16/4
Welche Arten von Symmetrie kennen Sie? Beschreiben Sie ein Kriterium, mit dem Sie eine beliebige Funktion anhand ihres Terms auf Symmetrie untersuchen können.	S. 16/4
Was versteht man unter einer Tangente und wodurch unterscheidet sie sich von einer Sekante?	S. 26
Wie lautet der Monotoniesatz für Funktionen? Gilt auch seine Umkehrung? Reflektieren Sie über die Umkehrbarkeit von Sätzen. Geben Sie Beispiele für umkehrbare und für nicht umkehrbare Sätze an.	S. 18/6
Nennen Sie die beiden hinreichenden Kriterien für Extremstellen. Wodurch unterscheiden Sie sich vom notwendigen Kriterium? Sind beide hinreichenden Kriterien gleich mächtige Werkzeuge, oder kann eines der beiden Kriterien mehr als das andere?	S. 18/6

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …
… Funktionsterme miteinander zu verknüpfen, diese zusammengesetzten Funktionen abzuleiten und zu untersuchen.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 1.1 & 1.2

Summen-, Faktor- und Potenzregel der Ableitung; Tangentengleichungen aufstellen

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die Regel für konstanten Faktor, die Potenzregel sowie die Summenregel zum Ableiten von Funktionstermen anzuwenden. … die Faktorregel und die Summenregel anschaulich zu begründen. … Graphen von zusammengesetzten Funktionen zu untersuchen. … Tangentengleichungen aufstellen	Wir haben Termbausteine additiv miteinander verknüpft und so aus Potenzfunktionen ganzrationale Funktionen entstehen lassen. Leitet man diese ab, kommen drei Regeln zur Anwendung: die Faktorregel, die Potenz- und die Summenregel. Diese Regeln kann man sich leicht plausibel machen: Zum Beispiel verändert der Vorfaktor die Steigung des Graphen, muss also in die Ableitung miteinfließen. Die Potenzregel kann man sich durch graphisches Differenzieren plausibel machen, weil man so leicht sieht, dass der Grad der Ableitungsfunktion um eins niedriger ist als der der Ausgangsfunktion. Anschließend haben wir ganzrationale Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Symmetrie untersucht sowie Tangentensteigungen an deren Graph konkret berechnet und Tangentengleichungen aufgestellt.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Punkte mittels der Ableitung zu berechnen, bei denen die anliegende Tangente eine vorgegebene Steigung besitzt.	1.1/6 – 8	S. 22/5
… graphisch zu differenzieren, d. h. den Graphen der Ableitungsfunktion aus den Tangentensteigungsdreiecken der Funktion entstehen lassen.	1.1/12	S. 23/11
… ganzrationale Funktionen auf Symmetrie und Nullstellen sowie Monotonie und Extrema zu untersuchen.	1.1/16, 19	S. 23/15, 24/18
… Tangentengleichungen aufzustellen.	1.2/1	S. 26, 27; S. 28/2

Kap. 1.3

Produktregel und Quotientenregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die Produktregel und die Quotientenregel zum Ableiten von Funktionstermen zu verwenden. … Graphen von zusammengesetzten Funktionen (Produkt) zu untersuchen.	Wir haben Termbausteine multiplikativ miteinander verknüpft und uns anhand einfacher Beispiele klar gemacht, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich der Ableitung der einzelnen Faktoren ist. Anhand eines Rechtecksflächeninhalts und seiner Veränderung haben wir uns die Produktregel plausibel gemacht. Mit ihr können wir multiplikativ verknüpfte Terme ableiten. Aus der Produktregel haben wir die Quotientenregel hergeleitet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… einem Funktionsgraphen den Graph seiner Ableitung zuzuordnen.	13	S. 24/17

Kap. 1.4

Verkettete Funktionen und die Kettenregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen, bei denen die innere Funktion eine lineare Funktion ist, zu verwenden. … Graphen von zusammengesetzten Funktionen (Verkettung mit linearer innerer Funktion) zu untersuchen. … Funktionen verketten und Verkettungen von Funktionen zu erkennen.	Wir haben Termbausteine „ineinander geschachtelt" und so miteinander verkettet. E entsteht eine innere und eine äußere Funktion. Die zugehörige Ableitungsregel ist die Kettenregel. Wir haben sie uns anhand von Funktionen plausibel gemacht, bei denen die Anwendung einer neuen Ableitungsregel gar nicht zwingend notwendig ist (wie z. B. $f(x) = (x+2)^2$). Die Kettenregel kommt z. B. dann zur Anwendung, wenn unter der Wurzel ein (etwas umfangreicherer) Funktionsterm steht (z. B. $f(x) = \sqrt{2x+3}$). Auch wenn Summen potenziert werden (z. B. bei $f(x) = (x+1)^5$), ist die Anwendung der Kettenregel hilfreich.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… verkettete Funktionen als solche zu erkennen und innere sowie äußere Funktion zu definieren.	1 – 4, 6	S. 38/5
… verkettete Funktionen abzuleiten.	8, 9	S. 38/7
… wann die Kettenregel typischerweise zur Anwendung kommt.	9	S. 39/10

Kap. 1.5

Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitungen

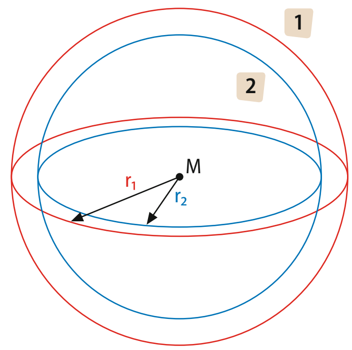
Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… trigonometrische Funktionen aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis entstehen zu lassen und dabei das Bogenmaß mit dem Winkelmaß in Verbindung zu bringen. … trigonometrische Funktionen zu untersuchen und dabei Periode und Amplitude zu benennen sowie die Wirkung der Parameter hinsichtlich Verschiebungen und Streckungen einzuschätzen. … die Ableitung trigonometrischer Funktionen zu bestimmen, auch unter Zuhilfenahme der Kettenregel.	Wir haben als „Termbaustein" die trigonometrischen Funktionen hinzugenommen und sie z. B. mit Termbausteinen kombiniert, die zu ganzrationalen Funktionen gehören. Die trigonometrischen Funktionen haben wir aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis gewonnen und dabei Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen gelernt. Wir haben die Abhängigkeit von Amplitude und Periode von den Parametern trigonometrischer Funktionen betrachtet. Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion haben wir uns durch graphisches Ableiten plausibel gemacht, anschließend mittels der Kettenregel auf komplexere Funktionsterme erweitert. Als typische Anwendungen für trigonometrische Funktionen haben wir z. B. periodische Vorgänge wie Ebbe und Flut oder Blutdruckskurven angeschaut und mithilfe der Differentialrechnung signifikante Punkte berechnet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Gradmaß in Bogenmaß umzuwandeln und dies am Einheitskreis zu erklären.	1, 3, 4	S. 44/2
… trigonometrische Funktionen (oft unter Verwendung der Kettenregel) abzuleiten und Ausgangstermen ihre Ableitungsterme zuzuordnen.	9, 12	S. 45/8
… trigonometrische Funktionen in Sachzusammenhängen zu untersuchen.	15, 16	S. 47/17 – 19

1 Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3$ **b)** $f(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ **c)** $f(r) = 4\pi \cdot r^2$

2 Versuchen Sie, sich zu erinnern (bzw. recherchieren Sie): Wie lautet die Formel zur Berechnung des Volumens einer Kugel und wie die zur Berechnung ihrer Oberfläche?



Wir betrachten eine Kugel und beobachten die Änderung des Kugelvolumens, wenn der Radius sich ändert.
Dazu wählen wir zwei Radien: den Radius r_1 der Ausgangskugel **1** und den Radius r_2 einer kleineren Kugel **2**.
Die zugehörigen Volumina lauten:
$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3$ und $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3$.
Die Änderung des Kugelvolumens von Kugel **1** zu Kugel **2** kann man sich als Kugelhülle vorstellen, also als innen hohle Kugelschale mit der Wandstärke $(r_1 - r_2)$.
Die mittlere Änderungsrate des Kugelvolumens entspricht dem Differenzenquotienten

$$\overline{V}(r) = \frac{V_1 - V_2}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

3 **a)** Überprüfen Sie durch Ausmultiplizieren die Gültigkeit folgender Formel:
$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

b) Vereinfachen Sie mithilfe der Formel aus Teilaufgabe a) den Differenzenquotienten

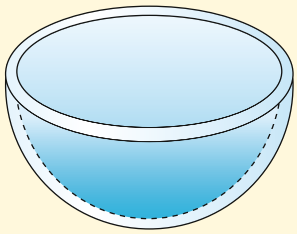
$$\overline{V}(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

Zur Ermittlung der momentanen Änderungsrate betrachten wir den Differenzenquotienten $\overline{V}(r)$, wenn r_2 gegen r_1 wandert (oder umgekehrt), und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r) = \lim_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

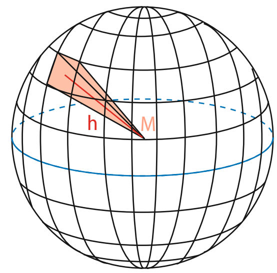
4 Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{r_2 \to r_1} \overline{V}(r) = \lim\limits_{r_2 \to r_1} \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3}{r_1 - r_2}$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Wir erhalten als Ergebnis: $V'_{\text{Kugel}}(r) = 4\pi r^2 = O_{\text{Kugel}}(r)$.
Das heißt: Als Ableitung des Kugelvolumens nach dem Radius erhält man die Kugeloberfläche. Oder anders ausgedrückt: Die Differenz zweier Kugelvolumina, deren zugehörige Radien sehr dicht beieinander liegen, kann als Kugeloberfläche interpretiert werden.
Die Oberfläche einer Kugel entspricht also der momentanen Änderungsrate des Kugelvolumens.



Alternativ kann man den Zusammenhang zwischen Kugelvolumen und Kugeloberfläche auch wie folgt herleiten:

Eine Kugel kann man sich aus unendlich vielen, infinitesimalen (unendlich kleinen) Pyramiden zusammengesetzt vorstellen. Die Grundflächen dieser Pyramiden ergeben zusammen die Kugeloberfläche; die Höhen der Pyramiden sind jeweils gleich dem Kugelradius. Da das Pyramidenvolumen durch die Formel
$V_P = \frac{1}{3}G \cdot h$ gegeben ist und hier $r = h$ ist, folgt: $V_P = \frac{1}{3}G \cdot r$.
Die Summe aller Pyramidengrundflächen nähert sich bei immer feinerer Unterteilung der Oberfläche der Kugel an, es gilt also:
$V_P = \frac{1}{3}O_K \cdot r$. Wegen $V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ ergibt sich: $\frac{1}{3}O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.



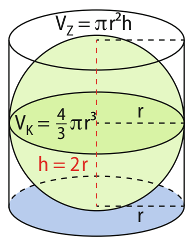
5 Erklären Sie anhand der Gleichung $\frac{1}{3}O_K \cdot r = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$, dass die Oberfläche einer Kugel einem Grenzwert entspricht, und ermitteln Sie eine Formel für die Kugeloberfläche durch Umstellen der Gleichung.

Aus dem Dargestellten ergibt sich die Frage nach der Übertragbarkeit auf andere Fälle.

6 Überprüfen Sie, ob der Zusammenhang zwischen der Ableitung des Volumens und der Oberfläche auch für andere Körper wie Würfel, Quader, Pyramide und Kegel gilt.

Im Folgenden betrachten wir weitere Zusammenhänge geometrischer Überlegungen mit der Differentialrechnung.
Der **Satz des Archimedes über Kugel und Kreiszylinder** beschreibt den Zusammenhang zwischen Volumen und Oberfläche von Kugel und Kreiszylinder. Der Satz gilt als eines der großen Resultate der Mathematik. Er geht zurück auf Archimedes von Syrakus (etwa 287–212 v. Chr.) und dessen Werk *Über Kugel und Zylinder* zurück, in dem er mithilfe von Methoden arbeitete, die als Vorläufer der Methoden der modernen Integralrechnung angesehen werden können.
Der Satz lässt sich wie folgt angeben:

Für eine Kugel und einen Kreiszylinder, dessen Grundfläche einem größten Kugelkreis der Kugel und dessen Höhe dem Kugeldurchmesser entspricht, stehen die Oberflächeninhalte und die Volumina beider Körper jeweils in demselben Verhältnis. Dabei gilt: $\frac{O_{Zylinder}}{O_{Kugel}} = \frac{V_{Zylinder}}{V_{Kugel}}$.



7 Stellen Sie die Formel nach $\frac{V_{Kugel}}{O_{Kugel}}$ um.

Archimedes folgend, scheint dieses Verhältnis für verschiedene Körper interessant zu sein. Man kann durch Messen zeigen, dass bei gegebenem Volumen von allen Körpern die Kugel die kleinste Oberfläche hat. Das ist wichtig für die Abkühlungsgeschwindigkeit verschieden großer Massen: Die Abkühlung erfolgt proportional zur Größe der Oberfläche, die beim Größerwerden jedoch langsamer wächst als das Volumen, so dass größere Massen langsamer abkühlen als kleine.

8 Recherchieren Sie die Größe der Kaiserpinguine aus der Antarktis und die der Galapagos-Pinguine, die in Äquatornähe leben, und erklären Sie die Größenunterschiede auf Basis obiger Ausführungen. Recherchieren Sie anschließend, was man unter der „Bergmann'schen Regel" und unter „Allometrie" versteht, und setzen Sie es in Beziehung zu den obigen Ausführungen.

Erweiterung der Differentialrechnung II: Exponentialfunktion und Logarithmus

2

Einstieg

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit exponentiellem Wachstum. Zunächst werden wir es vom linearen Wachstum abgrenzen und seine Funktionsgleichung ermitteln. Wir lernen dabei die natürliche Exponentialfunktion kennen sowie die zugehörigen Exponentialgleichungen, für deren Lösung wir uns mit einem neuen Werkzeug vertraut machen.

Die natürliche Exponentialfunktion weist eine Besonderheit auf, die wir bei der mathematischen Modellierung von Realsituationen ausgiebig nutzen werden.

In einem **ersten Schritt** lernen wir die Euler'sche Zahl e und die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ kennen.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie die **Exponentialfunktion** f mit $f(x) = b^x$ und die **natürliche Exponentialfunktion** g mit $g(x) = e^x$ ableiten sowie mit der **Euler'schen Zahl e** umgehen.

In einem **zweiten Schritt** betrachten wir die allgemeine Exponentialfunktion und die Wirkung von Parametern auf ihren Graphen.

Am Ende des zweiten Unterkapitels können Sie den Graphen die Terme von Exponentialfunktionen begründet zuordnen und umgekehrt.

In einem **dritten Schritt** lernen Sie, wie man Gleichungen löst, in denen der Term einer natürlichen Exponentialfunktion enthalten ist.

Am Ende des dritten Unterkapitels können Sie **Exponentialgleichungen** mit dem **Logarithmus** und auch graphisch lösen.

In einem **vierten Schritt** wenden wir uns den vielfältigen Anwendungen der natürlichen Exponentialfunktion zu.

Am Ende des vierten Unterkapitels können Sie die Exponentialfunktion und ihre Ableitung nutzen, um Realsituationen zu modellieren.

„**Da gibt es eine schöne Geschichte:** In einem Teich wächst eine Seerose, deren Blättermenge sich jeden Tag verdoppelt. Drei Tage vor dem Ende ist erst ein Achtel des Teiches bedeckt. Der Frosch ist nicht beunruhigt: ‚Ach, es ist noch Zeit, sieben Achtel sind noch frei.'

Am nächsten Tag ist ein Viertel bedeckt, am zweiten Tag die Hälfte: ‚Ach, die Hälfte haben wir noch'. Aber am Tag darauf ist Feierabend.

Dieses Beispiel zeigt die Dramatik des exponentiellen Wachstums. Es soll sich keiner Illusionen machen, wir hätten noch viel Zeit."

Friedhelm Farthmann, ehemaliger Landesminister in Nordrhein-Westfalen, in seiner Dankesrede anlässlich der Entgegennahme eines Umweltpreises (2001)

Ausblick

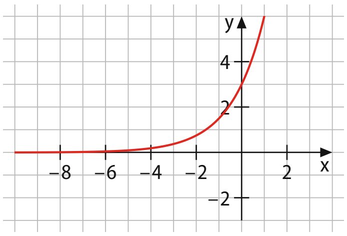
Bei Exponentialfunktionen ist die Änderungsrate proportional zum Bestand, d. h. die Änderungsrate wird umso größer, je größer der Bestand wird. Dies ist das zentrale Merkmal von Exponentialfunktionen; sie schlägt sich sowohl in den Eigenschaften des Graphen als auch in Anwendungen nieder. Exponentielle Wachstumsvorgänge entwickeln eine Dynamik, wie sie durch keine anderen mathematischen Modelle beschrieben werden kann. Bereits kleine Anfangswerte führen oft schon nach kurzer Zeit zu einer explosionsartigen Entwicklung. Handelt es sich dabei um Vorgänge in Natur und Umwelt, so ist es wichtig, diese Wachstumsart rechtzeitig zu erkennen, um eventuell geeignete Maßnahmen ergreifen zu können.

Vorwissen 1

Die allgemeine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ skizzieren und die Wirkung der Parameter a und b beschreiben

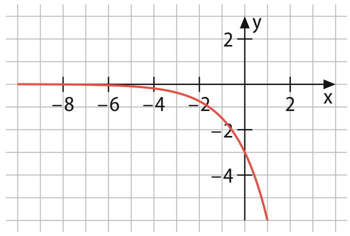
Eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ $(b > 0; b \neq 1)$ nennt man **Exponentialfunktion** zur Basis b mit Vorfaktor a. Ihr Schnittpunkt mit der y-Achse ist immer $(0|a)$.
Wir unterscheiden die Fälle $a > 0$ und $a < 0$ sowie $0 < b < 1$ und $b > 1$.

$a > 0$ $(b = 2)$



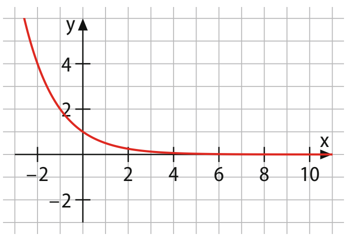
Für $x \to -\infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von oben
Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to \infty$.

$a < 0$ $(b = 2)$



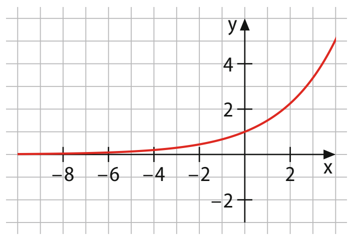
Für $x \to -\infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von unten
Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to -\infty$.

$0 < b < 1$ $(a = 1)$



Für $x \to \infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von oben
Für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to \infty$.

$b > 1$ $(a = 1)$



Für $x \to -\infty$:
x-Achse als Asymptote, Annäherung von oben
Für $x \to \infty$ geht $f(x) \to \infty$.

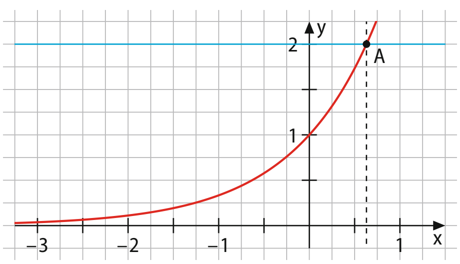
Vorwissen 2

Allgemeine Exponentialgleichungen graphisch und rechnerisch lösen

Eine **Exponentialgleichung** der Form $a \cdot b^x = c$ kann man graphisch und rechnerisch lösen.
Beispiel: Löse folgende Exponentialgleichung: $2 \cdot 3^x = 4 \Leftrightarrow 3^x = 2$.

Graphische Lösung

- Man interpretiert sowohl die linke als auch die rechte Seite der Gleichung als Funktion und zeichnet deren Graphen.
- Zu ermitteln ist dann die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Graphen.



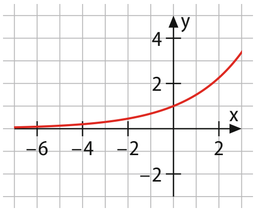
Rechnerische Lösung

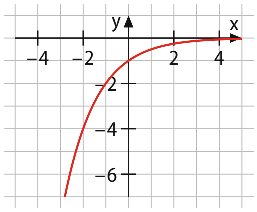
- Die Gleichung $b^x = d$ wird durch **Logarithmieren** gelöst.
- Der **Logarithmus der Zahl d zur Basis b** ist diejenige Zahl x, für die gilt: $b^x = d$.
  Man schreibt: $\mathbf{\log_b(d) = x\ (b, d > 0)}$.
- Zu lösende Gleichung: $3^x = 2$
  Abschätzen liefert:
  x muss kleiner als 1 sein, da $3^1 = 3 > 2$.
- Der Taschenrechner liefert $\log_3(2) = 0{,}63$.

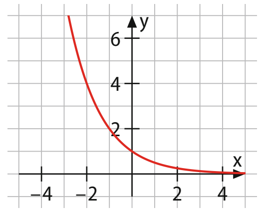
Aufgaben 1

1 Ordnen Sie den Graphen jeweils begründet einen passenden Funktionsterm zu.

A $f(x) = 0{,}5^x$ **B** $f(x) = 1{,}5^x$ **C** $f(x) = -0{,}5^x$

1


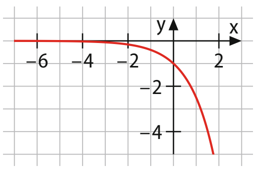
2


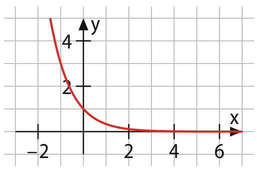
3


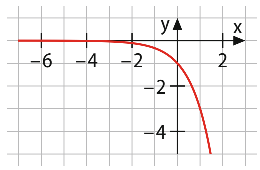
Lösung:
Bei **A** *gilt für die Basis $0 < b < 1$, es handelt sich also um eine fallende Funktion:* **3**. *Das negative Vorzeichen bei* **C** *bewirkt, dass der Graph an der x-Achse gespiegelt ist:* **2**. *Bei* **B** *gilt für die Basis $b > 1$, es handelt sich also um einen steigenden Graphen:* **1**.

1.1 Ordnen Sie die Graphen jeweils begründet einem passenden Funktionsterm zu.

A $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **B** $f(x) = -\left(\frac{5}{2}\right)^x$ **C** $f(x) = -3^x$

1


2


3


1.2 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen, ohne eine Wertetabelle anzulegen.

a) $f(x) = -2^x$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}5^x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 3^x$

1.3 Welcher der folgenden Funktionsterme könnte die Größe (in cm) eines Hundewelpen in den ersten Monaten nach der Geburt darstellen? Begründen Sie. Welche Realsituationen könnten für die anderen Terme in Frage kommen?

a) $f(x) = -4^x$ **b)** $f(x) = 2 \cdot 2^x$ **c)** $f(x) = 12 \cdot 1{,}11^x$

Aufgaben 2

2 Lösen Sie folgende Gleichungen: **a)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x$ **b)** $2^x \cdot 3^{x+1} = \frac{1}{2}$.

Lösung:
a) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$ *Exponentenvergleich liefert:* $x = -3$.

b) rechnerisch: $2^x \cdot 3^{x+1} = 2^x \cdot 3 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x = \frac{1}{2}$

$6^x = \frac{1}{6} = 6^{-1} \quad \Rightarrow \quad x = -1$

graphisch: $3 \cdot 6^x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -1$

2.1 Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $\log_5(125) = x$ **b)** $\log_7(\sqrt{343}) = x$ **c)** $\log_8(x) = \frac{1}{3}$

d) $\log_x(512) = 3$ **e)** $\log_3(3^5) = x$ **f)** $\log_{\sqrt{3}}(27) = x$

2.2 Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $3 \cdot 2^{x+1} - 48 = 0$ **b)** $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0$ **c)** $3^{2x} - 3^x = 6$ **d)** $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10$

e) $3^x \cdot 2^{x+1} = \frac{1}{3}$ **f)** $7^{x-3} - 49^x = 0$ **g)** $32 \cdot 3^x = 6^x$ **h)** $2^{3x} + 0{,}125 = 2 \cdot 8^x$

Ich kann schon …

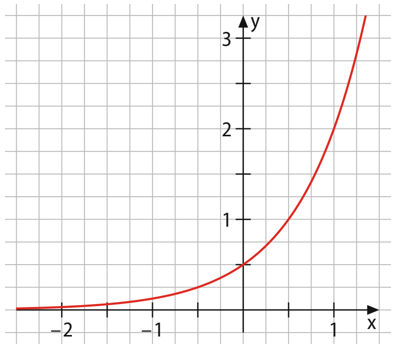
Vorwissen 3

Den Term einer allgemeinen Exponentialfunktion anhand gegebener Punkte oder Eigenschaften bestimmen

Da die die allgemeine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$ zwei Parameter a und b enthält, benötigt man zwei Eigenschaften des Graphen, um a und b zu bestimmen.
Diese beiden Eigenschaften können auch zwei konkrete Punkte, z. B. P (1 | 2) und Q (2 | 8), sein.
Diese beiden Punkte setzt man jeweils in $f(x) = a \cdot b^x$ ein und erhält zwei Gleichungen, mit deren Hilfe man die beiden Unbekannten a und b ermitteln kann:

$2 = a \cdot b^1 \Rightarrow a = \frac{2}{b}$ $\qquad$ $8 = a \cdot b^2 \Rightarrow a = \frac{8}{b^2}$

$\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{8}{b^2} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^x$



Vorwissen 4

Funktionen auf Monotonie und Extrempunkte untersuchen

Mit anhand ihrer Eigenschaften ermittelten Funktionstermen kann man anwendungsbezogene Fragestellungen beantworten. Dabei geht man schrittweise vor.
Beispiel: Eine Tierpopulation entwickelt sich wie folgt:

Zeit in Jahren	0	1	2	3	4	5
Anzahl	90	170	330	650	1250	2400

Es soll der für eine Prognose der weiteren Entwicklung benötigte Funktionsterm und die Größe der Tierpopulation nach 10 Jahren bestimmt werden.

1 Analyse der Daten, um den zugrunde liegenden Funktionstyp zu finden.
Die Daten lassen ein exponentielles Wachstum vermuten, da der absolute Zuwachs nicht konstant ist. Deshalb werden die Daten auf (annähernde) Quotientengleichheit geprüft:
$\frac{170}{90} \approx 1{,}89$; $\frac{330}{170} \approx 1{,}94$; $\frac{650}{330} \approx 1{,}97$; $\frac{1250}{650} \approx 1{,}92$; …
Da die Werte allesamt nahe an 1,9 liegen, darf ein exponentielles Wachstum mit $f(x) = a \cdot b^x$ angenommen werden; x ist dabei die Zeit in Jahren.

2 Für die Bestimmung der beiden unbekannten Parameter a und b gibt es zwei Möglichkeiten:
1. Möglichkeit: Anfangswert $f(0) = 90$ nehmen und einen weiteren Punkt, z. B. (3 | 650).
Es folgt: $90 = a \cdot b^0 \Rightarrow a = 90$
$650 = a \cdot b^3 \Rightarrow b^3 = \frac{650}{90} = 7{,}2 \Rightarrow b = \sqrt[3]{7{,}2} \approx 1{,}93.$
Damit lautet der Funktionsterm der gesuchten Exponentialfunktion: $f(x) = 90 \cdot 1{,}93^x$.
2. Möglichkeit (näherungsweise): Anfangswert $f(0) = 90$ und vorher ermittelter Quotient 1,9 liefern näherungsweise $f(x) = 90 \cdot 1{,}9^x$.

3 Mit $x = 10$ ergibt der gefundene Funktionsterm:
$f(10) = 90 \cdot 1{,}93^{10} \approx 64\,538$
Nach 10 Jahren besteht die Population aus etwa 64 538 Tieren.

Aufgaben 3

3 Bestimmen Sie eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, deren Graph durch die Punkte $P(0|2)$ und $Q(1|6)$ verläuft.

Lösung:

Einsetzen der Koordinaten der Punkte in die Funktionsgleichung liefert:

$P(0|2)$: $2 = a \cdot b^0 \Rightarrow 2 = a \cdot 1 \Rightarrow a = 2$

$Q(1|6)$: $6 = a \cdot b^1$ Mit $a = 2$ folgt $b = 3$.

Der Funktionsterm lautet somit $f(x) = 2 \cdot 3^x$.

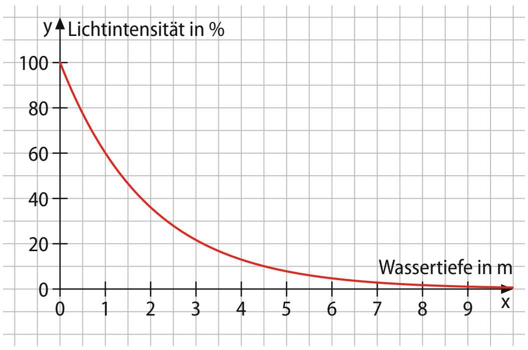
3.1 Bestimmen Sie jeweils eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, deren Graph durch die angegebenen Punkte P und Q verläuft.

a) $P(-1|1{,}5)$, $Q(3|24)$
b) $P(-2|0{,}\overline{3})$, $Q(2|27)$
c) $P(-3|-0{,}5)$, $Q(1|-8)$
d) $P(-4|4)$, $Q(-1|0{,}5)$

3.2 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ geht durch die Punkte $P\left(0\middle|\frac{2}{3}\right)$ und $Q\left(1\middle|\frac{2}{9}\right)$. Geht es auch durch den Punkt $R\left(2\middle|\frac{2}{81}\right)$?

Aufgaben 4

4 Die Intensität des Lichts in einem See nimmt mit steigender Wassertiefe ab. An der Wasseroberfläche beträgt die Lichtintensität 100 %. Pro Meter Tiefe wird das Licht jeweils um 40 % schwächer.
Geben Sie einen Funktionsterm an, der die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Wassertiefe beschreibt, und zeichnen Sie den zugehörigen Funktionsgraphen.



Lösung:

In 1 m Tiefe beträgt die Lichtintensität noch $60\,\% = 0{,}6$. In 2 m Tiefe ist die Lichtintensität auf $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36 = 36\,\%$ gesunken. Dies ergibt für die Lichtintensität I die Funktionsgleichung $I(x) = 0{,}6^x$ (x ist die Wassertiefe in m).

4.1 **a)** Eine Kolonie von 1000 Bakterien verdoppelt sich unter Laborbedingungen jeweils in 36 Stunden. In welcher Zeit verzehnfacht sie sich?

b) Die Kolonie von 1000 Bakterien wächst zunächst 9 Tage lang unter den Laborbedingungen aus Teilaufgabe a). Danach werden die Bedingungen so verändert, dass sich die Anzahl der Bakterien täglich halbiert. Nach wie vielen Tagen (von Anfang an gerechnet) ist die ursprüngliche Anzahl von 1000 Bakterien wieder erreicht?

4.2 Radioaktive Stoffe senden Strahlen aus und zerfallen dabei. Die Masse eines radioaktiven Elements nimmt exponentiell in Abhängigkeit von der Zeit ab. 1986 wurden bei einem Reaktorunfall in Tschernobyl radioaktives Jod 131 und Caesium 137 freigesetzt.

a) Die Masse des radioaktiven Jods 131 nimmt pro Tag um 8 % ab. Wie viel Milligramm sind nach 10 Tagen noch vorhanden, wenn es ursprünglich 100 mg waren?

b) Caesium 137 hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren. Welcher Anteil (in Prozent) der anfangs vorhandenen Menge Caesium ist nach 13 Jahren noch vorhanden?

2.1 Die Euler'sche Zahl e und die natürliche Exponentialfunktion

Entdecken

1 Petaflop = 10^{15} (1 Billiarde) Rechenoperationen pro Sekunde

Forscher haben berechnet, wie viel Rechenleistung bei den größten KI-Projekten (KI: Künstliche Intelligenz) der vergangenen Jahre eingesetzt wurde. In den Jahren 2012 bis 2017 hat sich eine Steigerung um den Faktor 300 000 ergeben. Das bedeutet, dass sich die Rechenleistung – gemessen in Petaflops – alle dreieinhalb Monate verdoppelt.

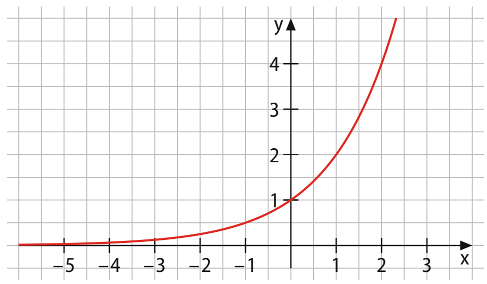
- Erstellen Sie einen Graphen, der die Zunahme der Rechenleistung in den Jahren 2012 bis 2017 verdeutlicht. Die Rechenleistung im Jahr 2012 lag bei 0,01 Petaflops.

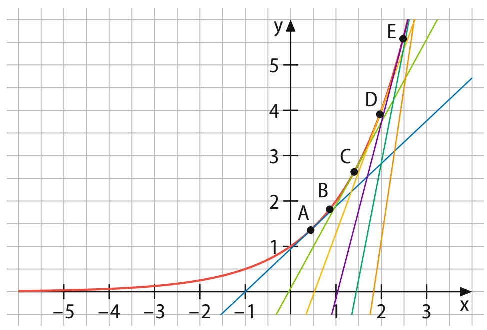
Verstehen

Wenn sich ein Bestand pro Zeiteinheit verdoppelt, handelt es sich um keine konstante Zuwachsrate, sondern um eine, die vom jeweiligen Bestand abhängig ist. Ein solches Wachstum nennt man **exponentielles Wachstum**. Der Bestand wächst in derselben Zeitspanne immer um denselben Faktor b (bei einer Verdoppelung um den Faktor 2). Es ergibt sich der abgebildete Graph, der zum Funktionsterm $f(x) = a \cdot b^x$ gehört.

a: Anfangsbestand (zum Zeitpunkt $t = 0$)

Oft ist die momentane Zuwachsrate von Interesse. Gesucht ist also die Ableitung. Da wir noch keine Regel kennen, um eine Exponentialfunktion abzuleiten, betrachten wir die Tangentensteigungen. Diese werden mit wachsendem x immer größer; trägt man sie im Koordinatensystem auf, sieht der entstehende Graph wieder wie eine Exponentialfunktion aus, im Vergleich zur Ausgangsfunktion leicht gestreckt oder gestaucht.



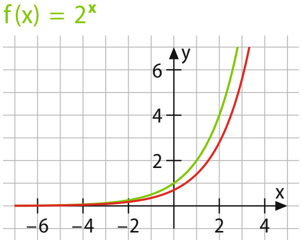


Merke

Die Ableitung der **Exponentialfunktion** f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$ $(b > 0)$ ist wieder eine Exponentialfunktion, deren Graph in y-Richtung gestreckt oder gestaucht, mitunter auch an der x-Achse gespiegelt ist. Es gilt also: $\mathbf{f'(x) = k \cdot b^x \; (k \neq 0)}$. Dabei ist k ein konstanter Streckfaktor, der nur von b abhängt.

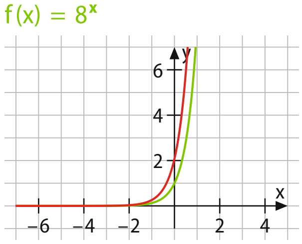
Für unterschiedliche Werte von b und k erhält man etwa folgende Funktionsgraphen:

$f(x) = 2^x$



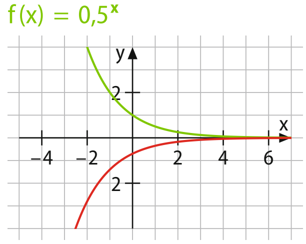
$k = 0{,}7$

$f(x) = 8^x$



$k = 2{,}08$

$f(x) = 0{,}5^x$



$k = -0{,}69$

Die Frage ist nun: Wie lässt sich k ermitteln?
An der Stelle 0 gilt: $f'(0) = k \cdot b^0 = k$. Der Streckfaktor k ist also die Ableitung an der Stelle 0, er gibt die Steigung von f im Schnittpunkt mit der y-Achse an: $f(x) = b^x \Rightarrow f'(x) = f'(0) \cdot b^x$.
Nun kann man den Differenzenquotienten $\frac{b^x - b^0}{h} = \frac{b^h - 1}{h}$ zu dem Schnittpunkt mit der y-Achse $(0|1)$ und zum Punkt $(h|b^h)$ für $h \to 0$ untersuchen. Dies sieht für die Funktion f mit $f(x) = 5^x$ wie in der Tabelle aus. Offensichtlich streben die Werte des Differenzenquotienten für $h \to 0$ gegen 1,61; für $f(x) = 5^x$ gilt also: $f'(x) = f'(0) \cdot 5^x = 1{,}61 \cdot 5^x$.

h	$\frac{5^h - 1}{h}$
−0,1	1,49
0,1	1,746
−0,01	1,6
0,01	1,62
−0,001	1,61
0,001	1,61

Es stellt sich nun folgende Frage:
Gibt es eine Basis b, für die der Faktor $k = 1$ ist, für die also gilt: $f(x) = f'(x)$?
Wir versuchen, uns dem Ergebnis experimentell anzunähern, indem wir verschiedene Basen wählen und schauen, wie weit k von 1 entfernt ist.

Basis b	2	3	4	10	…
f′(0) = k	0,69	1,1	1,39	2,3	…

Gemäß der oben angelegten Tabelle liegt die Vermutung nahe, dass diese Basis, für die $k = 1$ ist, zwischen 2 und 3 liegt. Wir probieren also Basen zwischen 2 und 3 aus (siehe Tabelle).

Basis b	2,6	2,7	2,8	2,9	…
f′(0) = k	0,955	0,993	1,029	1,065	…

Die gesuchte Basis muss also zwischen 2,7 und 2,8 liegen. Wir probieren weiter aus:

Basis b	2,71	2,72	2,718	2,719	2,7182	2,7183
f′(0) = k	0,997	1,0006	0,999897	1,000265	0,99997	1,000007

Durch fortgesetztes Einschachteln der gesuchten Zahl erhält man schließlich:
Für $e = 2{,}718281\ldots$ gilt: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$. Die Zahl e nennt man **Euler'sche Zahl**.

Leonhard Euler (1707–1783)

Merke

Die Exponentialfunktion f mit $\mathbf{f(x) = e^x}$ mit der Basis $\mathbf{e = 2{,}71828\ldots}$, der so genannten **Euler'schen Zahl**, heißt **natürliche Exponentialfunktion** oder **e-Funktion**. Ihre besondere Eigenschaft ist, dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt: $\mathbf{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$.

Kann man k auch ohne den Grenzwertprozess bestimmen? Hierbei hilft der Logarithmus.
Den Logarithmus zur Basis e nennt man **natürlichen Logarithmus ln** (logarithmus naturalis).
Es gilt: $\ln(e) = 1$.

Zur Erinnerung: *Der Logarithmus $\log_n(m)$ ist diejenige Zahl x, für die gilt: $n^x = m$. Beispiel: $\log_2(16) = 4$, weil $2^4 = 16$ ist.*

Wir überführen zunächst die allgemeine in eine natürliche Exponentialfunktion:
$b = e^r \Leftrightarrow \ln(b) = \ln(e^r)$. Mit den Rechenregeln für Logarithmen kann man die rechte Seite wie folgt schreiben: $\ln(b) = r \cdot \ln(e) = r$.
Mit $\ln(e) = 1$ und $r = \ln(b)$ folgt: $b = e^r = e^{\ln(b)}$ und damit $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{x \cdot \ln(b)}$.

Wir leiten diesen Ausdruck mit der Kettenregel ab (innere Funktion: $x \cdot \ln(b)$; äußere Funktion: e^u): $f'(x) = \ln(b) \cdot e^{x \cdot \ln(b)} = \ln(b) \cdot b^x$. Somit gilt:

Merke

Für die allgemeine Exponentialfunktion f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$, $b > 0$ gilt: $\mathbf{f'(x) = \ln(b) \cdot b^x}$.

Aufgaben

Beispiel
Basis e

1 Schreiben Sie den Funktionsterm von $f(x) = 2^x$ in einen mit Basis e um.
Lösung:
Mithilfe der Beziehung $x = e^{\ln(x)}$ und der Potenzgesetze lässt sich eine Exponentialfunktion a^x mit Basis a in eine mit Basis e umwandeln: $2 = e^{\ln(2)}$ und $2^x = (e^{\ln(2)})^x = e^{\ln(2)\cdot x}$.

2 Schreiben Sie die jeweiligen Funktionsterme mit der Basis e.
a) $f(x) = 3^x$ **b)** $f(x) = 0{,}3^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **d)** $f(x) = (\sqrt{5})^x$

3 Leiten Sie mit der Kettenregel ab, nachdem Sie die jeweiligen Funktionsterme in solche mit der Basis e umgeschrieben haben.
a) $f(x) = 10^x$ **b)** $f(x) = 2{,}71^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **d)** $f(x) = \frac{1}{7^{-x}}$

Beispiel
Ableitung

4 Leiten Sie die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ ab, ohne den Funktionsterm vorher explizit mit der Basis e geschrieben zu haben.
Lösung:
Da die Ableitung von $f(x) = a^x$ die Funktion $f'(x) = \ln(a)\cdot a^x$ ist, ist die Ableitung von $f(x) = 2^x$ die Funktion $f'(x) = \ln(2)\cdot 2^x \approx 0{,}69\cdot 2^x$.

5 Bestimmen Sie zur Funktion f die Ableitungsfunktion und vereinfachen Sie das Ergebnis.
a) $f(x) = 3^x$ **b)** $f(x) = 0{,}3^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **d)** $f(x) = e^x$
e) $f(x) = 2^x + 2$ **f)** $f(x) = e^{x+2}$ **g)** $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ **h)** $f(x) = -e^{-x}$
i) $f(x) = x\cdot e^x$ **j)** $f(x) = (x + e^x)^2$ **k)** $f(x) = \sqrt{e^x}$ **l)** $f(x) = e^{\sqrt{x}}, x > 0$

6 Wie groß ist die Steigung der Funktion an der jeweils angegebenen Stelle x_0?
a) $f(x) = 2^x;\ x_0 = 2$ **b)** $f(x) = 5^x;\ x_0 = 1$ **c)** $f(x) = e^x;\ x_0 = 0$ **d)** $f(x) = e^{4x};\ x_0 = e$

7 **a)** Berechnen Sie den Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0.
1 $f(x) = 2{,}5^x;\ x_0 = 0{,}5$ **2** $f(x) = 0{,}25^x;\ x_0 = 2{,}5$ **3** $f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e}\right)^x;\ x_0 = 0$
b) Welche Bedeutung hat der Wert f'(0) für den Graphen der Funktion f?

8 Geben Sie zur Funktion f eine Stammfunktion F an (zur Erinnerung: $F'(x) = f(x)$).
a) $f(x) = 4^x$ **b)** $f(x) = 5^x + 5$ **c)** $f(x) = 3^{x+1}$ **d)** $f(x) = e^{x+1}$

9 Berechnen Sie.
a) $e^{\ln(4)} - e^{\ln(2)}$ **b)** $e^{4-\ln(2)}$ **c)** $\frac{e^{\ln(e)}}{(\ln(e))^e}$ **d)** $\sqrt[3]{\sqrt{(\ln(e))^5}}$

Nachgefragt

- Ein Mitschüler schreibt Ihnen eine Nachricht: „Was ist e?"
  Welche knappe, aber möglichst gute Antwort würden Sie ihm geben?
- Beschreiben Sie den Prozess, wie man herausfinden kann, dass die Ableitung der e-Funktion wieder die e-Funktion ist.
- Erklären Sie, wie man eine Exponentialfunktion mit allgemeiner Basis in eine mit Basis e umwandeln kann, und stellen Sie dar, warum dies eine zielführende Umformung ist.

10 Ordnen Sie jeder Funktion ihre jeweilige Ableitung zu. Ergänzen Sie diejenigen Funktionen bzw. Ableitungen, die keinen Partner haben.

1 $f(x) = 2^{x+1}$ **2** $f(x) = 2^{x+3}$ **3** $f(x) = x + 2^x$ **4** $f(x) = x \cdot 2^x$ **5** $f(x) = \sqrt{2^x}$

A $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{\frac{x}{2}-1}$ **B** $f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x + 1$ **C** $f'(x) = 2 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$

D $f'(x) = 8 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$ **E** $f'(x) = (\ln(2) \cdot x + 1) \cdot 2^x$ **F** $f'(x) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot 2^{x+1}$

11 Bestimmen Sie die Extremstelle der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$.

Beispiel
Extremstellen

Lösung:

Mit der Produktregel erhält man: $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x) \cdot e^x$. Das notwendige Kriterium $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x = 0$ liefert $x = -1$. Als hinreichendes Kriterium kann man das Vorzeichenkriterium nehmen und in der Umgebung um $x = -1$ überprüfen: $f'(-1{,}5) = -0{,}11$ und $f'(0) = 1$. Es liegt also ein Vorzeichenwechsel von – nach + vor und damit ein Minimum.

12 Find the extrema of the following functions and determine for each the extremum type.

a) $f(x) = (x + 1) \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$ **c)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **d)** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

13 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 4^x$ an der Stelle $x = 2$.

Beispiel
Tangentengleichung

Lösung:

Die Ableitungsfunktion lautet $f'(x) = \ln(4) \cdot 4^x$. An der Stelle $x = 2$ gilt:
$f'(2) = \ln(4) \cdot 4^2 \approx 1{,}38 \cdot 16 = 22{,}18$. Tangentengleichung: $y = m \cdot x + c$; $m = f'(2) \approx 22{,}18$
Mit $x = 2$: $4^2 = 22{,}18 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 16 - 44{,}36 = -28{,}36 \Rightarrow y = 22{,}18 \cdot x - 28{,}36$

14 **1** $f(x) = x \cdot e^x$ **2** $f(x) = x^2 \cdot e^x$ **3** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **4** $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten an den Graphen von f an der Stelle $x = 3$.
b) Ermitteln Sie mithilfe der Ableitung f′ das Monotonieverhalten und Extremstellen.

15 **a)** Bilden Sie jeweils die erste und die zweite Ableitung der beiden Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ und g mit $g(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$. Was fällt Ihnen auf?
b) Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen in ein Koordinatensystem. An welchen Funktionsgraphen erinnert Sie der Graph von f? Zeichnen Sie ihn ebenfalls ein.
c) Bilden Sie die Summe der beiden Funktionen f und g. Was stellen Sie fest?
d) Bilden Sie die Differenz $g^2(x) - f^2(x)$. Was stellen Sie fest?
e) Recherchieren Sie, was sich hinter den beiden hyperbolischen Funktionen sinh (x) und cosh (x) verbirgt, und was man unter einer „Katenoide“ versteht.

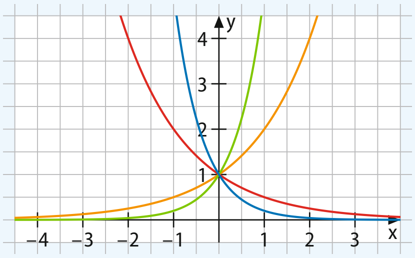
Nachgefragt

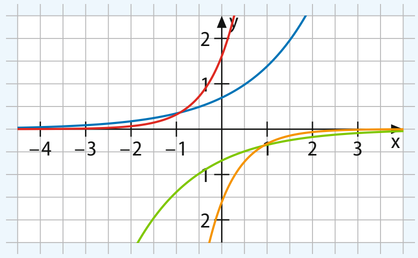
- Geben Sie eine Funktion an, bei der die Ableitung an jeder Stelle viermal (sechsmal, zehnmal) so groß ist wie der Funktionswert an der entsprechenden Stelle.
- Begründen Sie: Die zweite Ableitung einer Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ ist wieder eine Exponentialfunktion.
- Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahl e als Basis von Exponentialfunktionen.
- Wie sieht die 1000. Ableitung der Funktion f mit $f(x) = 2e^x$, der Funktion g mit $g(x) = e^{2x}$ und der Funktion h mit $h(x) = e^{-2x}$ aus? Begründen Sie.

2.2 Graphen von Exponentialfunktionen

Entdecken

Links sind Graphen verschiedener Exponentialfunktionen dargestellt sowie die zugehörigen Funktionsterme, zudem rechts die Graphen der Ableitungsfunktionen.





1 $f(x) = 2^x$ **2** $f(x) = 5^x$ **3** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **4** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

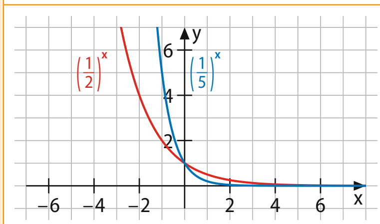
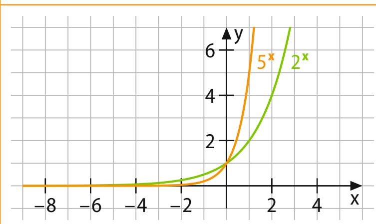
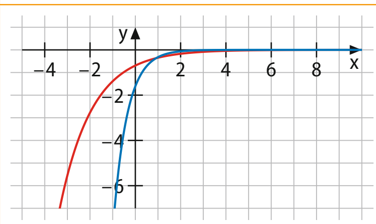
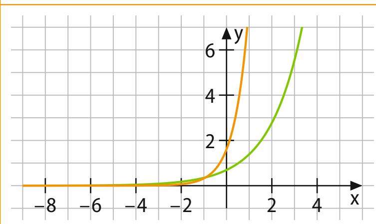
- Ordnen Sie die Funktionsgraphen ihren Termen sowie ihren Ableitungsgraphen zu.

Verstehen

Wir fassen die Auswirkungen des Parameters b im Term b^x auf den Funktionsgraphen und auf den Graphen der Ableitung zusammen.

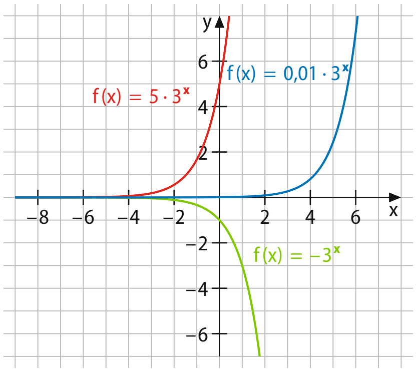
Merke

Für den Graphen der **Exponentialfunktion** f mit $\mathbf{f(x) = b^x}$ $(b > 0)$ gilt:

	$0 < b < 1$	**$b > 1$**
Graph von f	streng monoton fallend	streng monoton steigend
	Je kleiner b ist, desto steiler fällt der Graph.	Je größer b ist, desto stärker steigt der Graph.
		
	Die Graphen aller Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b^x$ gehen durch den Punkt $(0 \mid 1)$ und haben die x-Achse als Asymptote.	
Graph von f'	verläuft unterhalb der x-Achse, welche Asymptote ist und nicht geschnitten wird.	verläuft oberhalb der x-Achse, welche Asymptote ist und nicht geschnitten wird.
	Je kleiner b ist, desto steiler ist der Ableitungsgraph.	Je größer b ist, desto steiler ist der Ableitungsgraph.
		

In einem nächsten Schritt verknüpfen wir den Term b^x multiplikativ mit einem Vorfaktor und beobachten die Auswirkungen auf den Graphen der Funktion sowie auf den der Ableitung. Wir erkennen:

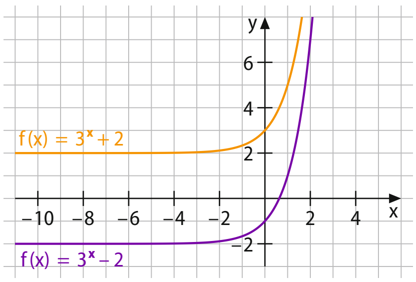
Ein Vorfaktor a hat Auswirkungen auf das Strebeverhalten für $x \to \pm\infty$ und auf die Monotonie des Graphen der Funktion. Unterscheiden müssen wir zwischen den beiden Fällen $a > 0$ und $a < 0$.



Nun verknüpfen wir den Term b^x additiv mit einer Zahl und beobachten wiederum die Auswirkungen auf den Graphen sowie auf den der Ableitung.

Wir stellen fest:

Der Summand d verschiebt den Graphen in y-Richtung (also nach oben oder nach unten). Dadurch wird auch die Asymptote nach oben oder nach unten verschoben, ebenso der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.



Merke

Beim Graphen der **Exponentialfunktion** f mit $\mathbf{f(x) = a \cdot b^x + d}$ muss man für $b > 1$ folgende Fälle unterscheiden:

	Graph von f	**Graph von f′**
$\mathbf{f(x) = a \cdot b^x}$ **mit** $\mathbf{a > 0}$	▪ streng monoton steigend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a)$	▪ streng monoton steigend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a \cdot \ln(b))$
$\mathbf{f(x) = a \cdot b^x}$ **mit** $\mathbf{a < 0}$	▪ streng monoton fallend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a)$	▪ streng monoton fallend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid a \cdot \ln(b))$
$\mathbf{f(x) = b^x + d}$ **mit** $\mathbf{d \in \mathbb{R},\ d \neq 0}$	▪ streng monoton steigend ▪ Asymptote bei $y = d$ ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid 1 + d)$	▪ streng monoton steigend ▪ x-Achse als Asymptote ▪ Schnittpunkt mit y-Achse bei $(0 \mid \ln(b))$

Aufgaben

1 Zeigen Sie, dass nicht nur die Funktion f mit $f(x) = e^x$, sondern auch die Funktion g mit $g(x) = c \cdot e^x$ mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

2 Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktion.

a) $f(x) = 2e^x + 2$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}e^x - 1$ **c)** $f(x) = 3x - 0{,}25 \cdot e^x$

3 Untersuchen Sie, ob – ähnlich wie die e-Funktion – auch die Funktionen h mit $h(x) = e^{k \cdot x}$ und k mit $k(x) = e^{x+c}$ mit ihrer Ableitung übereinstimmen.

Beispiel
Ableitung

4 Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (x-2)^2 \cdot e^{-2x}$.

Lösung:

Zunächst leiten wir mit der Kettenregel den Baustein $g(x) = (x-2)^2$ *ab:*
$g'(x) = 2 \cdot (x-2)$; *ebenso den Baustein* $h(x) = e^{-2x}$: $h'(x) = -2 \cdot e^{-2x}$.
Nun folgt mit der Produktregel: $f'(x) = 2 \cdot (x-2) \cdot e^{-2x} + (x-2)^2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$
$= 2 \cdot (x-2) \cdot e^{-2x} \cdot (1 - (x-2)) = 2 \cdot (x-2) \cdot e^{-2x} \cdot (3-x)$.

5 Leiten Sie die folgenden zusammengesetzten Funktionen ab und geben Sie jeweils an, welche Ableitungsregeln Sie benutzt haben.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = x^3 \cdot e^{0{,}5x}$
d) $f(x) = (x^3 - 1) \cdot e^x$ **e)** $f(x) = (x-1) \cdot e^{x-1}$ **f)** $f(x) = (x+1)^3 \cdot e^{-0{,}5x}$

Nachgefragt

- Geben Sie an, wie man eine Funktion f mit $f(x) = e^x + d$ rechnerisch ableitet, und erklären Sie den Ableitungsterm anhand des Graphen.
- Erläutern Sie mithilfe der Potenzgesetze, dass die Auswirkungen des Parameters c in $f(x) = b^{x+c}$ in den Ausführungen mitbehandelt wurden und keinen eigenständigen Fall darstellen.
- Geben Sie an, wie man eine Funktion f mit $f(x) = e^{x+c}$ rechnerisch ableitet, und erklären Sie den Ableitungsterm anhand des Graphen. Gehen Sie auch auf den Zusammenhang zur Funktion g mit $g(x) = a \cdot e^x$ und zu deren Ableitung ein.
- Zählen Sie wesentliche Eigenschaften des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion auf (Symmetrie, Nullstellen, Schnittpunkte mit den Achsen, Extremstellen, Monotonie, Definitions- und Wertemenge, Strebeverhalten).
- Erklären Sie den Begriff „Asymptote" an einem konkreten Beispiel. Zählen Sie Funktionenklassen auf, die über eine Asymptote verfügen.

6 Zeichnen Sie den Graphen von f mit $f(x) = e^x$ und beschreiben Sie seinen Verlauf. Vergleichen Sie mit den Graphen der Funktionen g mit $g(x) = 0{,}5^x$ und h mit $h(x) = 4^x$ und schreiben Sie dazu einen kleinen Aufsatz.

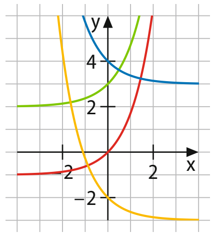
7 Erläutern Sie, wie man den Graphen von f mit $f(x) = e^x$ verschieben, spiegeln, strecken oder stauchen muss, um den Graphen der angegebenen Funktion zu erzeugen.

a) $f(x) = e^x - 3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+2}$ **c)** $f(x) = 3 + e^{-x}$
d) $f(x) = -e^{-x}$ **e)** $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x - e^2$ **f)** $f(x) = 3 - e^{-x}$

8 Beschreiben Sie jeweils, wie aus dem Graphen der Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ der Graph der Funktion g, h bzw. k hervorgeht.

a) g mit $g(x) = e^x - 1$ **b)** h mit $h(x) = e^{x-2}$ **c)** k mit $k(x) = 2 \cdot e^x$

9 In der Abbildung sehen Sie Graphen von Funktionen f der Form $f(x) = e^x + c$ bzw. $f(x) = e^{-x} + c$. Ermitteln Sie für jeden Graphen die zugehörige Funktionsgleichung.



10 **1** f: $f(x) = e^x(e^x + 1)$ **2** f: $f(x) = -xe^{x^2}$ **3** f: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ **4** f: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2 - 1}$.

Finden Sie heraus, welcher Steckbrief auf welche dieser Funktionen zutrifft (G_f ist der Graph von f).

Steckbrief A
- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(1) = -e$
- G_f ist symmetrisch zum Ursprung
- G_f verläuft durch den 2. und den 4. Quadranten
- $f(0) = 0$

Steckbrief B
- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$
- $f(-1) = -0{,}5$
- G_f ist symmetrisch zum Ursprung
- G_f verläuft durch den 3. und den 1. Quadranten
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Steckbrief C
- $f(0) = 0$
- $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
- G_f ist symmetrisch zur y-Achse
- G_f verläuft durch alle vier Quadranten
- f besitzt mehr als eine Definitionslücke

Steckbrief D
- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(0) \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
- G_f verläuft durch den 2. und den 1. Quadranten
- $f(1) \neq f(-1)$

11 Zeichnen Sie jeweils zunächst den Graphen G_f der Funktion f: $f(x) = e^x$ in Ihr Heft.

a) G_f wird in Richtung der y-Achse verschoben, sodass der neue Graph G_{f_1} durch den Punkt $T_1(0|3)$ verläuft. Zeichnen Sie G_{f_1} und geben Sie die Funktion f_1 an.

b) G_f wird in Richtung der x-Achse verschoben, sodass der neue Graph G_{f_2} durch den Punkt $T_2(0|e)$ verläuft. Zeichnen Sie G_{f_2} und geben Sie f_2 an.

c) G_f wird an der x-Achse gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_3} und geben Sie f_3 an.

d) G_f wird an der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_4} und geben Sie f_4 an.

e) G_f wird an der y-Achse gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_5} und geben Sie f_5 an.

f) G_f wird am Ursprung gespiegelt. Zeichnen Sie den neuen Graphen G_{f_6} und geben Sie f_6 an.

12 Geben Sie das Verhalten der Funktionsgraphen für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$ an.

a) $f(x) = x \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x \cdot e^{-x}$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ **e)** $f(x) = 10^6 - e^x$ **f)** $f(x) = 10^6 - e^{-x}$

13 Untersuchen die Graphen der Funktionen auf Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung.

a) $f(x) = 4 \cdot e^{x-1} - 3$ **b)** $f(x) = 2x \cdot e^{-x} - 1$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot e^x$

d) $f(x) = 3 \cdot e^{x^2} + 2$ **e)** $f(x) = 5x \cdot e^{x^2}$ **f)** $f(x) = x^3 \cdot e^{-2x}$

Beispiel
Parameter bestimmen

14 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{x+c}$.

a) Für welchen Wert von c liegt der Punkt P (1 | e) auf dem Graphen von f?

b) Für welchen Wert von c hat die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 1$ den Wert e^2?

Lösung:

a) *Wir setzen die Koordinaten des Punkts P in die Funktionsgleichung ein und lösen nach c auf:* $e = e^{1+c} \Leftrightarrow e = e^1 \cdot e^c \Leftrightarrow \frac{e}{e} = e^c \Leftrightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 0.$

b) *Wir bilden die 1. Ableitung, da sie die Tangentensteigung liefert:* $f'(x) = e^{x+c}$. *Nun setzen wir ein, dass die 1. Ableitung an der Stelle* $x_0 = 1$ *den Wert* e^2 *hat:*
$e^2 = e^{1+c} \Leftrightarrow e^2 = e^1 \cdot e^c \Leftrightarrow e = e^c \Rightarrow c = 1.$

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{k \cdot x}$.

a) Für welchen Wert von k liegt der Punkt P (1 | 7,39) auf dem Graphen von f, für welchen Wert von k der Punkt Q (2 | 2)?

b) Für welchen Wert von k hat die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ den Wert 0?

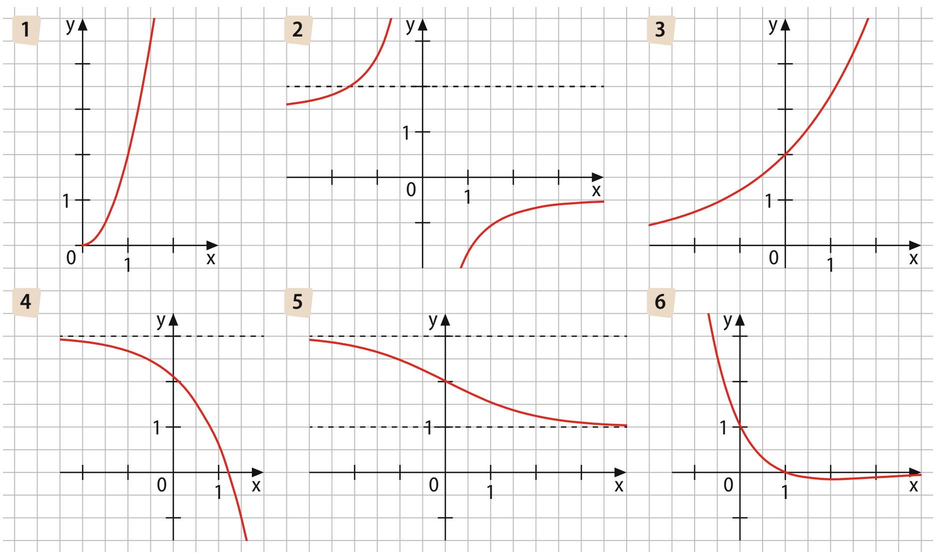
16 **a)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 6x \cdot e^{-x^2}$ und beschreiben Sie Eigenschaften des Graphen.

b) Welche Auswirkungen hat eine Veränderung des Vorfaktors 6x, welche eine Veränderung des Exponenten von e^{-x^2}? Probieren Sie aus, eventuell mit Unterstützung eines Funktionenplotters.

17 Assign each of the functions to its corresponding graph.

A $a(x) = 2e^{0{,}5x}$ **B** $b(x) = 3 - e^x$ **C** $c(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} + 2$

D $d(x) = \frac{2}{1 - e^x}$ **E** $e(x) = (1 - x)\,e^{-x}$ **F** $f(x) = 2xe^{\ln x}$



18 Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = (x^2 - 3) \cdot 3^x$ ihr Graph ist G_f.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Achsenpunkte von G_f.

b) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie und das Verhalten für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

c) Zeichnen Sie G_f im Intervall [−4; 2[.

19 Ordnen Sie den Funktionstermen ihre zugehörigen Graphen zu. Skizzieren Sie für die Terme, die keinen Partner haben, einen Graphen, und geben Sie für die Graphen ohne Partner einen Term an.

$f_1(x) = 1 + 2 \cdot e^{x-3}$

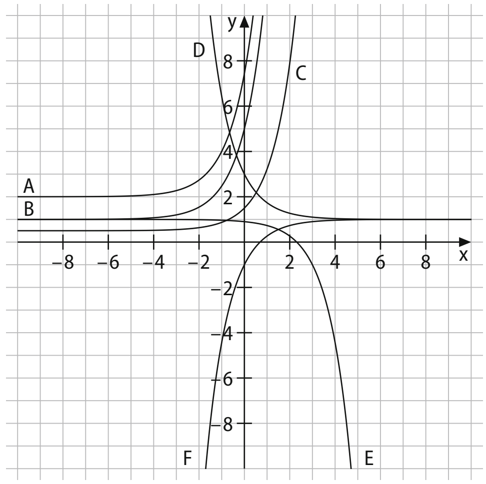
$f_2(x) = 2 + 2e^{x+1}$

$f_3(x) = 4e^x + 1$

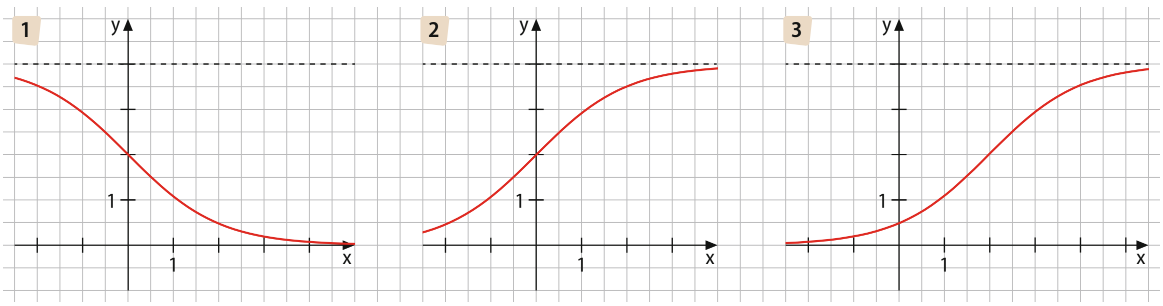
$f_4(x) = 1 - 2e^{-x}$

$f_5(x) = 1 - 2 \cdot e^{x-3}$

$f_6(x) = 2 - e^{x-3}$



20 Gegeben ist die Funktion f: $f(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$ ihr Graph ist G_f. Die drei abgebildeten Funktionsgraphen sind zueinander kongruent; einer von ihnen ist G_f. Finden Sie heraus, welcher von ihnen G_f ist, und geben Sie die Funktionsterme zu den beiden anderen Graphen an.



21 **a)** Wie lautet die n-te Ableitung der Funktion f mit $0{,}5 \cdot e^x$? Zeichnen Sie – eventuell mit einem Funktionenplotter – die ersten zehn Ableitungen in ein Koordinatensystem.

b) Leiten Sie aus a) eine Vermutung ab, wie die n-te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$ aussieht. Bestätigen Sie Ihre Vermutung durch Rechnen und Zeichnen.

Nachgefragt

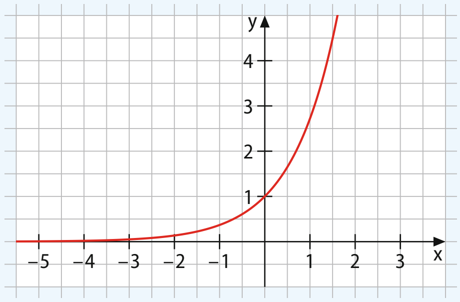
- „Die Funktion f mit $f(x) = 2^x$ gewinnt den Schnellwachswettbwerb gegen die Funktion g mit $g(x) = x^2$.“ Beurteilen Sie die Richtigkeit dieser Aussage.
- „Wer gewinnt? Wird die Funktion f mit $f(x) = e^x$ die Funktion g mit $g(x) = x^{10}$ irgendwann einholen?“ Begründen Sie. Worin äußert sich dieses Einholen?
- Ändert sich etwas grundsätzlich am Ausgang des „Rennens“ der Funktionen f mit $f(x) = e^x$ und g mit $g(x) = x^{10}$, wenn Sie bei g einen anderen Exponenten wählen?
- Geben Sie weitere Funktionen (neben $f(x) = e^x$) an, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen.
- Vergleichen Sie den Einfluss der Parameter auf den Graphen bei Potenzfunktionen mit dem bei Exponentialfunktionen.

2.3 Exponentialgleichungen und natürlicher Logarithmus

Entdecken

„Zu welchem Zeitpunkt hat eine Population eine bestimmte Größe erreicht?"
„Wann ist die Hälfte eines radioaktiven Stoffes zerfallen?"
„Nach wie vielen Tagen hat eine Pflanze eine bestimmte Höhe erreicht?"
Das sind Fragen, die auf Exponentialgleichungen hinauslaufen. Zu ihrer Beantwortung wird – graphisch interpretiert – bei einer Exponentialfunktion die x-Koordinate zu einer bestimmten y-Koordinate gesucht.

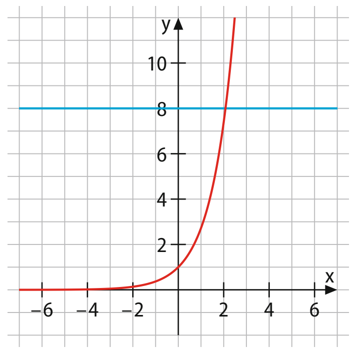
- Lösen Sie die folgenden Gleichungen …
  a) durch Abschätzen und Ausprobieren.
  b) graphisch anhand des abgebildeten Graphen.
  1 $e^x = 3$
  2 $e^x = 6$
  3 $e^x = 8$



Verstehen

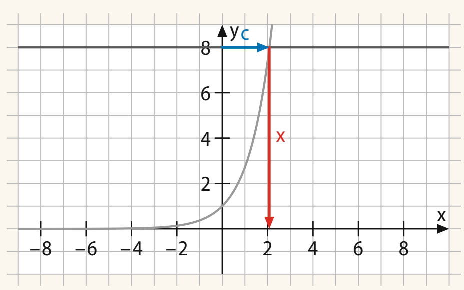
Gleichungen der Form $e^x = c$ heißen **Exponentialgleichungen**. Für ihre Lösung stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung:

- Durch Abschätzen löst man die Gleichung $e^x = c$ näherungsweise, indem man den Wert c der rechten Seite in die Wertereihe $e^1 \approx 2{,}71$, $e^2 \approx 7{,}4$, $e^3 \approx 20{,}1$, $e^4 \approx \ldots$ einsortiert und so den gesuchten Exponenten x erhält. So muss z. B. die Lösung der Gleichung $e^x = 10$ gemäß obiger Werte zwischen 2 und 3 liegen (und näher an 2).
- Graphisch kann man die Gleichung $e^x = c$ lösen, indem man den Graphen der e-Funktion (also die linke Seite der Gleichung) zeichnet sowie den Graphen der rechten Seite und anschließend die x-Koordinate des Schnittpunkts abliest.
  Die Abbildung zeigt die graphische Lösung der Gleichung $e^x = 8$ $(x \approx 2{,}08)$.
- Rechnerisch löst man die Gleichung $e^x = c$ durch die Anwendung des Logarithmus, den Sie bereits zum Lösen der allgemeinen Exponentialgleichung kennen gelernt haben.



Merke

- Die **Exponentialgleichung $e^x = c$** $(c > 0)$ wird durch die Umkehroperation zum Potenzieren, das **Logarithmieren**, gelöst: $e^x = c \Leftrightarrow \log_e(c) = x$.
- Den Logarithmus zur Basis e ($\log_e$) nennt man **natürlichen Logarithmus** (logarithmus naturalis) und kürzt ihn mit **ln** ab.



Wir machen uns den Unterschied zwischen den Operatoren **Logarithmieren**, **Radizieren** (Wurzelziehen) und **Potenzieren** nochmals anhand der Gleichung $a^b = c$ klar:

- Wenn a und b bekannt sind, erhält man c durch Potenzieren. Beispiel: $2^3 = c \quad \Rightarrow c = 8$
- Wenn b und c bekannt sind, erhält man a durch Radizieren.
  Beispiel: $a^3 = 27 \quad \Rightarrow a = \sqrt[3]{27} = 3$
- Wenn a und c bekannt sind, erhält man b durch Logarithmieren.
  Beispiel: $4^b = 64 \quad \Rightarrow b = \log_4(64) = 3$

Der Zusammenhang zwischen der e-Funktion und dem Operator des Logarithmierens wird auch durch die folgenden Beziehungen deutlich, die man zuweilen in Aufgaben benötigt.

Merke

1 Für eine beliebige reelle Zahl c gilt:
$\mathbf{\ln(e^c) = c}$

2 Für eine positive Zahl b gilt:
$\mathbf{e^{\ln(b)} = b}$

Zu **1**: $\ln(e^c) = \log_e(e^c)$ fragt nach der Zahl, mit der man e potenzieren muss, um e^c zu erhalten. Diese Zahl ist c.

Zu **2**: Algebraisch kann man diese Gleichheit zeigen, indem man beide Seiten logarithmiert: $\ln(e^{\ln(b)}) = \ln(b)$.
$\ln(e^{\ln(b)})$ ist diejenige Zahl, mit der man e potenzieren muss, um $e^{\ln(b)}$ zu erhalten – und das ist $\ln(b)$.

Da die Exponentialgleichung $e^x = c$ durch die Umkehroperation des Logarithmierens gelöst wird, ist die Logarithmusfunktion $L(x) = \ln(x)$ die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion $E(x) = e^x$. Dies muss sich auch im Graphen der Logarithmusfunktion widerspiegeln.
Hierzu vertauschen wir in der folgenden zur e-Funktion gehörenden Tabelle die x- und die y-Werte und skizzieren so den Graphen von ln (x).

Die **Umkehrfunktion** ist Ihnen bereits bei der Wurzelfunktion begegnet. Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist die Umkehrfunktion zu der Funktion g mit $g(x) = x^2$ $(x > 0)$.

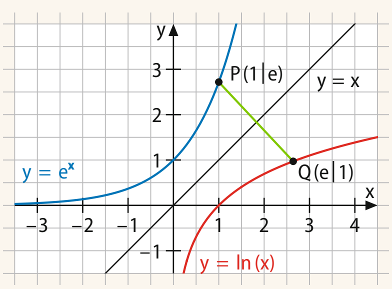
- Rechnerisch erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion, indem man die Funktionsgleichung $y = x^2$ nach x auflöst und dann die Variablen x und y vertauscht.
- Zeichnerisch erhält man den Graphen der Umkehrfunktion, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten spiegelt.

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = e^x$	$\frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}71$	$e^2 \approx 7{,}4$	$e^3 \approx 20{,}1$

Merke

Die natürliche Logarithmusfunktion $L(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von $E(x) = e^x$. Ihr Definitionsbereich sind alle positiven reellen Zahlen.
Ihr Wertebereich sind alle reellen Zahlen. Es gilt:

- für $0 < x < 1$: $\ln(x) < 0$
- für $x = 1$: $\ln(x) = 0$
- für $x > 1$: $\ln(x) > 0$



Aufgaben

1 Schreiben Sie den Term in der Form e^b.

a) $\sqrt{e}$ b) $\frac{1}{e}$ c) $\sqrt[5]{e^2}$ d) $\frac{1}{e^2}$

e) $\frac{e^2}{e^6}$ f) $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ h) 1

Beispiel
Vereinfachung

2 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

a) $\ln(\sqrt{e})$ b) $e^{2 \cdot \ln(3)}$

Lösung:

a) $\ln(\sqrt{e}) = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ *b)* $e^{2 \cdot \ln(3)} = (e^{\ln(3)})^2 = 3^2 = 9$

3 Vereinfachen Sie.

a) $\ln(\sqrt[5]{e})$ b) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ c) $\ln\left(\frac{1}{e^{-3}}\right)$ d) $\ln(e^{-1})$

e) $\ln(e^{-3})$ f) $\ln(\ln(e^e))$ g) $\ln(e^{-2}) + \ln(e^e) + e^{\ln(2)}$ h) $e^{\ln(e)}$

i) $e^{3 \cdot \ln(2)}$ j) $e^{-2 \cdot \ln(4)}$ k) $e^{0{,}5 \cdot \ln(5)}$ l) $\sqrt[5]{e^{5 \cdot \ln(e)}}$

4 Schätzen Sie größenmäßig ab.

a) e b) e^2 c) e^{-1} d) $\sqrt{e}$

e) $\ln(10)$ f) $\ln(30)$ g) $\ln(100)$ h) $\ln(1000)$

Beispiel
Gleichung lösen

5 Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} = 5$.

Lösung:

$e^{2x} = (e^x)^2 = 5 \quad \Rightarrow e^x = \sqrt{5} \quad \Rightarrow x = \ln(\sqrt{5}) \approx 0{,}8$

6 Lösen Sie die Gleichungen.

a) $e^x = 21$ b) $e^{-x} = 0{,}25$ c) $2e^x = 66$ d) $-e^{2x} = -16$

e) $e^{x+3} = 24$ f) $e^{2x} = 11$ g) $e^{-x} = e$ h) $e^{2x} = \frac{1}{e}$

i) $e^x(e^x - e) = 0$ j) $\sqrt{e^x} - \frac{e^3}{e^x} = 0$ k) $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$ l) $e^{2x} - 2 + e^{-2x} = 0$

Nachgefragt

- Begründen Sie, weshalb der natürliche Logarithmus ln nur für positive Zahlen definiert ist, d. h. weshalb bei $\ln(a)$ die Zahl $a > 0$ sein muss.
- Welche Ergebnisse sind beim Berechnen von Logarithmen möglich?
- Valentin meint: „Die Gleichung $e^x = e^2$ muss man durch Logarithmieren lösen, weil es sich um eine Exponentialgleichung handelt.“ Hat er Recht? Argumentieren Sie.
- Begründen Sie, dass folgendes Logarithmengesetz gilt: $\ln(e^n) = n \cdot \ln(e)$.

7 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

a) $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0$ b) $\ln(2 - e^{-x}) = 0$ c) $\ln\frac{x^2 + k^2}{x} = 0$ d) $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0$

8 Lösen Sie die Gleichungen zunächst graphisch bzw. – wenn möglich – näherungsweise im Kopf und dann rechnerisch, falls möglich.

a) $e^{2x} = 15$ b) $e^{x+2} = 18$ c) $2e^x - 2 = 0$ d) $0{,}1 \cdot e^{0{,}1x} + 16 = 64$

e) $e^{-x} - 0{,}125 = 0$ f) $e^x - x^2 = 0$ g) $e^x + e - x = 1$ h) $3e^{2x} = 111$

9 An welchen Stellen hat die Funktion f mit $f(x) = 3e^x - x$ die Steigung 2?

Lösung:

$f'(x) = 3e^x - 1;\ 3e^x - 1 = 2 \Leftrightarrow 3e^x = 3 \Leftrightarrow e^x = 1 \quad \Rightarrow x = 0$

Beispiel
Steigung

10 Find out the points where the slope of the function has the given value m.

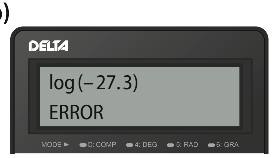
a) $f(x) = 2e^x;\ m = 8$ **b)** $f(x) = 0{,}5e^{2x};\ m = 1$ **c)** $f(x) = -e^x;\ m = -3$

d) $f(x) = -0{,}5e^{-x};\ m = 0{,}25$ **e)** $f(x) = -0{,}5e^{-2x};\ m = 1$ **f)** $f(x) = 2 + e^{2x-1};\ m = 0{,}5$

11 Bei folgenden Rechenausdrücken gibt der WTR stets „Error" an. Begründen Sie.

a)

b)



c)

12 In die folgenden „Lösungen" haben sich Fehler eingeschlichen. Beschreiben und korrigieren Sie sie.

a)
$$\begin{aligned} e^x - 4 &= 5 \\ \ln(e^x) - \ln(4) &= \ln(5) \\ x &= \ln(5) + \ln(4) \\ x &= \ln(9) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} e^{x-2} &= 8 \\ e^x &= 10 \\ x &= \ln(10) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} e^x - 2 &= 3x \\ e^x &= 3x + 2 \\ \ln(e^x) &= \ln(3x+2) \\ x &= \ln(3x+2) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot e^{5x} \\ f'(x) &= 2 \cdot 5x \cdot e^{5x-1} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \cdot e^{4x} \\ f'(x) &= 3 \cdot 4 \cdot e^4 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot e^{2x} \\ &= x^2 \cdot (e^x)^2 \\ f'(x) &= 2x \cdot e^{2x} + 2x \cdot 2 \cdot e^x \end{aligned}$$

13 Bestimmen Sie die Punkte, in denen der Graph von f die Gerade $y = 2$ schneidet.

a) $f(x) = (2 - x) \cdot e^x$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^2 \cdot e^{2x}$ **c)** $f(x) = -x \cdot e^x$

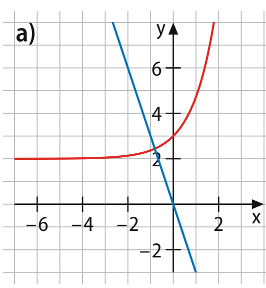
d) $f(x) = -x^4 \cdot e^{-x}$ **e)** $f(x) = -1 + e^x$ **f)** $f(x) = xe^x$

14 Vergleichen Sie jeweils die Ergebnisse und finden Sie eine Gesetzmäßigkeit.

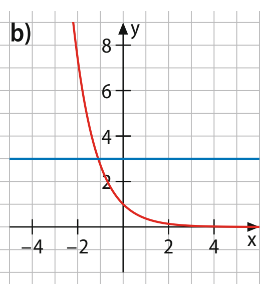
a)	ln (4)	ln (40)	ln (400)	ln (4000)	ln (40 000)	ln (0,4)
b)	ln (9)	ln (0,9)	ln (0,009)	ln (0,0009)	$\ln(9 \cdot 10^{-4})$	$\ln(9 \cdot 10^{4})$

15 Im Folgenden sehen Sie Exponentialgleichungen graphisch dargestellt. Übersetzen Sie sie jeweils in eine algebraische Gleichung und lösen Sie diese. Vergleichen Sie anschließend diese Lösung mit der graphischen.

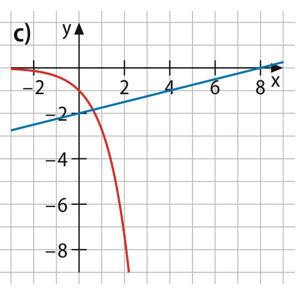
a)



b)



c)



16 Der Bestand der Kudu-Antilopen im Etosha-Nationalpark in Namibia beträgt derzeit rund 350 000 Tiere, womit diese Antilopenart als nicht gefährdet angesehen werden kann. Der Bestand kann durch die Funktion $B(t) = 350\,000 \cdot e^{-0{,}2t}$ (t in Jahren) beschrieben werden.

a) Beschreiben Sie die weitere Entwicklung des Bestands in Worten.

b) Wann umfasst die Kudu-Population nur noch 10 % des aktuellen Bestands?

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Bestandsabnahme innerhalb eines Jahres erstmals weniger als 10 000 Tiere beträgt.

17 Auf Seite 59 steht ein Zitat von Friedhelm Farthmann, in dem er sich auf eine Seerosenpopulation bezieht. Dieses Beispiel wollen wir uns nun genauer anschauen.
Wir nehmen an, dass der Teich eine Fläche von 20 m² hat und dass die Blätter der Seerose am Anfang 0,1 m² des Teichs bedecken. Täglich verdoppelt sich die von den Blättern bedeckte Fläche. Drei Tage „vor dem Ende" ist erst ein Achtel des Teichs bedeckt, zwei Tage „vor dem Ende" ein Viertel, wieder einen Tag später die Hälfte.

a) Ermitteln Sie die dem Wachstum zugrunde liegende Funktion.

b) Nach wie vielen Tagen ist der Teich vollständig zugewachsen?

c) Beschreiben Sie den Gesamtverlauf des Wachstums und erläutern Sie, weshalb das Wachstum zu Beginn trügerisch ist.

d) Was wollte Farthmann mit dem Beispiel ausdrücken? Nehmen Sie Stellung dazu.

18 Das Logarithmengesetz $\ln(e^n) = n \cdot \ln(e)$ haben Sie auf Seite 76 kennen gelernt. Es gibt noch zwei weitere Logarithmengesetze (die nicht nur für den natürlichen Logarithmus ln gelten):

Merke

1 $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b), \quad a, b > 0, c > 0.$

2 $\log_c(a : b) = \log_c(a) - \log_c(b), \quad a, b > 0, c > 0.$

Machen Sie sich die Gültigkeit dieser beiden Gesetze anhand geeigneter Zahlenbeispiele klar. Sie könnten z. B. als Basis $c = 2$ wählen und für die Zahlen a und b Potenzen von 2.

Beispiel
Logarithmengesetze

19 Vereinfachen Sie: $\log(6) - \log(3) - \log(4)$.

Lösung:

$\log(2 \cdot 3) - \log(3) - \log(2^2) = \log(2) + \log(3) - \log(3) - 2\log(2) = -\log(2)$

20 Vereinfachen Sie.

a) $\log(x^3) - \log(x^2) - \log(x)$

b) $\log(a \cdot b) - \log(a^2 \cdot b) - \log\left(\frac{1}{b}\right)$

c) $\log(x^3) - 2\log\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $\log(a + b)^2 - \log(a^2 - b^2)$

e) $\log(a^2 b - b) - \log(a - 1)^2 - \log(a + 1)$

f) $\log(\sqrt{x + 1}) - 0{,}5\log(x + 1) + \log\left(\frac{1}{x}\right) + \log(x^2)$

21 **a)** Beschreiben Sie, was in der abgebildeten Grafik dargestellt wird.

b) Was fällt Ihnen an der x-Achsenskalierung auf? Beschreiben Sie.

c) **Logarithmische Skalen** ermöglichen eine übersichtlichere Darstellung von Kurvenverläufen vor allem dann, wenn sie sich über sehr große Zahlenbereiche erstrecken. Mit anderen Worten: Die logarithmische Skalierung hilft dabei, Daten mit starken Größenunterschieden der Werte darzustellen. Berechnen Sie hierzu als Vorübung folgende Logarithmenwerte:

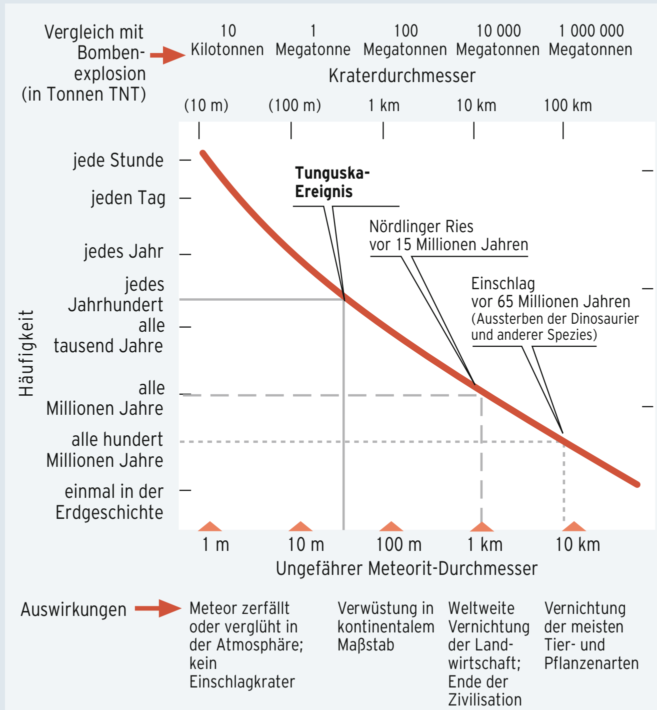
- $\log_{10}(13{,}5)$
- $\log_{10}(213{,}57)$
- $\log_{10}(0{,}17)$
- $\log_{10}(3845{,}91)$

d) Warum können logarithmische Skalen nicht bei 0 beginnen? Warum sind die Teilstriche nicht äquidistant, d. h. warum werden die Abstände bei größeren Werten immer kleiner?

e) Erklären Sie, warum der Graph einer Exponentialfunktion bei einer logarithmisch skalierten x-Achse eine Gerade ergibt. Gehen Sie dabei von einer Exponentialfunktion der Form $y = a \cdot e^{bx}$ aus und logarithmieren Sie beide Seiten. Welche Steigung hat dann die Gerade?

f) Recherchieren Sie, in welchem Zusammenhang die Richter-Skala bzw. die Dezibel-Skala mit dieser Thematik steht und wofür man sie braucht.

Häufigkeit und Auswirkungen von Meteoriteneinschlägen



Quelle: Brownlee und Ward, Rare Earth, New York (Copernicus) 2000, S.165, nach Hartmann und Impey (1994) / F.A.Z.-Grafik Döring

Nachgefragt

- Es gibt zwar keine Logarithmen von null oder von negativen Zahlen, jedoch können Logarithmen negativ sein. Geben Sie hierfür mehrere Beispiele an. Wie kann man an $\log_a(b)$ erkennen, dass der Wert negativ ist?
- Für welche Werte von a ist die Gleichung $3^x = a$ lösbar? Verallgemeinern Sie: Für welche Werte von a ist die Gleichung $b^x = a$ lösbar? Begründen Sie (eventuell auch graphisch).
- Zählen Sie unterschiedliche Möglichkeiten auf, wie Sie Exponentialgleichungen lösen können. Geben Sie zu jeder Möglichkeit auch ein Beispiel an.
- Führen Sie eine Exponentialgleichung an, bei der man auf den Logarithmus zur Lösung der Gleichung verzichten kann.
- Diskutieren Sie, wie viele Schnittpunkte eine Exponentialfunktion mit einer Normalparabel haben kann. Finden Sie für alle gefundenen Fälle ein Beispiel.

2.4 Exponentialfunktion und Logarithmus in Anwendungen

Entdecken

Aussagen wie diese fanden sich in den Pandemie-Monaten der Jahre 2020/21 in den Medien. Sie bezogen sich auf die durch das Corona-Virus ausgelöste Pandemie.

- Was versteht man unter einer Pandemie und wodurch unterscheidet sie sich von einer Epidemie?
- Warum wollte die deutsche Politik im Herbst 2020 unbedingt ein exponentielles Ansteigen der Erkrankungen verhindern?

„Wir müssen verhindern, dass es zu einem exponentiellen Anstieg der Neuinfektionen kommt“, sagte Bundeskanzlerin Angela Merkel am 14. 10. 2020. „Wir sind bereits in einer exponentiellen Phase, wie man an den täglichen Zahlen sieht.“

Verstehen

Wachstumsprozesse sind ein Anwendungsfeld für Exponentialfunktionen. Das exponentielle Wachstum ist vom jeweiligen Bestand abhängig, insbesondere auch vom Anfangsbestand. Deshalb geht der Anfangsbestand in die Funktionsgleichung ein.

Die Tabelle vermittelt einen Überblick über die Verbreitung des Corona-Virus in Deutschland anhand der Gesamtzahl der Infizierten im Zeitraum von Oktober bis November 2020:

10. 9.	17. 9.	24. 9.	1. 10.	8. 10.	15. 10.	22. 10.	29. 10.	5. 11.	12. 11.	19. 11.
258149	269048	281346	295539	315941	352107	403874	498354	631172	762832	891525

Für diesen Verlauf wollen wir nun die zugrunde liegende Exponentialfunktion finden. Dass es sich um kein lineares Wachstum handelt, erkennt man daran, dass die Differenzen zwischen benachbarten Daten nicht konstant sind, sondern ansteigen. Beim exponentiellen Wachstum ist der Quotient aus benachbarten Daten ungefähr konstant, deshalb berechnen wir ihn:

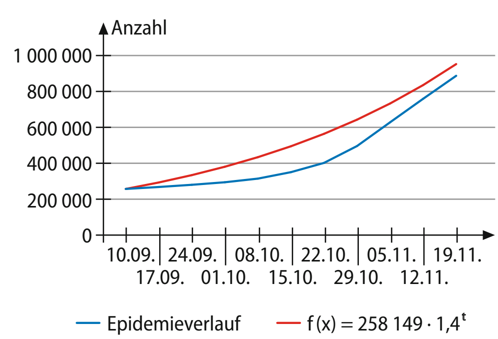
10. 9.	17. 9.	24. 9.	1. 10.	8. 10.	15. 10.	22. 10.	29. 10.	5. 11.	12. 11.	19. 11.
258149	269048	281346	295539	315941	352107	403874	498354	631172	762832	891525
	· 1,04	· 1,05	· 1,05	· 1,07	· 1,11	· 1,15	· 1,23	· 1,27	· 1,21	· 1,17

Gemittelt erhalten wir rund 1,14 als Wachstumsfaktor. Der Bestand zu dem von uns beobachteten Zeitpunkt 0 betrug 258 149 Infizierte. Daraus ergibt sich die Funktionsvorschrift
$f(t) = 258\,149 \cdot 1{,}14^t$ (t in Wochen).

Zum Vergleich berechnen wir die Werte, die sich aus dieser Zuordnungsvorschrift ergeben:

10. 9.	17. 9.	24. 9.	1. 10.	8. 10.	15. 10.	22. 10.	29. 10.	5. 11.	12. 11.	19. 11.
258149	294289	335490	382459	436003	497044	566630	645958	736392	839487	957015

Vergleicht man beide Datenreihen graphisch, erkennt man, dass unsere errechneten Werte eine mathematische „Idealisierung“ der Wirklichkeit darstellen.
Möchte man die Änderungsrate berechnen, ist es sinnvoll, die Funktionsgleichung in eine Exponentialfunktion umzuwandeln.
Mit $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{x \cdot \ln(b)}$ ergibt sich:
$f(t) = 258\,149 \cdot 1{,}14^t = 258\,149 \cdot e^{t \cdot \ln(1{,}14)}$
$\approx 258\,149 \cdot e^{0{,}13 \cdot t}$.



Merke

Exponentielles Wachstum zeichnet sich dadurch aus, dass die Quotienten benachbarter Daten stets gleich sind. Es lässt sich mithilfe der Exponentialfunktion $\mathbf{B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}}$ beschreiben. B (0) ist der Anfangsbestand und $k = \ln(b)$ mit dem Wachstumsfaktor b.

Mit dieser Funktionsgleichung können wir nun konkrete Fragen beantworten wie z. B. die nach der Anzahl der Infizierten Ende Januar 2021, wenn keine Gegenmaßnahmen ergriffen worden wären: Der 28. 1. 2021 entspricht dem Messzeitpunkt 20, und es ergibt sich
$f(20) = 258\,149 \cdot e^{0,13 \cdot 20} = 258\,149 \cdot e^{2,6} = 3\,475\,651.$
Zum Vergleich: In Wirklichkeit gab es zu diesem Zeitpunkt 2 194 562 Infizierte in Deutschland, woran man sieht, dass das exponentielle Wachstum durch Gegenmaßnahmen, die im Spätherbst und Winter 2020 getroffen wurden, deutlich erkennbar abgedämpft wurde.

Was ist das Trügerische am exponentiellen Wachstum? Schauen wir uns folgendes Zitat an:

> „Am Anfang war die Zahl der Infizierten lange Zeit verhältnismäßig gering. Die Krankheit schien beherrschbar zu sein. Doch dies war trügerisch. Ab einem bestimmten Zeitpunkt führte das exponentielle Wachstum dazu, dass die Zahl der Erkrankten in kurzer Zeit geradezu explodierte."

Was ist damit genau gemeint? Am Graphen erkennt man zwar deutlich das exponentielle Wachstum, wenn man sich jedoch die absoluten Zahlen der Infizierten anschaut, so liegen sie am Anfang über einen längeren Zeitraum auf einem etwa gleichbleibenden Niveau, was nicht beunruhigend sein muss. Kurze Zeit später nimmt das Wachstum aber richtig „Fahrt" auf, dann sind auch die absoluten Zuwächse enorm.

Schauen wir zur Bestätigung dieses Befundes zwei Steigungen zu unterschiedlichen Erhebungszeiten an. Hierzu bilden wir die Ableitung:
$f'(t) = 258\,149 \cdot 0,13 \cdot e^{0,13 \cdot t} \approx 33\,559,4 \cdot e^{0,13 \cdot t}.$

- Die Steigung beträgt nach einem Monat (4 Wochen, d. h. zum Zeitpunkt 4):
  $f'(4) \approx 33\,559,4 \cdot e^{0,13 \cdot 4} \approx 56\,448.$
- Die Steigung beträgt nach 4 Monaten (16 Wochen, d. h. zum Zeitpunkt 16):
  $f'(16) \approx 33\,559,4 \cdot e^{0,13 \cdot 16} \approx 268\,625$, also fast das Fünffache der Steigung nach einem Monat.

Merke

- Betrachtet man ein exponentielles Wachstum, ist es von entscheidender Bedeutung, welchen Zeitraum man sich anschaut.
- Exponentielles Wachstum braucht eine gewisse Zeit, bis es sich signifikant auf die absoluten Zahlen auswirkt. Die absoluten Zahlen steigen am Anfang eher langsam an.
- Ab einem bestimmten Zeitpunkt sind enorme Zuwächse der absoluten Zahlen zu verzeichnen. Der Graph wächst sehr schnell.
- Ist k negativ, so handelt es sich um eine exponentielle Abnahme.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie jeweils die Daten in Hinblick auf die Frage, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt.

a)

x	0	1	2	3	5	10
f(x)	3	7	11	15	23	43

b)

x	0	1	3	5	10	100
f(x)	2	6	54	486	118 098	$1{,}03 \cdot 10^{48}$

c)

x	0	1	2	6	10	15
f(x)	3	1,5	0,75	0,047	0,003	$9{,}1 \cdot 10^{-5}$

2 Vervollständigen Sie jeweils die Tabelle unter der Maßgabe, dass es sich um ein exponentielles Wachstum handelt.

a)

x	0	1	2	3	5	8
f(x)	2	3		6,75		

b)

x	0	10	20	40	100	250
f(x)		12	6			

3 Berechnen Sie f(0) und f(5).

a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ **b)** $f(x) = 10 \cdot 0{,}5^x$ **c)** $f(x) = 4 \cdot e^{2x}$

4 Ermitteln Sie den Anfangsbestand sowie den Bestand nach 10 Tagen (t in Tagen).

a) $B(t) = 1{,}2 \cdot 3^t$ **b)** $B(t) = 10 \cdot e^{1{,}2t}$ **c)** $B(t) = 100 \cdot e^{-0{,}1t}$

5 Berechnen Sie die momentane Wachstumsrate am 7. Tag des Wachstumsvorgangs.

a) $B(t) = 1{,}2 \cdot 3^t$ **b)** $B(t) = 10 \cdot e^{1{,}2t}$ **c)** $B(t) = 100 \cdot e^{-0{,}1t}$

6 Für welches x ist $f(x) = 50$?

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot 5{,}5^x$ **b)** $f(x) = 2{,}7 \cdot e^{2x}$ **c)** $f(x) = 300 \cdot e^{-3x}$

Nachgefragt

- Zählen Sie typische Fragestellungen auf, die bei exponentiellen Wachstumsvorgängen auftreten können.
- Zählen Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen linearem und exponentiellem Wachstum auf.
- „Exponentielles Wachstum verläuft stets schneller als lineares Wachstum.“
  Stimmt das? Nehmen Sie Stellung.
- Beschreiben Sie, wie man aus einer Wertetabelle die Funktionsgleichung eines exponentiellen Wachstumsvorgangs ermitteln kann und woran man in einer Wertetabelle lineares Wachstum erkennt.
- Zählen Sie typische Eigenschaften eines exponentiellen Wachstumsvorgangs auf.

7 Im Folgenden ist die zahlenmäßige Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) dargestellt.

Beispiel
Wachstum berechnen

1960	1970	1980	1990	2000	2010
3,00	3,58	4,38	5,23	6,12	6,90

a) Mit welcher Weltbevölkerungszahl ist im Jahr 2030 zu rechnen?
b) Wann sind 12 Milliarden Menschen auf der Erde zu erwarten?

Lösung:

1. Schritt: Festlegen eines Funktionstyps durch Analyse der Messwerte

Da die Zahlen von Einheit zu Einheit nicht stets um denselben Betrag zunehmen, kann kein lineares Wachstum zugrunde gelegt werden. Zur Überprüfung, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt, bilden wir jeweils den Quotienten benachbarter Daten:

$\frac{3,58}{3,00} \approx 1,19; \frac{4,38}{3,58} \approx 1,22; \frac{5,23}{4,38} \approx 1,19; \frac{6,12}{5,23} \approx 1,17; \frac{6,90}{6,12} \approx 1,13.$

Die Quotienten liegen im Schnitt bei etwa 1,2 , was ein exponentielles Wachstum vermuten lässt.

2. Schritt: Bestimmen der notwendigen Parameter der Funktionsgleichung

Mit dem Ansatz $B(t) = B(0) \cdot b^t$ bestimmen wir durch Ablesen bzw. Einsetzen von Werten die Parameter B (0), d. h. den Anfangsbestand, und b, d. h. den Wachstumsfaktor. b haben wir oben mit 1,2 ermittelt. Als B (0) nehmen wir die Bevölkerungszahl zu Beginn des Messzeitraums, also 3,00. Wir erhalten: $B(t) = 3,00 \cdot 1,2^t$.
Damit können wir die Teilaufgaben a) und b) bearbeiten.

a) *Gesucht ist die Bevölkerungszahl im Jahr 2030, d. h. B (7), da wir in Schritten von 10 Jahren rechnen: $B(7) = 3,00 \cdot 1,2^7 \approx 10,75$. Für das Jahr 2030 muss mit einer Weltbevölkerung von etwa 10,75 Milliarden Menschen gerechnet werden.*

b) *Mit dem Ansatz $12 = 3,00 \cdot 1,2^t$ bestimmen wir t.*
$1,2^t = 4 \Rightarrow t = \frac{\ln(4)}{\ln(1,2)} \approx 7,6.$ *Da in Schritten von 10 Jahren gerechnet wird, entspricht dies 76 Jahren. Im Jahr 2036 sind demnach 12 Milliarden Menschen zu erwarten.*

8 Für das Wachstum von Kresse wurden folgende Daten ermittelt:

Zeit (Tage)	0	1	2	3	4	7
Höhe (cm)	0,2	0,3	0,48	0,8	1,2	4,2

a) Mit welcher Wuchshöhe ist nach zwei Wochen zu rechnen?
b) Wann erreicht die Kresse eine Höhe von 10 cm?
c) Bestimmen Sie die mittlere Wachstumsrate in der ersten Woche.
d) Wann ist die momentane Wachstumsrate größer als 6 cm/ Tag?

9 Man schätzt, dass sich der Bestand einer Nutria-Population in einem Jahr verdoppelt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wurden in Niedersachsen im Jahr 2016/17 landesweit etwa 22 000 Nutrias gezählt.

a) Finden Sie ein exponentielles Modell $B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$ für die Bestandsentwicklung.
b) Wie viele Nutrias sind nach fünf, nach zehn, nach zwanzig Jahren zu erwarten?
c) Wie lange wird es nach diesem Modell dauern, bis die Population in Niedersachsen eine Million Nutrias zählt? Für wie realistisch halten Sie diese Hochrechnung?

10 In einem Labor wird 30 Wochen lang das Wachstum von Liebstöckelsetzlingen untersucht. Die Tabelle zeigt die (mittlere) Höhe der Pflanzen in Abhängigkeit von der Zeit.

x (in Wochen)	0	5	10	12	15	20	25	30
Höhe h (in cm)	3,0	20,0						

Die (mittlere) Höhe der Pflanzen (in cm) wird durch folgende Funktion h beschrieben:
$h(x) = \frac{180}{1 + ke^{-ax}}$; $D_h = [0; 30]$. x bedeutet die Beobachtungszeit (in Wochen).

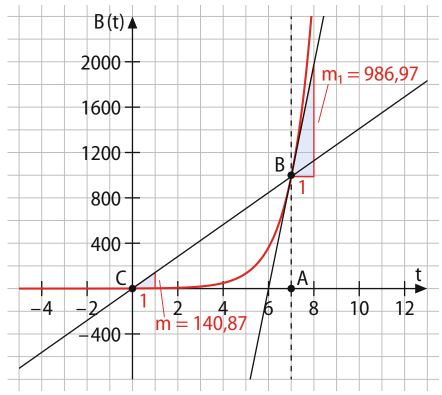
a) Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und a.

b) Ergänzen Sie die Tabelle.

c) Beschreiben Sie anschaulich, was $h'(x) = 0$ bedeutet.

Beispiel
Wachstumsraten berechnen

11 Das Wachstum einer Bakterienkultur kann durch die Funktionsgleichung $B(t) = 0{,}9 \cdot e^t$ modelliert werden (t in Tagen).
Wie groß ist die mittlere Wachstumsrate in der ersten Woche, wie groß die momentane Wachstumsrate am 7. Tag? Veranschaulichen Sie beide Wachstumsraten graphisch.



Lösung:

Für die mittlere Änderungsrate m ziehen wir den Differenzenquotienten für $t_1 = 0$ und $t_2 = 7$ heran:

$$m = \frac{B(7) - B(0)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}9 \cdot e^7 - 0{,}9 \cdot e^0}{7 - 0} = \frac{0{,}9 \cdot e^7 - 0{,}9}{7} \approx 140{,}87.$$

Für die momentane Änderungsrate am 7. Tag ziehen wir die Ableitung heran:
$B'(t) = 0{,}9 \cdot e^t \implies B'(7) = 0{,}9 \cdot e^7 \approx 986{,}97$

12 Wie groß ist bei dem jeweiligen Wachstum die mittlere Wachstumsrate in den ersten zehn Tagen, wie groß die momentane Wachstumsrate nach zwei Wochen? Veranschaulichen Sie die beiden Wachstumsraten graphisch.

a) $B(t) = 12 + 50 \cdot e^{-0{,}1t}$ **b)** $B(t) = 1{,}2 \cdot e^{1{,}2t}$ **c)** $B(t) = 1{,}2 \cdot e^{0{,}2t}$

13 Die Höhe (in m) einer Sonnenblume x Wochen nach dem Pflanzen wird durch die Funktion f: $f(x) = 0{,}015 \cdot 3^{kx}$ beschrieben. Geben Sie an, wie hoch die Pflanze zu Beginn der Beobachtung war. Innerhalb von 5 Wochen ist die Pflanze dann um 22 cm gewachsen. Finden Sie heraus, wie hoch sie nach weiteren drei Wochen sein müsste. Tatsächlich wird sie bis dahin aber nur 1,08 m hoch. Deshalb soll ihre Wuchshöhe für $x \geq 5$ durch den Term $g(x) = a + b \cdot 3^{0{,}5x}$ modelliert werden. Berechnen Sie die Werte der Parameter a und b aus den Messwerten nach 5 und nach 8 Wochen.

14 Dagobert consigns the amount of 100 000 € in a bank. The bank pays $\frac{6}{360}$% interest per day on his savings.

a) Find the amount of interest Dagobert receives on his savings within one year.

b) Find out after how many years Dagobert's original amount of money will have doubled by the daily interest return.

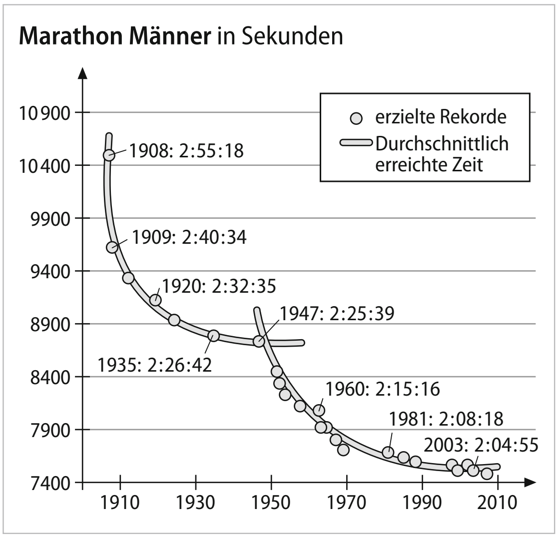
15 Die mit der Zeit t (in Jahren) zunehmende Durchmesserlänge d (in Metern) einer Fichte wird durch den Funktionsterm $d(t) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}05\,(t-60)}}$ beschrieben. Finden Sie heraus, wann die Fichte 90 % ihrer maximalen Durchmesserlänge erreicht.

16 Die Individuenanzahl (in Tausend) einer Bakterienpopulation wird in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) durch die Funktion f: $f(t) = 10 + t^2 \cdot e^{4-t}$; $D_f = [0;\ 10]$, beschrieben.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t)	10										

a) Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie dann dort.
b) Finden Sie heraus, zu welchem Zeitpunkt der Bestand am größten ist.
c) Geben Sie an, in welchem Zeitintervall die Population wächst und in welchem Zeitintervall sie abnimmt, und ermitteln Sie die Zeitpunkte, zu denen die Zunahme bzw. die Abnahme der Population am stärksten ist.

17 **a)** Die Entwicklung der Weltbestzeiten im Marathonlauf entspricht in den vergangenen hundert Jahren zwei exponentiellen Zerfallskurven. Da sich das genetische Potential der Menschheit in dieser Zeit nicht verändert hat, schließen die Forscher auf äußere Faktoren, die zu den Leistungsschüben geführt haben. Diskutieren Sie die beiden Diagrammteile und modellieren Sie ihre Verläufe, indem Sie auf Basis gegebener Daten die Funktionsgleichungen aufstellen.



b) Recherchieren Sie die aktuelle Weltrekordzeit und überprüfen Sie, ob Sie zu der vorgenommenen Modellierung passt.
c) Bei welcher Zeit würde der Weltrekord nach Ihrem Modell im Jahr 2030 liegen? Halten Sie den ermittelten Wert für realistisch? Argumentieren Sie.

Nachgefragt

- Beschreiben Sie typische Realsituationen, die mit einer Exponentialfunktion modelliert werden können.
- Erklären Sie anhand eines Realbeispiels und des zugehörigen Graphen, warum es bei exponentiellem Wachstum von entscheidender Bedeutung ist, welchen Zeitraum im Wachstumsvorgang man sich anschaut.
- Beschreiben Sie, wie man in der Funktionsgleichung $B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$ den Parameter k sowie B (0) ermitteln kann.

2 Klausurvorbereitung

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

Warm up

A Leiten Sie ab.

a) $f(x) = -3\,(e^{-3x})^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{x + e^x}$ **c)** $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^x$

B Bestimmen Sie die Extremstellen der Funktionen.

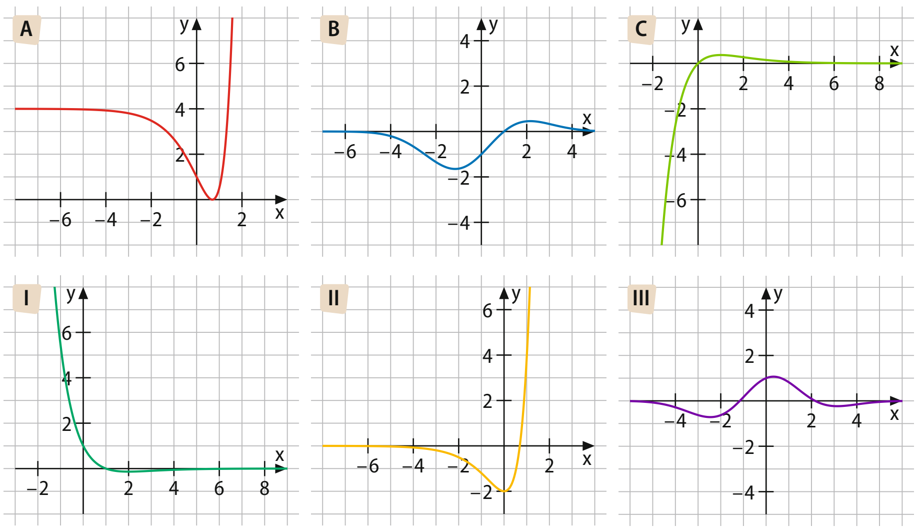
a) $f(x) = -3\,(x^2 - 2)^3$ **b)** $f(x) = \sin(x) \cdot x^2;\ [-\pi;\ \pi]$

C Lösen Sie folgende Gleichungen.

a) $(x+2)^2 \cdot e^{-x} = 0$ **b)** $e^x - 4 = 0$ **c)** $x - 1 = \sqrt{x-1}$

1 **a)** Ordnen Sie begründet jedem Funktionsterm (1, 2, 3) den passenden Graphen (A, B, C) und den Graphen der passenden Ableitung (I, II, III) zu. Überprüfen Sie Ihre Entscheidungen rechnerisch.

1 $f_1(x) = (x-1) \cdot e^{-0{,}2x^2}$ **2** $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$ **3** $f_3(x) = (e^x - 2)^2$



b) Bestimmen Sie die Stellen, an denen der Graph von f_1 eine Tangente parallel zur x-Achse hat, sowie die Stellen, an denen seine Tangente parallel zur Geraden $y = 4x + 1$ verläuft.

c) Beschreiben Sie, wie Sie die Stellen bestimmen würden, an denen der Graph von f_1 den Funktionswert -1 hat.

d) Beschreiben Sie die Vorgehensweise, wie man die Funktionen f_1, f_2 und f_3 graphisch ableiten kann.

e) Erläutern Sie, welche Realsituation die Funktion $f_2(x)$ beschreiben könnte.

f) Der Funktionsterm von $f_2(x)$ wird abgeändert in $f_4(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Was bedeutet dies für den zugehörigen Graphen? Beschreiben Sie dessen Aussehen anhand charakteristischer Eigenschaften und unter Verwendung der entsprechenden Fachsprache.

Aufgabe 2

Warm up

A Vereinfachen Sie die Terme mithilfe der Potenzgesetze.

a) $5^{-2} : 5^{-4}$ **b)** $6^{-3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4}$ **c)** $\frac{6^3 \cdot 14^5}{12^4 \cdot 7^4}$

d) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a^5}$; $a > 0$ **e)** $\frac{a^{-5} b^2}{c^{-2} a^3} : \frac{c^4 b^3}{b a^8}$; $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

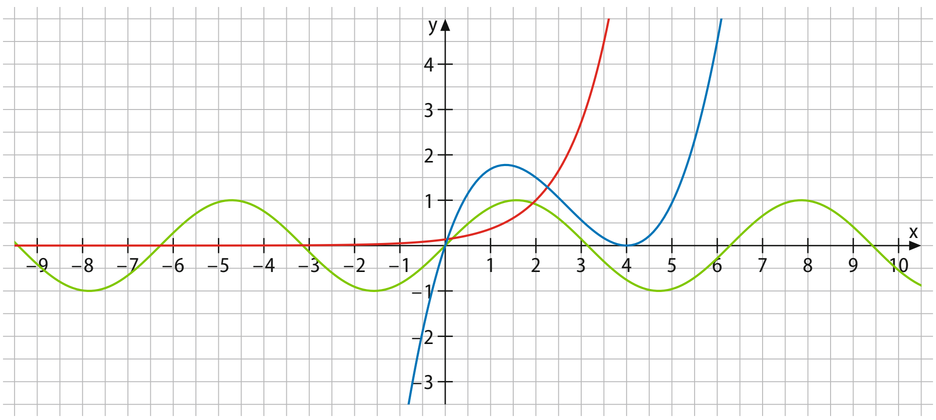
B Welche Auswirkungen haben die Parameter- und Termveränderungen auf den Graphen der Funktion?

a) $f_1(x) = 2(x-3)^2 + 4$ im Vergleich zu $f(x) = x^2$
b) $g_1(x) = -x^{-5}$ im Vergleich zu $g(x) = x^5$
c) $h_1(x) = -(x-2)^2 \cdot (x+1)$ im Vergleich zu $h(x) = x^3$
d) $k_1(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x + \pi) - 1$ im Vergleich zu $k(x) = \sin(x)$

C Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$ **b)** $f(x) = x^{-3}$ **c)** $f(x) = e^{-x}$

2 Die Abbildung zeigt Ausschnitte aus den Graphen einer ganzrationalen Funktion f, einer trigonometrischen Funktion g und einer Exponentialfunktion h.



a) Ordnen Sie die Funktionen f, g und h den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Geben Sie für den Graphen der Exponentialfunktion einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.

c) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der Exponentialfunktion unter Verwendung der Fachsprache.

d) Eine Exponentialfunktion k mit k(x) hat den Funktionsterm $k(x) = (x-2)^2 \cdot e^x$. Untersuchen Sie die Funktion auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$ sowie für $x \to 0$ und skizzieren Sie anschließend den zugehörigen Graphen.

e) Untersuchen Sie die Funktion k(x) auf Extrema.

f) Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen würden, um die Schnittpunkte des Graphen von k mit der Geraden $y = 0{,}5x + 3$ zu bestimmen.

Aufgabe 3

Warm up

A Lösen Sie die Gleichungen.

a) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0$ **b)** $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10$ **c)** $7^{x-3} - 49^x = 0$

B Untersuchen Sie die Funktionen auf Null- und auf Extremstellen im Intervall $[-8;\ 8]$.

a) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$ **b)** $f(x) = x^3 \cdot (x-2)^2$ **c)** $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

3 Sebastian Vettel testet seinen Rennwagen. Seine Geschwindigkeit kann durch die Funktion f mit $f(t) = 100 + 160e^{-30t}$ beschrieben werden ($f(t)$ in km/h, $0 \le t \le 0{,}05$, t in h).

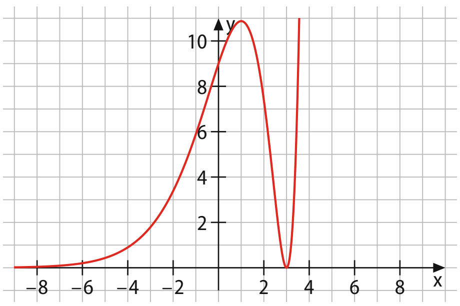
a) Berechnen Sie $f(0)$ und $f'(0)$ und interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang.

b) Skizzieren Sie den Graphen von $f(t)$ im Intervall $[0;\ 0{,}05]$ mit geeigneter Skalierung.

c) Wie könnte die zum Geschwindigkeitsverlauf passende Rennstrecke aussehen? Beschreiben Sie. Wie könnte danach der weitere Streckenverlauf aussehen und welche Auswirkungen hätte dies auf den Graphen?

d) Nun legen wir die Funktion $g(x) = (3-x)^2 \cdot e^x$ zugrunde, die den abgebildeten Graphen hat. Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen des Graphen und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Extremstellen des Graphen.



Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?

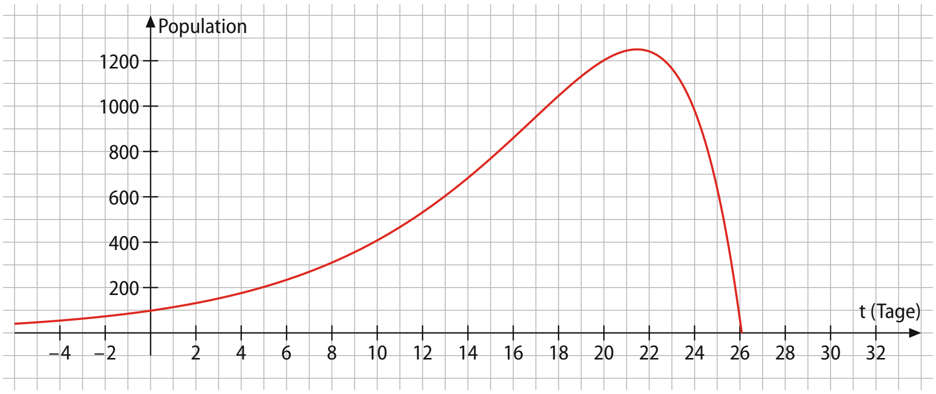
- Den Einfluss von Parametern bei der Funktion $f(x) = a \cdot b^x + d$ beschreiben und bei Zuordnungsaufgaben Graph – Term anwenden
- Aufstellen eines Terms zu einer gegebenen Sachsituation, Sachsituationen modellieren
- Graphen im Sachzusammenhang interpretieren und umgekehrt
- Ableitungen im Sachzusammenhang interpretieren und Ableitungen berechnen
- Signifikante Punkte eines Graphen (Nullstellen, Extremstellen) berechnen und diese jeweils in Beziehung zur Sachsituation setzen
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als Ableitungsgraphen identifizieren
- Exponentialgleichungen lösen und im Sachzusammenhang interpretieren

Typische Aufgabenteile für das Warm up:

- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen sowie von Bruch-, Wurzel- und Potenzgleichungen
- Extrema von Funktionen bestimmen
- Aussagen treffen über den Einfluss von Parametervariationen auf Funktionsgraphen
- Anwenden der Potenzgesetze und Berechnen bzw. Abschätzen von Logarithmen
- Vereinfachen von Ausdrücken, die die Euler'sche Zahl e enthalten

Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer Abiturprüfung gestellt werden können.

1 In der Landwirtschaft werden zur Schädlingsbekämpfung häufig Pestizide eingesetzt. Die Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung des Bestands einer Schädlingspopulation, die man mit Pestiziden einzudämmen versuchte.



a) Beschreiben Sie den Graphen. Gehen Sie darauf ein, was er über die zugrunde liegende Realsituation aussagt. Wann wurde ungefähr mit dem Einsatz des Schädlingsbekämpfungsmittels begonnen?

b) Bestimmen Sie anhand der Abbildung $f'(6)$. Was besagt dieser Wert im Sachzusammenhang?

c) Begründen Sie, dass von den angegebenen Termen $f_3(t)$ die Realsituation am besten beschreibt:
$f_1(t) = t^2 \cdot (0{,}2t - 4)^2 + 100$ $\quad$ $f_2(t) = 100 \cdot e^{0{,}1t}$ $\quad$ $f_3(t) = 100 \cdot e^{0{,}15t} - 2e^{0{,}3t}$.
Skizzieren Sie die zu den beiden anderen Funktionstermen gehörenden Graphen in einem Koordinatensystem wie dem oben abgebildeten.

d) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f_3 an und begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Schädlingsbestand ein Maximum erreichte. Welche maximale Population wurde erreicht?

f) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Population ungefähr 550 Schädlinge betrug. Zeichnen Sie den zugehörigen Punkt in die Abbildung ein. Welche Bedeutung hat dieser Punkt?

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem kein Schädling mehr vorhanden war. Verwenden Sie dafür die Darstellung $f_3(t) = 100 \cdot e^{0{,}15t} - 2e^{0{,}3t} = 2e^{0{,}3t}(50e^{-0{,}15t} - 1)$ für f_3.
Erklären Sie, warum diese Darstellung hilfreich ist und welchen Satz Sie damit (eventuell) benutzen können.

h) Welchen Vorteil hat es, das vorliegende Wachstum mittels einer e-Funktion zu beschreiben?

i) Reflektieren Sie kritisch über den Einsatz von Schädlingsbekämpfungsmitteln in der Umwelt.

2 Landflucht ist ein globales Phänomen unserer Zeit. Derzeit leben in Deutschland 77 Prozent der Menschen in Städten oder Ballungsgebieten und nur 15 Prozent in Dörfern mit weniger als 5000 Einwohnern. So wächst auch München mit derzeit rund 1 500 000 Einwohnern jährlich um 0,75 %.

a) Skizzieren Sie den Graphen der diesem Bevölkerungswachstum zugrunde liegenden Funktion.

b) Erklären Sie, weshalb es sich um kein lineares Wachstum handeln kann. Wie müsste die Bevölkerung wachsen, wenn ihr ein lineares Wachstum zugrunde liegen würde?

c) Geben Sie einen Funktionsterm f (x) an, der das Bevölkerungswachstum beschreibt.

d) Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitung an einer bestimmten Stelle für die zugrunde liegende Realsituation.

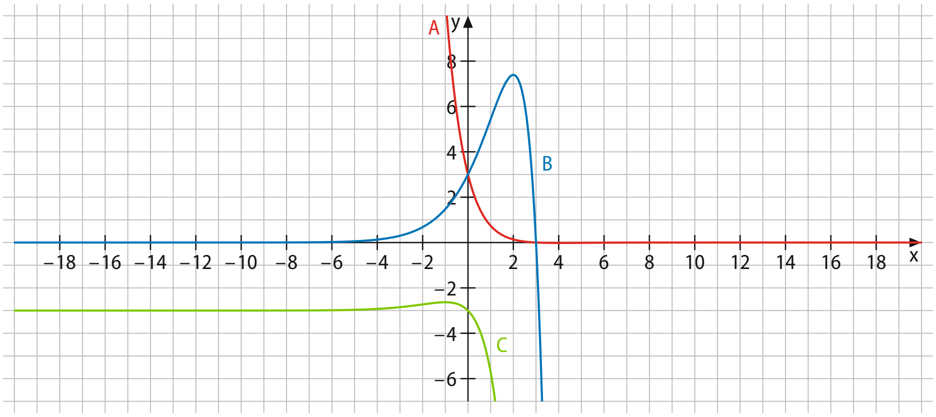
e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f.

f) Von „Megacities" spricht man ab einer Bevölkerungszahl von 10 000 000 Einwohnern. Wann wäre München nach dem zugrunde liegenden Modell eine Megacity?

g) Diskutieren Sie die Grenzen des vorgegebenen Wachstumsmodells.

3 Gegeben sind drei Funktionen und ihre Graphen:

$f_1(x) = -(x-3) \cdot e^{-x}$ $\quad$ $f_2(x) = -(x-3) \cdot e^{x}$ $\quad$ $f_3(x) = -x \cdot e^{x} - 3$



a) Entscheiden Sie begründet, welcher der Funktionsterme zu welchem der abgebildeten Graphen passt. Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb der Graph B zu $f_2(x)$ gehört.

b) Erläutern Sie, wie man auf Basis des Funktionsterms $f_2(x) = -(x-3) \cdot e^{x}$ durch Betrachten großer und kleiner Werte für x den Kurvenverlauf erschließen kann. Gehen Sie dabei auch auf den Verlauf des Graphen zwischen $-1 < x < 2$ ein.

c) Berechnen Sie den Hochpunkt von $f_2(x)$ sowie seine Nullstelle und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

d) Beschreiben Sie die Bedeutung der x-Achse für den Graphen von $f_2(x)$.

e) Ermitteln Sie die Steigung des Graphen von $f_2(x)$ zeichnerisch und rechnerisch.

f) Ermitteln Sie zeichnerisch die Stelle, an der der Graph von $f_2(x)$ die Gerade $y = -3x + 3$ schneidet. Erläutern Sie, warum die rechnerische Bestimmung dieser Stelle schwierig ist.

g) Finden Sie eine Realsituation, die vom Graphen von $f_2(x)$ beschrieben wird. Gehen Sie dabei auch auf die wesentlichen Abschnitte und Eigenschaften des Graphen ein.

h) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage:
„Wachstum kann stets gut durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden."

Reflexion

Arbeitsaufträge und Fragen zur Vorbereitung auf das Abitur	Hilfe
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion unter Verwendung mathematischer Fachbegriffe.	S. 68
Erläutern Sie am Beispiel der Exponentialfunktion, was man unter einer Asymptote versteht.	S. 60/1
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen Exponentialfunktionen eine Rolle spielen.	S. 63/4, 80
Beschreiben Sie an einem Beispiel, was man unter einer verketteten Exponentialfunktion versteht und wofür Sie die Kettenregel gebrauchen können.	S. 70/4
Führen Sie ein Beispiel für eine zusammengesetzte Exponentialfunktion an, die man mit der Produktregel ableiten kann.	S. 70/4
Beschreiben Sie (möglichst mehrere) Verfahren, mit denen Sie Exponentialgleichungen lösen können.	S. 60/2, 74
Erläutern Sie am konkreten Beispiel, was man unter dem „ln“ versteht.	S. 65, 74
Warum ist der natürliche Logarithmus ln nur für positive Zahlen definiert?	S. 65
Was versteht man unter der Euler'schen Zahl e? Wie kann man sie berechnen, welche Eigenschaften besitzt sie? Gehen Sie dabei auch auf die Zahl e als Grenzwert ein.	S. 65
Zu welchem Zahlbereich gehört die Zahl e? Welche andere bekannte Zahl weist ähnliche Eigenschaften auf? Kontextualisieren Sie Ihre Antwort, indem Sie allgemein auf Zahlbereiche und ihre Eigenschaften eingehen.	S. 65
Grenzen Sie am konkreten Beispiel die Operationen Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren gegeneinander ab.	S. 75
Erläutern Sie folgenden Satz: „Wurzelfunktionen verhalten sich zu quadratischen Funktionen wie die Logarithmus- zur Exponentialfunktion.“	S. 75
Erläutern Sie (möglichst an einem Beispiel), weshalb man die Exponentialfunktion einem Wachstum nur für einen bestimmten Zeitraum zugrunde legen kann.	S. 81
Beschreiben Sie, welche Veränderungen Parametervariationen am Graphen der Exponentialfunktion bewirken. Gehen Sie dabei auf die Parameter a, b und d in $f(x) = a \cdot b^x + d$ ein.	S. 68, 69
Diskutieren Sie das Steigungsverhalten von Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen im Vergleich.	S. 73/ Nachgefragt
Warum ist die Ableitung von $f(x) = e^{-x}$ nicht $f'(x) = e^{-x}$? Begründen Sie graphisch-geometrisch, indem Sie den Graphen von $f(x) = e^{-x}$ zeichnen.	S. 68, 69
Finden Sie (möglichst mehrere) Begründungen, weshalb die Ableitung von $f(x) = e^x$ nicht $f'(x) = x \cdot e^{x-1}$ ist.	S. 65
Wie können Sie auf Basis einer Wertetabelle entscheiden, ob ein exponentielles Wachstum vorliegt? Erklären Sie, wie Sie dann den Anfangsbestand und den Wachstumsfaktor bestimmen.	S. 80

2 Alles im Blick

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …
… dass man mit der natürlichen Exponentialfunktion viele Wachstumsvorgänge in Natur und Umwelt beschreiben kann und dass diese Modellierung auf der mathematischen Seite deshalb sinnvoll ist, weil die natürliche Exponentialfunktion mit ihrer Ableitung übereinstimmt.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 2.1

Die Euler'sche Zahl und die natürliche Exponentialfunktion

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die besondere Bedeutung der Basis e bei Exponentialfunktionen zu beschreiben und erläutern. … die Euler'sche Zahl e näherungsweise zu bestimmen. … die Ableitungsfunktion der Funktion f mit $f(x) = e^x$ anzugeben und einen Weg zu beschreiben, wie man diese ermitteln kann. … die Kettenregel zum Ableiten von Funktionstermen verwenden, bei denen die äußere Funktion eine Exponentialfunktion ist.	Wir haben bei einem Wachstumsvorgang anhand der Zuwachsraten erkannt, dass es sich um ein **exponentielles Wachstum** handelt, da sich der neue Bestand aus dem alten berechnet, indem man mit stets derselben Zahl multipliziert. Wir haben den Graphen der Ableitung der allgemeinen **Exponentialfunktion** $\mathbf{f(x) = b^x}$ ermittelt und festgestellt, dass es sich wieder um eine Exponentialfunktion handelt, dass also gilt: $\mathbf{f'(x) = k \cdot b^x}$. Wir haben k für ein konkretes b mithilfe des Differenzenquotienten bestimmt und uns gefragt, ob es ein b gibt, sodass gilt: $f(x) = f'(x)$. Durch Ausprobieren und Einschachteln haben wir die **Euler'sche Zahl** $\mathbf{e = 2{,}71828\ldots}$ gefunden, für die gilt: $\mathbf{f(x) = e^x = f'(x)}$. Wir haben dies genutzt, um den Vorfaktor k in der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion rechnerisch zu ermitteln. So erhielten wir für f mit $f(x) = b^x$: $\mathbf{f'(x) = \ln(b) \cdot b^x}$.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… die Ableitungen von (natürlichen) Exponentialfunktionen, auch von zusammengesetzten, zu berechnen.	S. 66/4, 70/4	S. 65
… die Ableitungen der (natürlichen) Exponentialfunktionen zu nutzen, um Eigenschaften des Graphen zu ermitteln: Extremstellen, Monotonie.	S. 70/6	S. 68, 69
… Termen von Exponentialfunktionen die zugehörigen Graphen und diesen wiederum die zugehörigen Ableitungsgraphen zuzuordnen.	S. 71/10, 73/19	S. 68, 69

Kap. 2.2

Die Graphen von Exponentialfunktionen und die Wirkung von Parametern

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… charakteristische Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ zu beschreiben und den Graphen unter Verwendung charakteristischer Eigenschaften (z. B. waagerechte Tangente, Strebeverhalten) zu skizzieren. … den Einfluss von Veränderungen am Funktionsterm der Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x + d$ auf den Graphen zu beschreiben (Verschiebung, Streckung, Spiegelung) und aus gegebenen Graphen Aussagen über die Parameter abzuleiten.	Ausgangspunkt waren die Eigenschaften des Graphen der allgemeinen Exponentialfunktion f mit $f(x) = b^x$, $b > 0$. Für den Fall $0 < b < 1$ gilt: x-Achse als Asymptote für $x \to +\infty$, $f(0) = 1$, streng monoton fallend. Für den Fall $b > 1$ gilt: x-Achse als Asymptote für $x \to -\infty$, $f(0) = 1$, streng monoton wachsend. Darauf aufbauend haben wir den Graphen von deren Ableitungsfunktion betrachtet: Sowohl für $0 < b < 1$ als auch für $b > 1$ ist der Graph von f' streng monoton steigend; für $0 < b < 1$ oberhalb der x-Achse, die für beide Fälle die Asymptote ist (einmal für $x \to +\infty$, einmal für $x \to -\infty$. Für die Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x + d$ haben wir für den Fall $b > 1$ für die Parameter a und d Folgendes herausgefunden: a bestimmt das Steigen $(a > 0)$ bzw. Fallen $(a < 0)$ des Graphen von f. d bewirkt eine Verschiebung nach oben oder nach unten, wodurch auch die Asymptote verschoben wird.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… die Auswirkung von Parameterveränderungen auf den Graphen zu beschreiben und umgekehrt.	11, 17	S. 68, 69
… Termen von Exponentialfunktionen mit Parametern die zugehörigen Graphen und diesen wiederum die zugehörigen Ableitungsgraphen zuzuordnen.	17, 19	S. 68, 69

Kap. 2.3

Exponentialgleichungen und natürlicher Logarithmus

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… den (natürlichen) Logarithmus einer Zahl als Lösung einer Exponentialgleichung zu verwenden. … Exponentialgleichungen graphisch zu lösen. … Anwendungskontexte anzugeben und zu erkennen, die auf das Lösen einer Exponentialgleichung hinauslaufen.	Ausgangspunkt unserer Überlegungen waren Fragen wie „Wann hat eine Population eine bestimmte Größe erreicht?“, „Wann ist die Hälfte eines radioaktiven Stoffes zerfallen?“ – Fragen also, die auf **Exponentialgleichungen** hinauslaufen. In ihnen wird – graphisch interpretiert – bei einer Exponentialfunktion die x-Koordinate zu einer bestimmten y-Koordinate gesucht. Lösen kann man solche Exponentialgleichungen … ▪ durch Ausprobieren (systematisches Einsetzen von Zahlen) ▪ graphisch durch Schnittstellenbestimmung ▪ rechnerisch durch den **natürlichen Logarithmus ln**: Es gilt: $e^x = c \Leftrightarrow \log_e(c) = x$

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… algebraische Ausdrücke mit ln und e zu vereinfachen.	1 – 3	S. 74, 75
… Exponentialgleichungen rechnerisch und graphisch zu lösen, einmal mit dem Logarithmus, zum anderen über Umformungen mithilfe der Potenzgesetze.	5 – 8	S. 74, 75

Kap. 2.4

Exponentialfunktion und Logarithmus in Anwendungen

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… Kenntnisse um die Exponentialfunktion zur Modellierung außermathematischer Sachverhalte und zur Funktionsbestimmung zu verwenden.	Ausgehend von den Daten eines Epidemieverlaufs haben wir uns das zugrunde liegende Wachstum angeschaut. Wir haben den Wachstumsfaktor aus den Daten bestimmt, indem wir die Quotienten benachbarter Zahlen berechnet und deren Mittelwert gebildet haben. Über die Beziehung $b^x = (e^{\ln(b)})^x = e^{x \cdot \ln(b)}$ haben wir die Funktion in eine natürliche Exponentialfunktion umgewandelt. So kann man leicht die Wachstumsraten der Funktion bestimmen.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Daten zu vervollständigen, die sich aus der Funktionsgleichung des zugrunde liegenden exponentiellen Wachstums ergeben und aus Daten die Funktionsgleichung des exponentiellen Wachstums zu ermitteln.	1, 2	S. 80, 81
… Daten dahingehend zu untersuchen, ob ihnen ein exponentielles Wachstum zugrunde liegt.	1, 2	S. 80, 81
… die Parameter B (0) und k von der dem Wachstum zugrunde liegenden Exponentialfunktion $B(t) = B(0) \cdot e^{k \cdot t}$ zu bestimmen.	7 – 9	S. 80, 81
…. Fragen (mathematisch) zu beantworten, die für das einer Realsituation zugrunde liegende exponentielle Wachstum relevant sind.	10 – 14	S. 80, 81

Wie Archäologen Exponentialfunktionen zur Altersbestimmung nutzen – und wie der Klimawandel dies bald verhindern könnte

Wurde im „Turiner Grabtuch" tatsächlich der Leichnam Jesu eingewickelt? Die wissenschaftliche Antwort auf diese viel diskutierte Frage ist eindeutig: Eine 1988 durchgeführte C14-Datierung ergab, dass das Leinengewebe aus dem 14. Jahrhundert stammt.

Doch was verbirgt sich hinter der **Altersbestimmung per C14-Datierung**?

Radioaktivität

Radioaktive Substanzen haben instabile Atomkerne, die sich spontan unter Aussendung von Teilchen und Abgabe von Energie in einen anderen Kern umwandeln.
Das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C14 entsteht in der oberen Atmosphäre der Erde, wenn dort Neutronen der kosmischen Strahlung mit Stickstoff reagieren. Der Stickstoff verliert dabei ein Proton, und es entsteht das Isotop C14. Neben C14 gibt es auf der Erde die stabilen Kohlenstoff-Isotope C12 und C13.

Die Konzentration des radioaktiven Kohlenstoffs C14 in der Atmosphäre ist äußerst gering, sein Verhältnis zu den beiden stabilen Kohlenstoff-Isotopen beträgt ungefähr eins zu einer Billion.
Trotz seines geringen Vorkommens ist C14 in der Natur nachweisbar. In Form von CO_2 nutzen es Pflanzen für die Photosynthese, Tiere und Menschen nehmen es mit der Nahrung auf. Durch den Kohlenstoffkreislauf kann die C14-Konzentration bis etwa 60 000 v. Chr. zurückreichend als stabil angesehen werden.
Die Altersbestimmung mithilfe der **Radiocarbonmethode** nutzt Folgendes aus: Wenn ein Organismus stirbt, kann er kein neues C14 mehr aufnehmen. Da C14 radioaktiv zerfällt, reduziert sich die Zahl seiner Atome im Organismus. Gelingt es z. B., die in Knochen verbliebene Menge C14 zu bestimmen, lässt sich über die Halbwertszeit des C14-Isotops berechnen, wann ein Organismus gestorben ist.

Radioaktivität, Altersbestimmung und exponentielles Wachstum

Der radioaktive Zerfall ist ein exponentieller Prozess, dessen Zerfallsgesetz lautet:
$\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}}$, wobei N_0 die Ausgangsmenge ist, $N(t)$ die Menge der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t und k eine **stoffspezifische Zerfallskonstante** mit $k > 0$.

Für C14 ist $k = 0{,}00012$.

Merke

Verläuft ein radioaktiver Zerfallsprozess exponentiell nach dem Gesetz $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}}$, dann gilt für die **Halbwertszeit** $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$.

Halbwertszeit

C14 hat wie alle radioaktiven Stoffe eine **Halbwertszeit**; das ist die Zeit, nach der von einer bestimmten Menge nur noch die Hälfte vorhanden ist (unabhängig von der Ausgangsmenge). Für C14 beträgt die Halbwertszeit etwa 5730 Jahre.

Wie kann man die **Zerfallskonstante** von C14 aus der Halbwertszeit bestimmen?
C14 hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren, d. h. nach dieser Zeitspanne $t = 5730$ ist von der Ausgangsmenge N_0 noch $N(t) = \frac{1}{2}N_0$ vorhanden. Aus dem Ansatz $\mathbf{N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}}$ ergibt sich:

$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{-5730k}$ $\qquad \frac{1}{2} = e^{-5730k}$

Logarithmieren liefert: $-5730k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$. Daraus folgt: $k = 0{,}00012$.

1 Am 19. September 1991 machten Wanderer am Tisenjoch in den Ötztaler Alpen eine sensationelle Entdeckung: Sie fanden eine mumifizierte Leiche, die die Gletscherschmelze gerade erst freigelegt hatte. Nach dem Fundort wurde die Leiche „Ötzi" genannt. In der Kleidung Ötzis fanden sich Gräser und Halme, die noch etwa 53 % der ursprünglichen C14-Menge aufwiesen. Erschließen Sie sich daraus, wann Ötzi ungefähr gelebt hat.

2 Das radioaktive Plutonium-Isotop Pu240 hat die Halbwertszeit $t_{½} = 6600$ Jahre.
- **a)** Berechnen Sie die Zerfallskonstante.
- **b)** Zeichnen Sie das Schaubild der Zerfallsfunktion für $N_0 = 100$ g. Wählen Sie eine geeignete Skalierung der x-Achse.
- **c)** Berechnen Sie, wann nur noch 1 %, d. h. 1 g, der Ausgangsmenge vorhanden ist.
- **d)** Die Zerfallsgeschwindigkeit wird durch die Ableitung $N'(t)$ angegeben. Wie groß ist sie nach 100 (1000) Jahren?

3 Das radioaktive Strontium-Isotop Sr90, das bei nuklearen Katastrophen wie der von Tschernobyl in größeren Mengen freigesetzt wird, hat die Zerfallskonstante $k = 0{,}024$.
- **a)** Geben Sie die Zerfallsfunktion an.
- **b)** Wann hat sich ein Anfangsbestand von 10 g (1 kg) halbiert?

Sr90 ähnelt in seiner chemischen Zusammensetzung dem Calcium. Der Körper lagert es deshalb in den Knochen ein. Dies erhöht die Gefahr, Tumore oder eine Leukämieerkrankung zu entwickeln.

Klimawandel und die Radiocarbonmethode

Noch ist die Radiocarbonmethode zuverlässig. Infolge der stark zunehmenden CO_2-Konzentration in der Atmosphäre könnte das aber bald Geschichte sein.
Das Problem besteht darin, dass in dem aus fossilen Brennstoffen wie Kohle, Öl und Erdgas freigesetzten CO_2 kein C14 enthalten ist. Dadurch sinkt der C14-Gehalt im Kohlenstoffkreislauf. Modellstudien zeigen, dass bei einem unveränderten CO_2-Ausstoß spätestens in 50 Jahren der C14-Wert in der Atmosphäre identisch sein wird mit Werten aus dem Mittelalter – und das würde eine exakte Datierung zukünftig unmöglich machen.

BNE – Bildung für nachhaltige Entwicklung

Nachgefragt

- Skizzieren Sie eine Argumentation, wie man begründen könnte, dass die Halbwertszeit umgekehrt proportional zur Zerfallskonstanten ist.
- Skizzieren Sie einen Weg, wie man die Halbwertszeit aus dem Zerfallsgesetz ermitteln kann. Erläutern Sie in diesem Kontext auch, warum die Halbwertszeit von der Ausgangsmenge der radioaktiven Substanz unabhängig ist.
- Erläutern Sie, woran man am Zerfallsgesetz erkennen kann, dass es eine exponentielle Abnahme beschreibt.
- Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Eine radioaktive Substanz ist am Anfang am gefährlichsten, die Bedrohung, die von ihr ausgeht, verschwindet aber nie ganz."

Operator 1

1.1 Die Aussage ist richtig. Dies lässt sich z. B. mithilfe der Definition der Ableitung zeigen. Die Ableitung einer Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x)$ an einer Stelle x_0 ist

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Die Ableitung des Negativen der Funktion f an der Stelle x_0 ist

$$(-f)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x_0+h) - (-f(x_0))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(x_0+h) + f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(f(x_0+h) - f(x_0))}{h}$$
$$= -\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = -f'(x_0).$$

Damit ist gezeigt, dass die Ableitung des Negativen einer Funktion gleich dem Negativen der Ableitung der Funktion ist.
Die Aussage lässt sich anhand des Funktionsgraphen von f auch anschaulich plausibel machen: Der Bildung des Negativen –f einer Funktion f entspricht die Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse. Aus einem steigenden Graphen (oder Teil des Graphen) wird dabei ein fallender Graph und umgekehrt.

1.2 **a)** Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$.
b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$.
c) Diese Aussage ist richtig, es handelt sich um das notwendige Kriterium für das Vorliegen von Extremstellen.
d) Diese Aussage ist falsch, denn $f'(x_0) = 0$ ist nur das notwendige Kriterium. Wie das Gegenbeispiel $f(x) = x^5$ mit $x_0 = 0$ zeigt, ist es nicht hinreichend, denn an $x_0 = 0$ liegt trotz $f'(x_0) = 0$ keine Extremstelle vor.

Operator 2

2.1 Man rekonstruiert den Graphen einer möglichen Ursprungsfunktion aus dem Graphen einer Ableitungsfunktion, indem man auf die Nullstellen des Ableitungsgraphen und auf das Vorzeichen der Ableitungsfunktion schaut: Eine (einfache) Nullstelle mit Vorzeichenwechsel im Ableitungsgraphen ergibt eine Extremstelle im Ursprungsgraphen. In Bereichen, in denen die Ableitungsfunktion negativ ist, ist die Ursprungsfunktion fallend, und in Bereichen, in denen die Ableitungsfunktion positiv ist, ist die Ursprungsfunktion steigend.

2.2 Man bestimmt die Extremstellen einer Funktion, indem man zunächst das notwendige Kriterium überprüft. Hierzu ermittelt man die Nullstelle x_0 der 1. Ableitung: $f'(x_0) = 0$.
In einem zweiten Schritt überprüft man das hinreichende Kriterium, indem man entweder die 1. Ableitung auf einen Vorzeichenwechsel an x_0 untersucht oder überprüft, ob die 2. Ableitung an x_0 ungleich null ist $(f''(x_0) \neq 0)$.

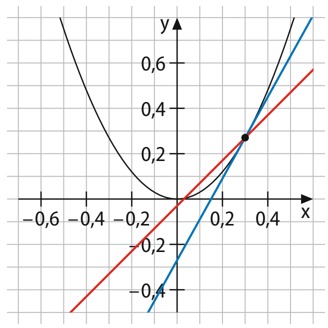
2.3 Man untersucht eine Funktion auf Monotonie, indem man das Monotoniekriterium überprüft: Ist f auf dem Intervall I differenzierbar und gilt dort $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f auf I streng monoton steigend.
Die Umkehrung des Satzes gilt nicht; die Umkehrung würde lauten: Ist f auf dem Intervall I differenzierbar und ist f auf I streng monoton steigend, dann gilt dort $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$. Die Umkehrung ist nicht richtig, wie das Gegenbeispiel $f(x) = x^3$ zeigt.

2.4 Man untersucht eine Funktion auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$, indem man sich den Exponenten und das Vorzeichen des Summanden der ganzrationalen Funktion anschaut, der den höchsten Exponenten hat.

- Ist der Exponent ungerade und das Vorzeichen positiv, verläuft die Funktion vom 3. in den 1. Quadranten, d. h. es gilt: $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.
- Ist der Exponent ungerade und das Vorzeichen negativ, verläuft die Funktion vom 2. in den 4. Quadranten, d. h. es gilt: $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$.
- Ist der Exponent gerade und das Vorzeichen positiv, verläuft die Funktion vom 2. in den 1. Quadranten, d. h. es gilt: $f(x) \to \infty$ für $x \to -\infty$, $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.
- Ist der Exponent gerade und das Vorzeichen negativ, verläuft die Funktion vom 3. in den 4. Quadranten, d. h. es gilt: $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$ für $x \to \infty$.

Operator 3

3.1 Die Steigung eines Graphen in einem Punkt kann wiedergegeben werden durch die Steigung der Tangente, die in diesem Punkt anliegt. Um sich dieser Tangentensteigung anzunähern, wählt man einen zweiten Punkt auf dem Graphen und legt durch diese beiden Punkte eine Sekante. Die Sekantensteigung, die mit dem Differenzenquotienten $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt wird, stellt eine Näherung für die Tangentensteigung dar. Je mehr der zweite Punkt an den ersten heranrückt (d. h. je kleiner der Abstand h zwischen den x-Koordinaten der beiden Punkte wird), desto mehr nähert sich die Sekanten- der Tangentensteigung an. Der Differentialquotient $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$ spiegelt diesen Annäherungsprozess wider, er ist also der Grenzwert des Differenzenquotienten.



3.2 Wir betrachten folgende Aussagen:

A: „Ich schreibe eine Abiturarbeit." B: „Ich bin Schüler."

Wir können nun zwei Schlussfolgerungen bilden:

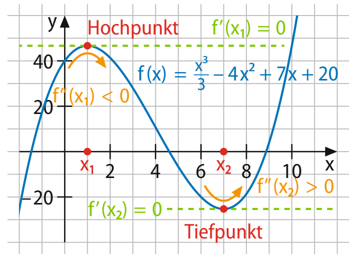
$A \Rightarrow B$: „Wenn ich eine Abiturarbeit schreibe, dann bin ich ein Schüler"

$B \Rightarrow A$: „Wenn ich Schüler bin, dann schreibe ich eine Abiturarbeit."

- Die Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ ist wahr. Die Aussage A ist **hinreichend** für die Aussage B. Schreibt jemand eine Abiturarbeit, so ist diese Information ausreichend dafür, zu folgern, dass diese Person ein Schüler sein muss. Andererseits ist die Aussage B **notwendig** für die Aussage A: Es ist notwendig ein Schüler zu sein, um eine Abiturarbeit zu schreiben.
- Die Schlussfolgerung $B \Rightarrow A$ ist nicht allgemein wahr. Nicht jeder, der Schüler ist, muss gerade an einer Abiturarbeit schreiben. Diese Person kann die Abiturarbeit auch schon geschrieben haben oder sich erst in der 5. Jahrgangsstufe befinden. Es reicht also nicht aus, Schüler zu sein, um daraus schließen zu können, dass die betreffende Peron eine Abiturarbeit schreibt.

Allgemein können wir zusammenfassen: Ist die Schlussfolgerung $A \Rightarrow B$ wahr, so gilt: A ist **hinreichend** für B und (gleichbedeutend) B ist **notwendig** für A.

3.3 Das **notwendige** Kriterium für Extremstellen lautet:
Sei die Funktion f an der Stelle x_E differenzierbar. Wenn f an dieser Stelle ein lokales Extremum hat, dann ist $f'(x_E) = 0$. Die Umkehrung des Satzes („Wenn $f'(x_E) = 0$ ist, dann hat f an der Stelle x_E ein lokales Extremum.") gilt nicht, wie das Gegenbeispiel $f(x) = x^3$ zeigt.



Das **hinreichende** Kriterium für Extremstellen (mit Vorzeichenwechsel) lautet:
Sei f an der Stelle x_E und in einer Umgebung von x_E differenzierbar.
Wenn $f'(x_E) = 0$ ist und f' an der Stelle x_E einen Vorzeichenwechsel von + nach − hat, dann ist $f'(x_E)$ lokales Maximum; wenn $f'(x_E) = 0$ ist und f' an der Stelle x_E einen Vorzeichenwechsel von − nach + hat, dann ist $f'(x_E)$ lokales Minimum.

Operator 4

4.1 $2x^3 + 3x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x^2 + 3x + 4) = 0 \Rightarrow x_{N1} = 0$

$2x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1{,}5x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-2 + \frac{9}{16}}$

$\Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen, da Diskriminante negativ.

4.2 $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(-x^2 + 1) = 4x(1 + x) \cdot (1 - x)$
$\Rightarrow$ Nullstellen der 1. Ableitung bei 0; 1 und −1.
Überprüfen des hinreichenden Kriteriums:
$f'(x)$ hat an $x_{E1} = -1$ einen VZW von + nach − $\Rightarrow x_{E1}$ ist eine Maximalstelle.
$f'(x)$ hat an $x_{E1} = 0$ einen VZW von − nach + $\Rightarrow x_{E1}$ ist eine Minimalstelle.
$f'(x)$ hat an $x_{E1} = 1$ einen VZW von + nach − $\Rightarrow x_{E1}$ ist eine Maximalstelle.

4.3 $f(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1) = -3(x + 1)(x - 1)$
Durch Einsetzen von Zahlen erhält man folgende Monotoniebereiche:
Da $f'(x)$ für $x < -1$ kleiner als 0 ist: f ist im Intervall $]-\infty; -1]$ streng monoton fallend;
da $f'(x)$ für $-1 < x < 1$ größer als 0 ist: f ist im Intervall $[-1; 1]$ streng monoton steigend;
da $f'(x)$ für $x > 1$ kleiner als 0 ist: f ist im Intervall $[1; \infty[$ streng monoton fallend.

Kapitel 1 – Startklar

Seite 13

1.1 a) $y = m \cdot x + c$ — y-Achsenabschnitt $-1\frac{1}{5} \Rightarrow c = -1\frac{1}{5} \Rightarrow y = m \cdot x + -1\frac{1}{5}$

Nullstelle $x = 2{,}5$: $0 = m \cdot 2{,}5 - 1\frac{1}{5} \Rightarrow m = \frac{1\frac{1}{5}}{2{,}5} = 0{,}48 \Rightarrow y = 0{,}48 \cdot x - 1\frac{1}{5}$

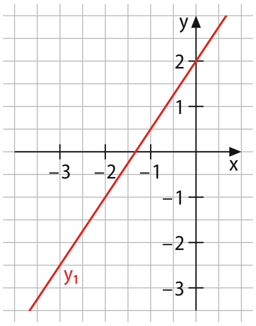
b) $y = m \cdot x + c$

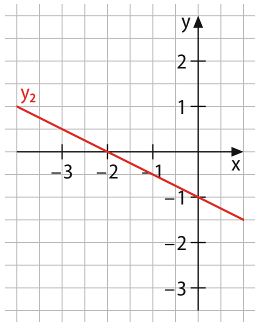
Einsetzen von A: I $\quad -0{,}75 = m \cdot (-2) + c$

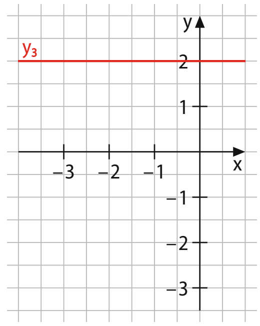
Einsetzen von B: II $\quad 1{,}2 = m \cdot 4{,}6 + c$

I − II: $-0{,}75 - 1{,}2 = -2m - 4{,}6m \Leftrightarrow -1{,}95 = -6{,}6m \Leftrightarrow m = \frac{-1{,}95}{-6{,}6} = \frac{13}{44}$

m in II einsetzen: $1{,}2 = \frac{13}{44} \cdot 4{,}6 + c \Leftrightarrow c = \frac{-7}{44} \Rightarrow y = \frac{13}{44}x - \frac{7}{44}$

1.2 **a)**


b)


c)


2.1 Die Funktionsterme werden auf Scheitelpunktform gebracht.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow S(2\,|\,1)$

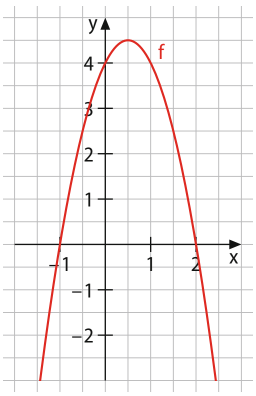
b) $f(x) = -2x^2 + 4x - 6 = -2(x^2 - 2x + 3) = -2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + 3) = -2(x-1)^2 - 4$
$\Rightarrow S(1\,|\,-4)$

c) $f(x) = -2x^2 - 5 = -2(x-0)^2 - 5 \Rightarrow S(0\,|\,-5)$

2.2 Scheitelpunkt $S(x_s\,|\,f(x_s))$

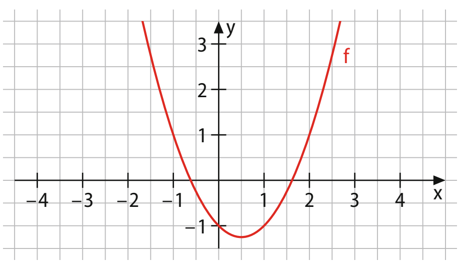
a) Nullstellen: $-2x_2 + 2x + 4 = 0 \quad x_1 = -1;\ x_2 = 2$

$x_S = \frac{-1+2}{2} = 0{,}5;\ f(x_S) = 4{,}5 \Rightarrow S(0{,}5\,|\,4{,}5)$



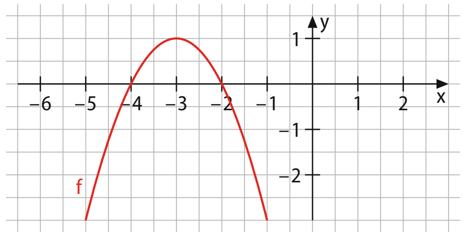
b) Nullstellen: $x^2 - x - 1 = 0 \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2};\ x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$x_S = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{2} = 0{,}5;\ f(x_S) = -1{,}25 \Rightarrow S(0{,}5\,|\,-1{,}25)$



c) Nullstellen: $-x^2 - 6x - 8 = 0 \quad x_1 = -2;\ x_2 = -4$

$x_S = \frac{-4-2}{2} = -3;\ f(x_S) = 1 \Rightarrow S(-3\,|\,1)$



2.3 **a)** $\boxed{1}$: $f(x) = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4{,}5 = -2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 4{,}5 = -2x^2 + 2x - \frac{1}{2} + 4{,}5$

$= -2x^2 + 2x + 4$

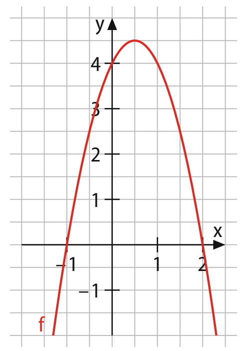
$\boxed{2}$: $f(x) = -2(x+1)(x-2) = -2(x^2 + x - 2x - 2) = -2(x^2 - x - 2) = -2x^2 + 2x + 4$

Die Funktionsterme in $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ stimmen mit dem Funktionsterm in $\boxed{3}$ überein.
Somit handelt es sich in allen drei Fällen um dieselbe Funktion.

b) $\boxed{1}$: ablesbar: Scheitelpunkt $S\left(\frac{1}{2}\,\middle|\,4{,}5\right)$; wegen $a = -2$ nach unten geöffnete gestreckte Parabel.

$\boxed{2}$: ablesbar: Nullstellen $x_1 = -1;\ x_2 = 2$; wegen $a = -2$ nach unten geöffnete gestreckte Parabel.

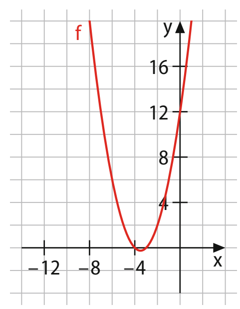
$\boxed{3}$: ablesbar: Schnittpunkt mit der y-Achse $(0\,|\,4)$; wegen $a = -2$ nach unten geöffnete gestreckte Parabel.



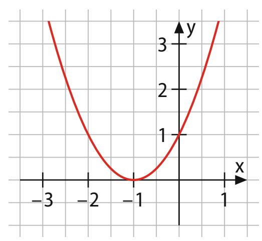
2.4 **a)** Wegen $a = 1$ nach oben geöffnete verschobene Normalparabel.
Nullstellen: $x^2 + 7x + 12 = 0$ ergibt nach dem Satz von Vieta $N_1(-4\,|\,0)$ und $N_2(-3\,|\,0)$.
Scheitelpunkt $S(x_S\,|\,f(x_S))$:

$x_S = \frac{-4 + (-3)}{2} = -3{,}5;\ f(x_S) = -0{,}25 \Rightarrow S(-3{,}5\,|\,-0{,}25)$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 12 \Rightarrow (0\,|\,12)$



b) $f(x) = -(x+1) \cdot (-1) \cdot (x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
Wegen $a = 1$ nach oben geöffnete verschobene Normalparabel.
Doppelte Nullstelle (ablesbar): $N(-1\,|\,0)$;
Scheitelpunkt $S(-1\,|\,0) = N$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = 1 \Rightarrow (0\,|\,1)$



2.5 $f(x) = x^2 - 4;\ g(x) = -\frac{7}{4}(x+2)^2 + 3;\ h(x) = \frac{4}{9}(x-3)^2$

2.6 **a)** f: Scheitel $S(-4|0)$; Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|16)$
g: Scheitel $S(5|9)$; Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|-16)$
h: Scheitel $S(0|-8)$; Schnittpunkt mit der y-Achse: $P(0|-8)$

b) $g\left(3\frac{1}{2}\right) = -\left(3\frac{1}{2} - 5\right)^2 + 9 = 6{,}75$. B liegt auf dem Schaubild von g.

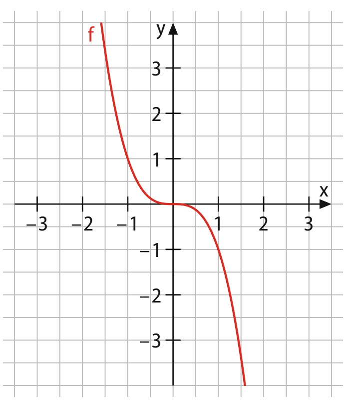
c) Wirkung der beschriebenen Veränderungen auf den Funktionsterm:
Spiegelung an der x-Achse: $-(x+4)^2$
Verschiebung um eine Einheit nach oben: $-(x+4)^2 + 1$
Verschiebung um sechs Einheiten nach rechts: $-(x+4-6)^2 + 1 = -(x-2)^2 + 1$
Neue Funktionsgleichung: $f^*(x) = -(x-2)^2 + 1$.

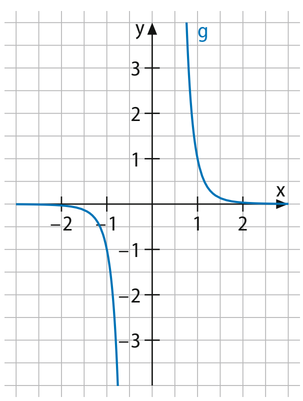
Seite 15

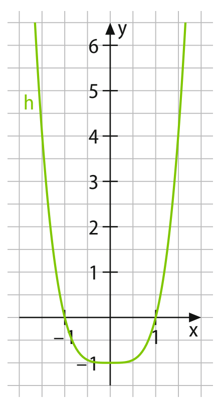
3.1 Funktion f:
Einsetzen der Koordinaten von $P(1|0{,}5)$: $a \cdot 1^r \Rightarrow a = 0{,}5$
Einsetzen der Koordinaten von $Q(2|8)$: $8 = 0{,}5 \cdot 2^r \Rightarrow 2^r = 16 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow f(x) = 0{,}5 \cdot x_4$
Funktion g:
Einsetzen der Koordinaten von $R(-0{,}5|8)$: $0{,}5 = 8 = a(-0{,}5)^r$
Einsetzen der Koordinaten von $S(-1|2)$: $2 = a(-1)^r$
Division dieser Gleichungen ergibt:
$\frac{8}{2} = \frac{(-0{,}5)^r}{(-1)^r} = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^r \Leftrightarrow r = -2.$
$r = -2$ in $2 = a(-1)^r$ eingesetzt: $2 = a(-1)^{-2} = a \Rightarrow g(x) = 2x^{-2}$

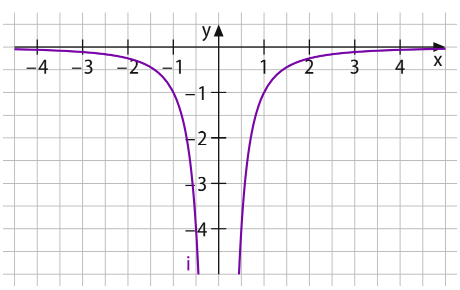
3.2 Da die x-Achse Asymptote ist, muss r negativ sein. Außerdem muss r wegen der Symmetrie zur y-Achse gerade sein. a muss positiv sein, da die Funktion nur positive y-Werte annimmt.

3.3





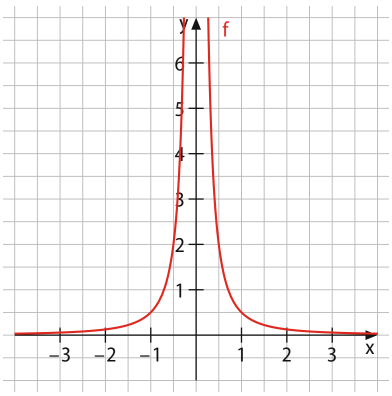




3.4 Einsetzen der Koordinaten von A: $-4 = a \cdot (-1)^n$
Einsetzen der Koordinaten von B: $0{,}125 = a \cdot 0{,}5^n$
Division dieser Gleichunghen ergibt:
$\frac{-4}{0{,}125} = \frac{(-1)^n}{0{,}5^n} \Leftrightarrow -32 = (-2)^n \Rightarrow n = 5$
$n = 5$ in $-4 = a \cdot (-1)^n$ eingesetzt: $-4 = a \cdot (-1)^5 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = 4 \cdot x^5$

3.5 Einsetzen der Koordinaten von A: $2 = a \cdot (-2)^n$
Einsetzen der Koordinaten von B: $-0{,}25 = a \cdot 1^n \Rightarrow a = -0{,}25$
$a = -0{,}25$ in $2 = a \cdot (-2)^n$ eingesetzt: $2 = -0{,}25 \cdot (-2)^n \Leftrightarrow -8 = (-2)^n \Rightarrow n = 3$
$\Rightarrow$ Potenzfunktion (rot) $f(x) = 0{,}25 \cdot x^3$
Gleichung der blau eingezeichneten Geraden $y = d$: $y = 1{,}5$
$\Rightarrow$ Potenzgleichung $0{,}25 \cdot x^3 = 1{,}5$

3.6 **a)**



b) $f(2x) = \frac{1}{2}(2x)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{4} \cdot f(x) = 0{,}25\,f(x)$

$f(2x)$ beträgt somit 25 % von $f(x)$; der Funktionswert ändert sich um 75 %.

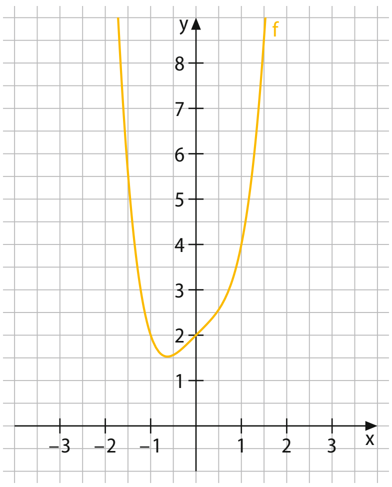
3.7 r muss negativ (z. B. wegen Definitionslücke bei $x = 0$) und ungerade (z. B. wegen Punktsymmetrie) sein, a muss negativ sein, damit für positive x negative Werte entstehen.
Aus $-3 = a \cdot 1^r$ (Punkt P) folgt $a = -3$. Damit folgt aus $-1 = -3 \cdot 3^r$ (Punkt Q) $r = -1$.
Die Gleichung der Funktion f lautet somit $y = -3 \cdot x^{-1} = -\frac{3}{x}$.

Seite 17

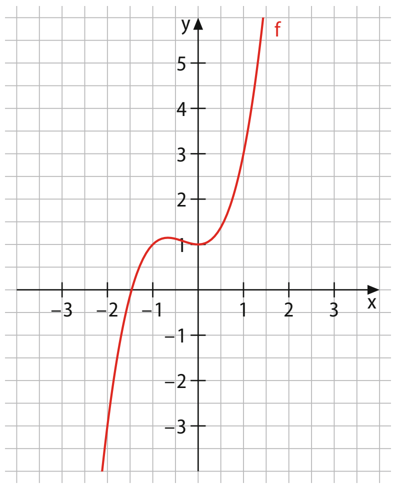
4.1 **a)** Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
b) Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
c) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
d) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$.
e) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
f) Der Graph von f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung. Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$, und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.

4.2 Der linke Graph gehört zum grünen Kärtchen, da nur bei dieser Funktion das Verhalten für betragsmäßig große x-Werte stimmt: Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$. Zudem ist der Graph achsensymmetrisch, was zu den nur geraden Exponenten passt.
Der rechte Graph gehört zum blauen Kärtchen, denn wegen des Verhaltens im Unendlichen muss der Grad der Funktion ungerade sein. Beim roten Kärtchen aber können für positive x nur positive Funktionswerte vorliegen. Da der rechte Graph aber die positive x-Achse schneidet, kann somit nur die Funktion des blauen Kärtchens richtig sein.

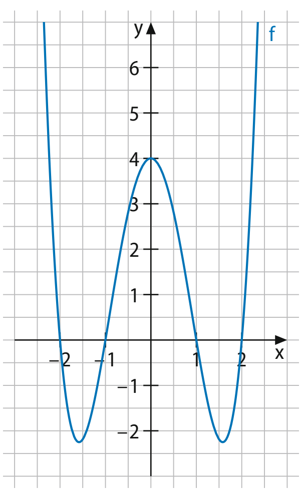
Graph der Funktion auf dem gelben Kärtchen:

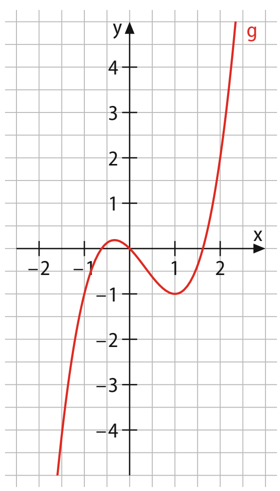


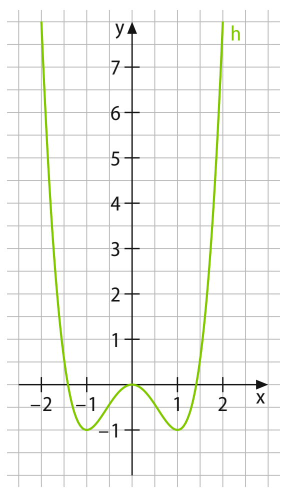
Graph der Funktion auf dem roten Kärtchen:



4.3 Wesentlich sind z. B. die Nullstellen, der Schnittpunkt mit der y-Achse und vor allem das Verhalten im Unendlichen. Beispiele für Graphen:







5.1 **a)** $m = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3^2 - 0}{3} = 3$ **b)** $m = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(2 \cdot 2^3 + 1 - 2 \cdot (-1)^3 - 1}{3} = \frac{18}{3} = 6$

c) $m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot 3^2 + 3 - 2 \cdot 1^3 - 1}{2} = \frac{18}{2} = 9$ **d)** $m = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1}{1} = 2$

5.2 **a)** $f'(-2) = 12$ **b)** $f'(1) = 2$ **c)** $f'(2) = 93$ **d)** $f'(9) = 319$

Seite 19

6.1 **a)** $f(x) = 0{,}5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = x$.
Für $x < 0$ ist f streng monoton fallend, für $x > 0$ ist f streng monoton steigend. Also liegt bei $x = 0$ ein Tiefpunkt.

b) $f(x) = -2x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -4x + 1$.
Für $x < \frac{1}{4}$ ist f streng monoton steigend, für $x > \frac{1}{4}$ ist f streng monoton fallend. Also liegt bei $x = \frac{1}{4}$ ein Hochpunkt.

c) $f(x) = 2x^3 + x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 1$.
Für alle x ist f streng monoton steigend; es gibt also weder Hoch- noch Tiefpunkte.

d) $f(x) = 0{,}25x^3 + 4x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 0{,}75x^2 + 8x = 0{,}75x\left(x + \frac{32}{3}\right)$.
Für $x < -\frac{32}{3}$ ist f streng monoton steigend, für $-\frac{32}{3} < x < 0$ ist f streng monoton fallend, und für $x > 0$ ist f steng monoton steigend. Also liegt bei $x = -\frac{32}{3}$ ein Hochpunkt und bei $x = 0$ ein Tiefpunkt.

e) $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$.
Auf $\mathrm{I} = [1; 4]$ ist f streng monoton steigend; es gibt weder Hoch- noch Tiefpunkte.

f) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ist $g(x) = \frac{1}{x}$ um eine Einheit nach rechts verschoben.
$g'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow$ g ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ streng monoton fallend, also ist auch f auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ streng monoton fallend. Es gibt also weder Hoch- noch Tiefpunkte.

6.2 Individuelle Lösungen. Beispiele:
$f(x) = (x-1)^2 + 1$ (verschobene Normalparabel) hat ein lokales Minimum bei $x = 1$.
$f(x) = 2x^3 - x^2 + 12x$ hat ein lokales Maximum $x = 1$ und ein lokales Minimum bei $x = 2$.
$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$ hat lokale Extrema bei $x = 1$, bei $x = 2$ und $x = 3$.

7.1 **a)** $3x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{6} \Rightarrow N_1(-0{,}46\,|\,0),\ N_2(1{,}46\,|\,0)$

b) $x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{6};\ x_3 = \sqrt{6} \Rightarrow N_1(0\,|\,0),\ N_2(-\sqrt{6}\,|\,0),$ $N_3(\sqrt{6}\,|\,0)$

c) $x^3 + 3x^2 - 2x = x(x^2 + 3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \left(\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}\right) = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$
$N_1(0\,|\,0),\ N_2(-3{,}56\,|\,0),\ N_3(0{,}56\,|\,0)$

d) $x^2\cdot(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2;\ x_3 = 2 \Rightarrow N_1(0\,|\,0),\ N_2(-2\,|\,0),\ N_3(2\,|\,0)$

e) $x^3\cdot(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1 \Rightarrow N_1(0\,|\,0),\ N_2(1\,|\,0)$

f) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1 \Rightarrow N_1(-1\,|\,0),$ $N_2(1\,|\,0)$

7.2 Individuelle Lösungen. Beispiele:

a) $f(x) = (x-2)(x+3),\ g(x) = 5(x-2)(x+3)$

b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3),\ g(x) = 6(x-1)(x-2)\cdot(x-3)^2$

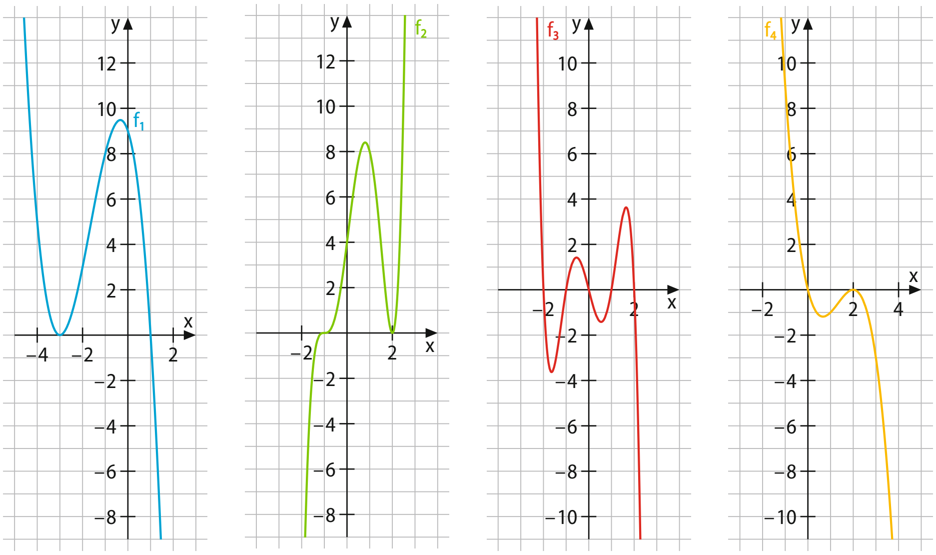
c) $f(x) = x(x-1),\ g(x) = 5x^2(x-1)$

d) $f(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right),\ g(x) = -4\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)^3$

e) $f(x) = \left(x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{2}{9}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right),\ g(x) = 3\left(x + \frac{1}{9}\right)\left(x + \frac{2}{9}\right)^2\left(x + \frac{1}{3}\right)$

f) $f(x) = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt[3]{2}),\ g(x) = 5(x - \sqrt{2})(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + 1)$

7.3

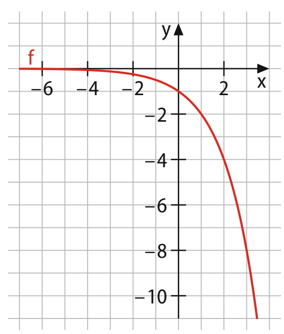


Kapitel 2 – Startklar

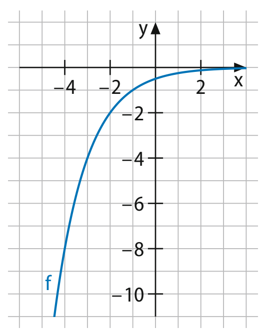
Seite 57

1.1 Bei A gilt für die Basis $0 < b < 1$, es muss sich also um eine fallende Funktion handeln, die aber positive Werte hat. Demnach gehört Graph 2 zum Funktionsterm A.
Das negative Vorzeichen bei B und C bewirkt, dass der Graph an der x-Achse gespiegelt ist (Graph 1 und 3). Setzt man $x = 0$ ein, führt dies bei beiden Funktionen zum gleichen Wert. Setzt man $x = 1$ ein, ergibt sich bei B $f(1) = -2{,}5$ und bei C $f(1) = -3$.
B gehört demnach zu Graph 1 und C zu Graph 3.

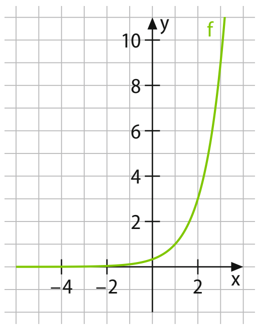
1.2 **a)** Das negative Vorzeichen bewirkt eine Spiegelung der steigenden Funktion $g(x) = 2^x$ an der x-Achse, es resultiert also eine fallende Funktion, die im 3. und 4. Quadraten verläuft, für die die x-Achse Asymptote ist, die durch $(0\,|\,-1)$ geht und für die gilt: $f(1) = -2$.



b) Das negative Vorzeichen bewirkt eine Spiegelung der wegen $0 < b < 1$ fallenden Funktion $g(x) = 0{,}5^x$ an der x-Achse; es resultiert also eine steigende Funktion, die im 3. und 4. Quadraten verläuft, für die die x-Achse Asymptote ist, die (wegen des Vorfaktors $a = -0{,}5$) durch $(0\,|\,-0{,}5)$ geht und für die gilt: $f(1) = -0{,}25$.



c) Das positive Vorzeichen bewirkt, dass die Funktion im 2. und 1. Quadraten verläuft. Sie ist wegen $b > 1$ monoton steigend; die x-Achse ist Asymptote. Sie geht $\left(\text{wegen des Vorfaktors } a = \frac{1}{3}\right)$ durch $(0|0,\overline{3})$ und durch $(1|1)$.



1.3 Der Funktionsterm in c) liefert Werte, die zum Wachstum eines Hundewelpen passen können, denn man erhält: $f(1) = 13{,}3$, $f(5) = 20{,}22$, $f(12) = 42$; $f(14) = 51{,}53$.
Der Funktionsterm in a) kommt nicht in Frage wegen der negativen Werte, die er liefert; hier ist auch nur schwer eine passende Realsituation denkbar.
Der Funktionsterm in b) liefert sehr schnell viel zu große Werte, die die Größe eines Hundes weit übersteigen. Hiermit könnte eher ein Populationswachstum modelliert werden.

2.1 **a)** $\log_5(125) = x \Leftrightarrow 5^x = 125 = 5^3 \Rightarrow x = 3$

b) $\log_7(\sqrt{343}) = x \Leftrightarrow 7^x = \sqrt{343} = 7^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

c) $\log_8(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$

d) $\log_x(512) = 3 \Leftrightarrow x^3 = 512 = 8^3 \Rightarrow x = 8$

e) $\log_3(3^5) = x \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

f) $\log_{\sqrt{3}}(27) = x \Leftrightarrow \sqrt{3^x} = 27 \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

2.2 **a)** $3 \cdot 2^{x+1} - 48 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 16 = 2^4 \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

b) $5^{2x} - 4 \cdot 5^x = 0 \Leftrightarrow \frac{5^{2x}}{5^x} = 4 \Leftrightarrow 5^{2x-x} = 4 \Leftrightarrow 5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4$

c) $3^{2x} - 3^x = 6$ Substitution $u = 3^x$ ergibt $u^2 - u - 6 = 0$. $\Rightarrow u_1 = 3$; $u_2 = -2$
Resubstitution: $u_1 = 3^x \Leftrightarrow 3 = 3^x \Rightarrow x = 1$; $u_2 = 3^x \Leftrightarrow -2 = 3^x$ nicht möglich, da $3^x > 0$.
$\Rightarrow$ Lösung der Gleichung: $x = 1$.

d) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x = 10 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x = 10 \Leftrightarrow (9-4) \Leftrightarrow 3^x = 10 \Leftrightarrow 3^x = 2 \Rightarrow$
$x = \log_3 2 = 0{,}63$

e) $3^x - 2^{x+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x \cdot 2^x \cdot 2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (3 \cdot 2)^x = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6^x = 6^{-1} \Rightarrow x = -1$

f) $7^{x-3} - 49^x = 0 \Leftrightarrow 7^{x-3} - 7^{2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{7^{x-3}}{7^{2x}} = 1 \Leftrightarrow 7^{-x-3} = 1 \Rightarrow -x - 3 = \log_7 1 = 0$
$\Rightarrow x = -3$

g) $32 \cdot 3^x = 6^x \Leftrightarrow 32 = \frac{6^x}{3^x} = 2^x \Leftrightarrow 2^5 = 2^x \Rightarrow x = 5$

h) $2^{3x} + 0{,}125 = 2 \cdot 8^x \Leftrightarrow 2^{3x} + 0{,}125 = 2 \Leftrightarrow (2^3)^x \Leftrightarrow 2^{3x} + 0{,}125 = 2 \cdot 2^{3x}$
$\Leftrightarrow 0{,}125 = 2^{3x} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 2^{3x} \Leftrightarrow 2^{-3} = 2^{3x} \Rightarrow -3 = 3x \Rightarrow x = -1$

3.1 **a)** I $f(-1) = a \cdot b^{-1} = 1{,}5$ II $f(3) = a \cdot b^3 = 24$

Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-1}}{b^3} = \frac{1{,}5}{24} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow b^{-4} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow b = 2$

$b = 2$ in I eingesetzt: $a \cdot 2^{-1} = 1{,}5 \cdot a = 1{,}5 \cdot 2 = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 2^x$

b) I $f(-2) = a \cdot b^{-2} = \frac{1}{3}$ II $f(2) = a \cdot b^2 = 27$

Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-2}}{b^2} = \frac{\frac{1}{3}}{27} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow b^{-4} = \frac{1}{81} = 3^{-4} \Rightarrow b = 3$

$b = 3$ in II eingesetzt: $a \cdot 3^2 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f(x) = 3 \cdot 3^x$

c) I $f(-3) = a \cdot b^{-3} = -0{,}5$ II $f(1) = a \cdot b = -8$

Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-3}}{b} = \frac{-0{,}5}{-8} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow b^{-4} = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow b = 2$

$b = 2$ in II eingesetzt: $a \cdot 2 = -8 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow f(x) = (-4) \cdot 2^x$

d) I $f(-4) = a \cdot b^{-4} = 4$ II $f(-1) = a \cdot b^{-1} = 0{,}5$

Divison I : II ergibt: $\frac{b^{-4}}{b^{-1}} = \frac{4}{0{,}5} = 8 \Leftrightarrow b^{-3} = 8 = 2^3 \Rightarrow b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2}$ in I eingesetzt: $a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 4 \Rightarrow a = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

3.2 I: $f(0) = a \cdot b^0 = \frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ II: $f(1) = a \cdot b^1 = \frac{2}{9}$

$a = \frac{2}{3}$ in II eingesetzt: $\frac{2}{3} \cdot b = \frac{2}{9} \Leftrightarrow b = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Probe mit den Koordinaten von R: $f(2) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} \neq \frac{2}{81}$

Das Schaubild geht nicht durch den Punkt R.

4.1 **a)** $a = 1000$, $b = 2$, x: Anzahl der Stunden $\Rightarrow f(x) = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{36}}$ (Anzahl der Bakterien nach x Stunden)

$f(x) = 10 \cdot 1000 = 10\,000 \Leftrightarrow f(x) = 1000 \cdot 2^{\frac{x}{36}} = 10\,000 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{36}} = 10$

$\Rightarrow \frac{x}{36} = \log_2 10 \approx 3{,}32 \Rightarrow x \approx 36 \cdot 3{,}32 = 119{,}52$

Innerhalb von 119,52 Stunden verzehnfacht sich die Kolonie.

b) $9\text{ Tage} = 9 \cdot 24\text{ h} = 216\text{ h}$ $f(216) = 1000 \cdot 2^{\frac{216}{36}} = 64\,000$

Nach 9 Tagen besteht die Kolonie aus 64 000 Bakterien.

Veränderte Bedingungen:

$g(x) = 64\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$; x: Anzahl der Tage

$g(x) = 64\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \log_{0{,}5}\frac{1}{64} = 6$

Nach weiteren 6 Tagen besteht die Kolonie wieder aus 1000 Bakterien. Insgesamt dauert es also $9\text{ Tage} + 6\text{ Tage} = 15\text{ Tage}$, bis die ursprüngliche Anzahl an Bakterien wieder erreicht wird.

4.2 **a)** $100\text{ mg} \cdot 0{,}92^{10} \approx 43\text{ mg}$

b) $0{,}5 = b^{30}$ führt auf den Jahresfaktor $b \approx 0{,}97716$ und somit $0{,}97716^{13} \approx 0{,}74 = 74\,\%$.

A Mathematische Zeichen und Abkürzungen

Zahlen und Funktionen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\lvert a\rvert$	Betrag von a
$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b
$a < b$	a kleiner als b
$a > b$	a größer als b
$a \leq b$	a kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a größer oder gleich b
$\sqrt{a}$	Quadratwurzel aus a
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall
$]a; b[$	offenes Intervall
$\log_b(a)$	Logarithmus von a zur Basis b
$\ln(a)$	natürlicher Logarithmus von a
$f'(x)$	Ableitung der Funktion f(x)
$\int_a^b f(x)\,dx$	Integral der Funktion f(x) über dem Intervall [a; b]
$[F(x)]_a^b$	F(b) – F(a) (F Stammfunktion)

Analytische Geometrie

AB	Gerade durch die Punkte A und B
$\overline{AB}$	Strecke mit den Endpunkten A und B; auch Länge dieser Strecke
$\overrightarrow{AB}$	von den Punkten A und B bestimmter Vektor
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$	Vektor mit den Koordinaten a_1, a_2, a_3
$\lvert\vec{a}\rvert$	Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a}$
$d(P; E)$	Abstand des Punkts P von der Ebene E
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$	Vektorprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$P(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
$P(X = k)$	Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X den Wert k annimmt
$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsgröße X
σ	Standardabweichung einer Zufallsgröße
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient

C.C.BUCHNER

T63025