mathe.delta 11/12 Basisfach: das Konzept

Einstieg und Ausblick

Erweiterung der Differentialrechnung I:
Alte und neue Ableitungsregeln

1

Einstieg

In diesem Kapitel wollen wir die Arbeitsweise eines Mathematikers simulieren. Die Phänomene, mit denen wir uns beschäftigen, sind einerseits Terme, andererseits ihre zugehörigen Graphen mit ihren Eigenschaften wie Extrempunkte oder Monotonieverhalten. Wir gehen dabei so vor, dass wir Terme auf verschiedene Arten miteinander kombinieren.

In einem **ersten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie additiv miteinander verknüpfen.

Am Ende des ersten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 2x^5 + 3x^3 + 6$ ableiten sowie **auf Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen.**

In einem **zweiten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie multiplikativ miteinander verknüpfen.

Am Ende des zweiten Unterkapitels haben Sie die **Produktregel als neue Ableitungsregel** kennen gelernt und können Funktionen wie $f(x) = (x+5)^2 \cdot (x-3)$ ableiten.

In einem **dritten Schritt** kombinieren wir Terme, indem wir sie miteinander verketten. Dabei entsteht eine innere und eine äußere Funktion.

Am Ende des dritten Unterkapitels haben Sie die **Verkettung von Termen** kennengelernt und können Funktionen wie $f(x) = (3x+4)^6$ mit der **Kettenregel** ableiten.

In einem **vierten Schritt** nehmen wir den Sinus und Kosinus hinzu und kombinieren sie mit linearen Termen.

Am Ende des vierten Unterkapitels können Sie **Funktionen** wie $f(x) = 4 \cdot \sin(x+2)$ **ableiten** sowie **auf Monotonie, Symmetrie und Nullstellen untersuchen.**

Was ist Mathematik? Der renommierte Mathematiker Keith Devlin beantwortete diese Frage sinngemäß wie folgt: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Sie untersucht abstrakte Muster, z. B. Zahlenmuster, Termmuster oder Muster in Graphen. Dabei geht es z. B. darum, Ähnlichkeiten zwischen zwei Phänomenen zu erkennen und diese in Beziehung zu setzen zu Ähnlichkeiten zweier anderer Phänomene.

Ausblick

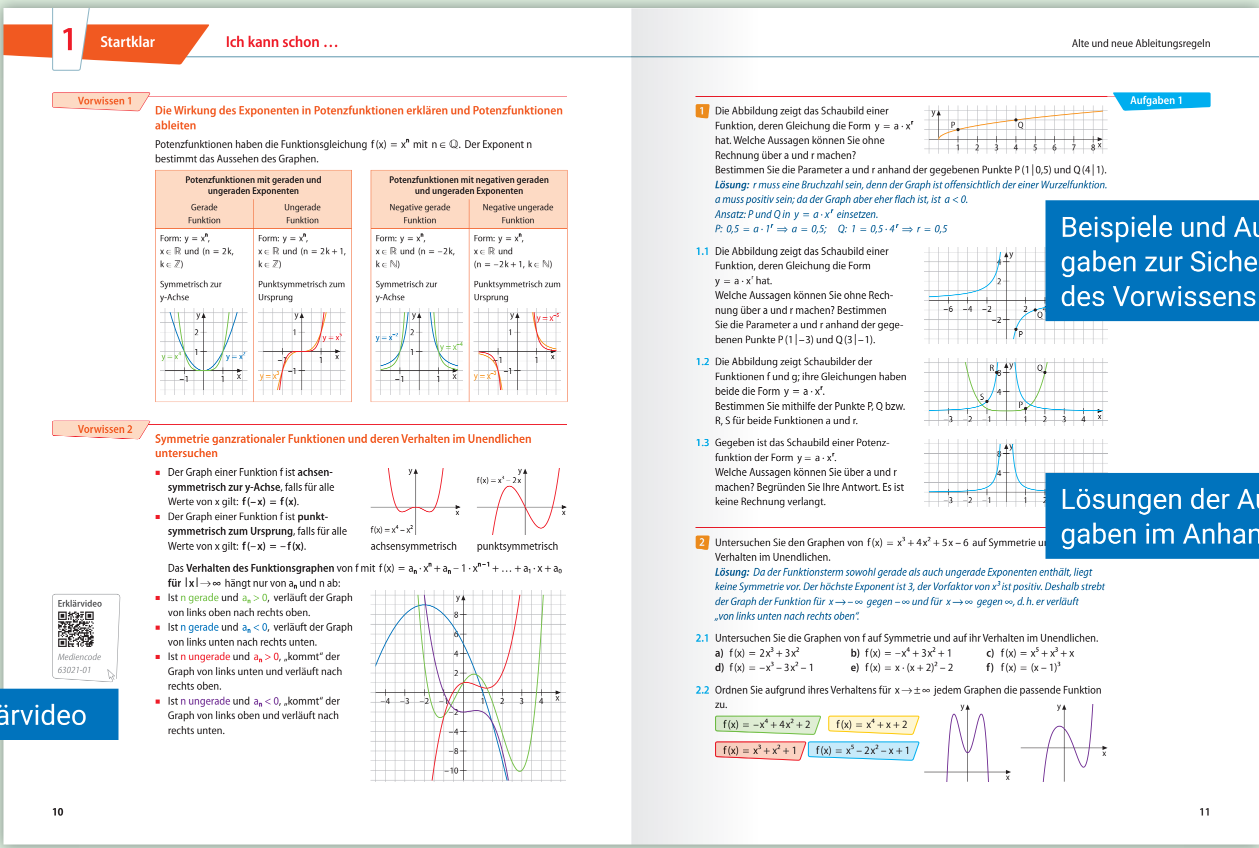
Die Mustererkennung, die sich als roter Faden durch das Kapitel zieht, spielt sowohl beim Zusammenspiel zwischen dem Aussehen des Terms und dem Aussehen des Graphen eine Rolle als auch beim Erkennen und Entdecken der Ableitungsregeln.

9

Impuls zum Kapitel

roter Faden durch das Kapitel

Vorwissen am Anfang eines Kapitels wiederholen und sichern



1 Startklar **Ich kann schon …**

Vorwissen 1

Die Wirkung des Exponenten in Potenzfunktionen erklären und Potenzfunktionen ableiten

Potenzfunktionen haben die Funktionsgleichung $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$. Der Exponent n bestimmt das Aussehen des Graphen.

Potenzfunktionen mit geraden und ungeraden Exponenten		Potenzfunktionen mit negativen geraden und ungeraden Exponenten	
Gerade Funktion	Ungerade Funktion	Negative gerade Funktion	Negative ungerade Funktion
Form: $y = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ und $(n = 2k, k \in \mathbb{Z})$	Form: $y = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ und $(n = 2k+1, k \in \mathbb{Z})$	Form: $y = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ und $(n = -2k, k \in \mathbb{N})$	Form: $y = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ und $(n = -2k+1, k \in \mathbb{N})$
Symmetrisch zur y-Achse	Punktsymmetrisch zum Ursprung	Symmetrisch zur y-Achse	Punktsymmetrisch zum Ursprung
$y = x^4$, $y = x^2$	$y = x^5$, $y = x^3$	$y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$	$y = x^{-5}$, $y = x^{-3}$

Vorwissen 2

Symmetrie ganzrationaler Funktionen und deren Verhalten im Unendlichen untersuchen

- Der Graph einer Funktion f ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = f(x)}$.
- Der Graph einer Funktion f ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, falls für alle Werte von x gilt: $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$.

$f(x) = x^4 - x^2$ achsensymmetrisch

$f(x) = x^3 - 2x$ punktsymmetrisch

Das **Verhalten des Funktionsgraphen** von f mit $f(x) = a_n \cdot x^n + a_n - 1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ **für** $|x| \to \infty$ hängt nur von a_n und n ab:

- Ist n gerade und $a_n > 0$, verläuft der Graph von links oben nach rechts oben.
- Ist n gerade und $a_n < 0$, verläuft der Graph von links unten nach rechts unten.
- Ist n ungerade und $a_n > 0$, „kommt" der Graph von links unten und verläuft nach rechts oben.
- Ist n ungerade und $a_n < 0$, „kommt" der Graph von links oben und verläuft nach rechts unten.

Erklärvideo
Mediencode 63021-01

10

Alte und neue Ableitungsregeln

Aufgaben 1

1 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat. Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen?
Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte P(1|0,5) und Q(4|1).
Lösung: *r muss eine Bruchzahl sein, denn der Graph ist offensichtlich der einer Wurzelfunktion. a muss positiv sein; da der Graph aber eher flach ist, ist $a < 0$.*
Ansatz: P und Q in $y = a \cdot x^r$ einsetzen.
P: $0{,}5 = a \cdot 1^r \Rightarrow a = 0{,}5$; Q: $1 = 0{,}5 \cdot 4^r \Rightarrow r = 0{,}5$

1.1 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion, deren Gleichung die Form $y = a \cdot x^r$ hat.
Welche Aussagen können Sie ohne Rechnung über a und r machen? Bestimmen Sie die Parameter a und r anhand der gegebenen Punkte P(1|−3) und Q(3|−1).

1.2 Die Abbildung zeigt Schaubilder der Funktionen f und g; ihre Gleichungen haben beide die Form $y = a \cdot x^r$.
Bestimmen Sie mithilfe der Punkte P, Q bzw. R, S für beide Funktionen a und r.

1.3 Gegeben ist das Schaubild einer Potenzfunktion der Form $y = a \cdot x^r$.
Welche Aussagen können Sie über a und r machen? Begründen Sie Ihre Antwort. Es ist keine Rechnung verlangt.

2 Untersuchen Sie den Graphen von $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x - 6$ auf Symmetrie u[nd]
Verhalten im Unendlichen.
Lösung: *Da der Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten enthält, liegt keine Symmetrie vor. Der höchste Exponent ist 3, der Vorfaktor von x^3 ist positiv. Deshalb strebt der Graph der Funktion für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to \infty$ gegen ∞, d. h. er verläuft „von links unten nach rechts oben".*

2.1 Untersuchen Sie die Graphen von f auf Symmetrie und auf ihr Verhalten im Unendlichen.
a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ **b)** $f(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$ **c)** $f(x) = x^5 + x^3 + x$
d) $f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1$ **e)** $f(x) = x \cdot (x+2)^2 - 2$ **f)** $f(x) = (x-1)^3$

2.2 Ordnen Sie aufgrund ihres Verhaltens für $x \to \pm\infty$ jedem Graphen die passende Funktion zu.
$f(x) = -x^4 + 4x^2 + 2$ $f(x) = x^4 + x + 2$
$f(x) = x^3 + x^2 + 1$ $f(x) = x^5 - 2x^2 - x + 1$

11

Beispiele und Aufgaben zur Sicherung des Vorwissens

Lösungen der Aufgaben im Anhang

Erklärvideo

Unterkapitel: klar strukturiert unterrichten

Entdecken

Mit einem 3D-Drucker können in mehreren Schritten komplexe Werkstücke hergestellt werden. Dabei baut jeder Schritt auf das Ergebnis des jeweils vorangehenden Schritts auf.

- Ähnliches ist auch in der Mathematik möglich. Inwiefern kann man Funktionen wie f mit $f(x) = (x+1)^2$ oder g mit $g(x) = \sqrt{3x-1}$ als Hintereinanderausführung von Funktionen interpretieren?
- Finden Sie weitere Beispiele für eine solche „Verkettung" von Funktionen.

Verstehen

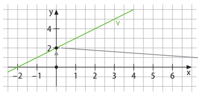
Bisher haben Sie Funktionen bzw. Termbausteine stets durch die Operatoren $+, -, \cdot$ und $:$ verknüpft. Nun lernen Sie eine neue Art der Verknüpfung kennen: die Verkettung. Bei der Verkettung werden Funktionen hintereinander ausgeführt.
Wir betrachten hierzu als Beispiel die Funktion f mit $f(x) = (x+2)^2$. Man wird zunächst $(x+2)$ berechnen und das Ergebnis anschließend quadrieren. Zuerst wird also mit v der Funktionswert $v(x) = (x+2)$ ermittelt und dann wird auf diesen Funktionswert die Funktion u mit $u(x) = x^2$ angewendet.

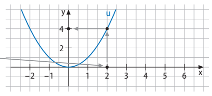
Verständnis durch ausführliche Herleitung

x → Funktion v → v (x) → Funktion u → u (v (x))

Die nebenstehende Wertetabelle spiegelt diesen Prozess wider.
Graphisch umsetzen kann man ihn, indem man zunächst das Schaubild von $v(x) = (x+2)$ zeichnet und anschließend auf Werte dieses Schaubilds die Funktion $u(v(x)) = (x+2)^2$ anwendet.

x	v (x)	u (v (x))
−1	1	1
−0,5	1,5	2,25
0	2	4
0,5	2,5	6,25
1	3	9





u ∘ v liest man „u verkettet mit v".

Man bezeichnet eine solche Art der Verknüpfung als Verkettung $f = u \circ v$ zweier Funktionen.

Merke

Beim Verketten zweier Funktion u und v entsteht eine neue Funktion $f = u \circ v$ mit dem Funktionsterm $f(x) = u(v(x))$.

Beispiel I:
$v(x) = x+2,\ u(x) = x^2 \quad \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = (x+2)^2$
$v\colon x \mapsto v(x)$ wird innere Funktion und $u\colon x \mapsto u(x)$ wird äußere Funktion genannt.

Beispiel II:
$v(x) = 2+3x,\ u(x) = \sin(x) \ \Rightarrow\ f(x) = u(v(x)) = \sin(2+3x)$.

Merkwissen übersichtlich und kompakt

Die Frage ist nun: Wie sieht die Ableitung solcher verketteter Funktionen aus?

Wir versuchen, diese Frage zu beantworten, indem wir die Verkettung zunächst auflösen und die daraus entstehende Funktion ableiten. Wir nehmen hierzu den Termbaustein $(4x-1)$ und multiplizieren ihn mit sich selbst; so erhalten wir $(4x-1)^2$.
Die Funktion f mit $f(x) = (4x-1)^2$ können wir – wie oben beschrieben – als Verkettung von $v(x) = (4x-1)$ mit $u(x) = x^2$ verstehen. Wir lösen die Verkettung nun auf:
$f(x) = (4x-1)^2 = (4x-1)\cdot(4x-1) = 16x^2 - 4x - 4x + 1 = 16x^2 - 8x + 1$
Diesen Ausdruck können wir leicht ableiten: $f'(x) = 32x - 8 = 4\cdot(8x-2) = 4\cdot 2\cdot(4x-1)$.
Wir vergleichen diesen Ausdruck mit der Ableitung der inneren Funktion und der Ableitung der äußeren Funktion: $v(x) = (4x-1) \ \Rightarrow\ v'(x) = 4$
$u(x) = x^2 \ \Rightarrow\ u'(x) = 2x$

Zur Erinnerung: *2. binomische Formel* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, dass man die Ableitung einer verketteten Funktion bildet, indem man die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren Funktion multipliziert. Wir wollen diese Vermutung anhand zweier weiterer Beispiele überprüfen.

1 Wir bilden aus $u(x) = x-1$ und $v(x) = 3x$ **a)** die Verkettung $u(v(x))$ und **b)** die Verkettung $v(u(x))$ und bestimmen jeweils ihre Ableitungen.
a) $u(v(x)) = u(3x) = (3x) - 1 = 3x - 1$
Die Ableitung davon ist 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion u die Zahl 1 und als Ableitung der äußeren Funktion v die Zahl 3. Das Produkt ergibt ebenfalls 3.
b) $v(u(x)) = v(x-1) = 3(x-1) = 3x - 3$
Die Ableitung davon ist wiederum 3. Berechnen wir sie nach unserer oben formulierten Vermutung, erhalten wir als Ableitung der inneren Funktion v die Zahl 3 und als Ableitung der äußeren Funktion u die Zahl 1. Das Produkt ergibt wieder 3.

kleinschrittige Erarbeitung

2 Wir betrachten die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$ und $D = \mathbb{R}^+$. Zur Berechnung der Ableitung formen wir zunächst um: $f(x) = \sqrt{(x+2)^2} = x+2$. Die Ableitung ist 1.
Berechnet man die Ableitung über unsere Regel, ist $u(x) = x^2 + 4x + 4$ die innere Funktion u, ihre Ableitung $u'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$.
Die äußere Funktion v ist $\sqrt{x} = x^{0,5}$, ihre Ableitung $v'(x) = 0{,}5x^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Insgesamt ergibt sich als Ableitung $f'(x) = \frac{2(x+2)}{2\cdot\sqrt{(x+2)^2}} = 1$.

Zwar genügen drei Positivbeispiele nicht, um einen Satz zu beweisen, aber immerhin, um ihn plausibel zu machen. Wir können also festhalten:

Merke

Die Ableitungsregel für eine verkettete Funktion $f(x) = u(v(x))$ lautet:
$\mathbf{f'(x) = u'(v(x))\cdot v'(x)}$

Dabei ist
- $u'(v(x))$ die Ableitung der **äußeren Funktion** an der inneren Funktion und
- $v'(x)$ die Ableitung der **inneren Funktion**.

Merkregel: *innere Ableitung mal äußere Ableitung*

Aufgaben aus drei Anforderungsbereichen

Aufgaben

1 Bilden Sie $u(v(x))$ und $v(u(x))$.
a) $u(x) = 3x;\ v(x) = 4x$ **b)** $u(x) = 5x;\ v(x) = x-4$ **c)** $u(x) = 2x;\ v(x) = x^2$
d) $u(x) = 2x+1;\ v(x) = 1-x^2$ **e)** $u(x) = x-2;\ v(x) = \sqrt{x}$ **f)** $u(x) = \frac{1}{x};\ v(x) = x^2$

2 Bilden Sie $u \circ v$ und $v \circ u$ für $u(x) = 2x+1$ und $v(x) = \sqrt{x^2-1}$.

3 Bilden Sie die Verkettungen $f(x) = u(v(x))$ und $g(x) = v(u(x))$ für $u(x) = 2\sqrt{x}$ und $v(x) = \frac{1}{x^2}$.

4 Stellen Sie die Funktionen f als Verkettung zweier Funktionen u und v dar.
a) $f(x) = (x+4)^3$ **b)** $f(x) = \sqrt{2x^2+3}$ **c)** $f(x) = \frac{2}{3x+4}$ **d)** $f(x) = x^2 + 6x + 9$

5 Bestimmen Sie die innere Funktion v (x) und die äußere Funktion u (x) der Funktion f, die als Verkettung von u und v interpretiert werden kann: $f(x) = (x+2)^2$. Bestimmen Sie anschließend $f(x) = v(u(x))$.
Lösung: *Als innere Funktion wählt man* $v(x) = x+2$, *als äußere Funktion* $u(x) = x^2$.
$v(u(x)) = (x^2) + 2 = x^2 + 2$.

Lernen am Beispiel durch gelöste Aufgaben

6 Die Funktion f kann als Verkettung $u \circ v$ aufgefasst werden. Bestimmen Sie die innere Funktion v und die äußere Funktion u.
a) $f(x) = \sqrt{3x-2}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2x^2}$ **c)** $f(x) = x^2 + 8x + 16$
d) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x^2+1}}$ **e)** $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ **f)** $f(x) = \frac{2x}{4x^3 - 6x^2}$

Nachgefragt

- Auch im Alltag spielt die Verkettung von Ausdrücken eine Rolle. Ebenso wie in der Mathematik ist die Reihenfolge der Verkettung in der Regel von Bedeutung. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf $u(v(x)) = v(u(x))$ bzw. $u(v(x)) \neq v(u(x))$.
  a) *Macht der Sprache und Sprache der Macht*
  b) *Studie der Themen und Themen der Studie*
  c) *Rundfahrt der Sieger und Sieger der Rundfahrt*
  d) *Liga der Champions und Champions der Liga*
  e) *Teiler der Zahl und Zahl der Teiler.*
- Erläutern Sie anhand einer Wertetabelle, dass die Reihenfolge bei der Verkettung der Funktionen f mit $f(x) = 3x - 2$ und g mit $g(x) = \sqrt{x+1}$ eine Rolle spielt.
- In der Regel ist also $u(v(x)) \neq v(u(x))$. Geben Sie drei Beispiele an, in denen $u(v(x)) = v(u(x))$ ist.

Impulsfragen zur Zwischenreflexion

Beispiel *Kettenregel*

7 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4+5x)^2$ auf zwei verschiedene Arten.
Lösung: 1 *Mithilfe der Kettenregel:* $u(v) = v^2;\ u'(v) = 2v;\ v(x) = 4+5x;\ v'(x) = 5;$
$f'(x) = u'(v)\cdot v'(x) = 2\cdot(4+5x)\cdot 5 = 40 + 50x$
2 *Mithilfe einer binomischen Formel erhält man* $f(x) = 16 + 40x + 25x^2$; *somit ist* $f'(x) = 40 + 25\cdot 2x = 40 + 50x$.

8 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit von f (x) auf zwei verschiedene Arten.
a) $f(x) = (2x-2)^2$ **b)** $f(x) = (x+1)^3$ **c)** $f(x) = \frac{1}{2x^2 - x}$
d) $f(x) = \frac{x}{2x^2 - x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1}$ **f)** $f(x) = (x^2 - 10x + 25)^{-2}$

Zur Erinnerung: $\frac{1}{x} = x^{-1}$

9 Leiten Sie ab und vereinfachen Sie (wenn möglich) das Ergebnis.
a) $f(x) = (2x+4)^5$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{x+1}$
d) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{x^5+5}$ **f)** $f(x) = (5x^4 - 2x)^{-3}$

10 Untersuchen Sie f mit $f(x) = (5x+5)^2$ auf Monotonie und auf Extremstellen.
Lösung: *Nach der Kettenregel mit* $v(x) = (5x+5)$ *und* $u(x) = x^2$ *ist*
$f'(x) = 2(5x+5)\cdot 5 = 50x + 50$. *Aus* $50x + 50 = 0$ *erhält man* $x = -1$.
Da $f'(x) < -1$ *für alle* $x < -1$ *gilt, ist die Funktion für* $x < -1$ *streng monoton fallend;*
für $x > -1$ *ist* $f'(x) > 0$, *hier ist die Funktion also streng monoton steigend.*
Da an $x = -1$ *ein Vorzeichenwechsel in der 1. Ableitung von – nach + vorliegt, handelt es sich um eine Minimalstelle.*

Beispiel *Monotonie*

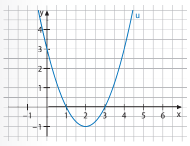
11 Find the intervals of monotony of the given function f and identify its extrema.
a) $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$ **b)** $f(x) = \frac{1}{x^2 + 0{,}5}$ **c)** $f(x) = (x+1)^3 - 2x - 4$

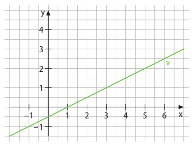
12 Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im angegebenen Intervall I?
a) $f(x) = \sin(x+1)\cdot\sqrt{x+1};\ I = [0; \pi]$ **b)** $f(x) = \cos^2(x+1) - 0{,}5;\ I = [0; 2]$

Zur Erinnerung: *Schneidet der Graph die x-Achse an der Stelle* x_0, *berechnet man den Schnittwinkel* α *über* $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$.

13 Vorgelegt sind die sechs Funktionsterme
$f_1(x) = x^2$ | $f_2(x) = 2x - 1$ | $f_3(x) = 1 + x$ | $g_1(x) = 3x - 1$ | $g_2(x) = x^2 - 1$ | $g_3(x) = 2 - 3x$
Finden Sie heraus, welcher der sechs Terme
$3(2x-1)$ | $3 - 6x$ | $3x$ | x^2 | $2x^2 - 3$ | $9x^2 - 6x + 1$ | $x^4 - 2x^2 + 1$ | $(2-3x)^2$ | $3 - 3x$
gleich $f_1(g_1(x))$, $f_1(g_2(x))$, $f_1(g_3(x))$, $f_2(g_1(x))$, $f_2(g_2(x))$, $f_2(g_3(x))$, $f_3(g_1(x))$, $f_3(g_2(x))$, $f_3(g_3(x))$ ist.

14 Gegeben sind die Graphen der Funktionen u und v. Bestimmen Sie für $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ näherungsweise $u(v(x_0))$, $u(v(x_1))$ und $u(v(x_2))$ sowie $v(u(x_0))$, $v(u(x_1))$ und $v(u(x_2))$.





Klausurvorbereitung: Grundlagen – Klausuraufgaben – Reflexion

Im Folgenden finden Sie keine vollständigen Klausuren, wohl aber Aufgaben, die zu diesem Kapitel passen und Teil einer Klausur sein könnten.

Aufgabe 1

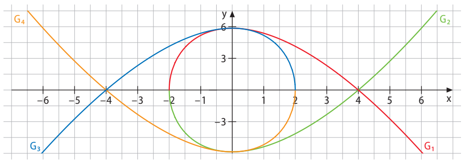
Warm up

A Leiten Sie ab.
a) $f_1(x) = -3(x-3)^3$ b) $f_2(x) = \sqrt{x^3+3x}$ c) $f_3(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

B Bestimmen Sie die Extrema der Funktionen, einmal ohne Zuhilfenahme der Ableitung, einmal mithilfe der Ableitung.
a) $g_1(x) = -2x^2 + 8x - 4$ b) $g_2(x) = 3x^2 + 12x + 9$

C Lösen Sie folgende Gleichungen.
a) $(x+2) \cdot (x-4) = 0$ b) $x^2 + 4x + 4 = 0$ c) $x - 1 = \sqrt{x+1}$

1 Gegeben ist die Funktion f mit p: $y = \sqrt{x+2}\,(x-4)$.
a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an und erläutern Sie dies.
b) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) des Graphen von f sowie seine Extremstelle(n).
c) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitung von f. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.
d) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Graph von f parallel zur Geraden $y = x + 4$ verläuft.
e) Nehmen Sie Stellung zu folgender Aussage: „Über einem Intervall streng monoton steigende Funktionen können in der ersten Ableitung in diesem Intervall keine Nullstelle haben."
f) Entscheiden Sie begründet, welcher der abgebildeten Graphen der Graph der Ableitungsfunktion von f ist.



Aufgabe 2

Warm up

A Zerlegen Sie (durch Ausklammern und/oder Anwen
weit wie möglich in Faktoren.
a) $-2v^3 + 12v^2w - 18vw^2$

B Ermitteln Sie den Schnittpunkt folgender Funktione
$f(x) = (x+1)^2$ und $g(x) = -(x+1)(x-2)$

C Ermitteln Sie jeweils den Scheitel der quadratischen
a) $y = x^2 + 6x + 9$ b) $y = x^2 + 6x + 5$

Warm up: Basiskompetenzen üben

Muster für Klausuraufgaben

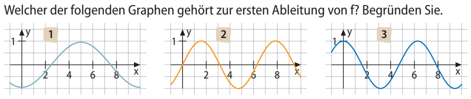
Aufgabe 4

Warm up

A Leiten Sie die Funktionen ab.
a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x-1)$ b) $f(x) = (\sin(x))^2 - 3\cos(2x)$

B Bestimmen Sie Amplitude und Periode und skizzieren Sie den Graphen.
a) $f(x) = 2\sin(2(x-2))$ b) $f(x) = -\cos(-x) - 1$

4 Am Elbufer wird täglich der Wasserstand gemessen. Durch Ebbe und Flut entsteht eine wellenförmige Kurve, wenn man die Werte in einem Koordinatensystem veranschaulicht. Die Messwerte können durch folgende Funktionsgleichung wiedergegeben werden:
$f(t) = 1{,}5\sin\left(\frac{\pi}{5}(t-5)\right) + 1{,}5$ (t in h, f(t) in m).
a) Geben Sie den Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$ an.
b) Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen.
c) Steigt oder fällt der Wasserstand zum Zeitpunkt $t = 0$? Begründen Sie Ihre Antwort.
d) Welcher der folgenden Graphen gehört zur ersten Ableitung von f? Begründen Sie.



e) Berechnen Sie: Wann erreicht der Wasserstand sein Maximum, wann sein Minimum? Wie hoch ist das Wasser dann jeweils? Wie groß ist der Tidenhub, also der Unterschied zwischen dem Scheitelpegel (Flut) und dem untersten Pegelstand (Ebbe)?

Reflexion

Wie sehen typische Klausuraufgaben aus?
- Zuordnen von Termen und Graphen
- Aufstellen eines Terms zu einer gegebenen Sachsituation, Sachsituationen modellieren
- Ableitungen im Sachzusammenhang interpretieren (z. B. als Steigung) und Ableitungen berechnen (dabei Ableitungsregeln anwenden)
- Signifikante Punkte eines Graphen (Nullstellen, Extremstellen) berechnen, Graphen auf Monotonie untersuchen
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung erkennen, diese begründen und Graphen als Ableitungsgraphen identifizieren
- Graphen auf Symmetrie untersuchen, speziell auch die ganzrationaler Funktionen

Typische Aufgabenteile für den Warm up:
- Lösen von linearen, quadratischen, Bruch-, Wurzel- und Potenzgleichungen
- Extrema quadratischer Funktionen mit und ohne Ableitung bestimmen
- Faktorisieren von Summen und Differenzen
- Aussagen treffen über die Parameter von Funktionen
- Ganzrationale Funktionen auf Symmetrie, Monotoniebereiche und Extrema untersuchen und ihre Graphen skizzieren
- bei trigonometrischen Funktionen Amplitude und Periode bestimmen und die Funktionen ableiten

Reflexion: typische Inhalte von Klausuraufgaben

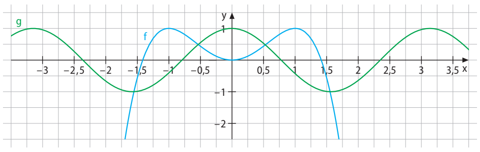
Abiturvorbereitung: passgenau für die Anforderung des mündlichen Abiturs

Muster für mündliche Abituraufgaben

Abiturvorbereitung — Alte und neue Ableitungsregeln

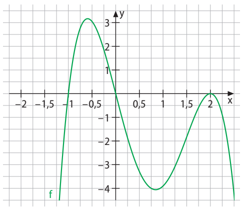
Im Folgenden finden Sie Aufgaben, wie sie zu diesem Kapitel passend in einer mündlichen Abiturprüfung gestellt werden können.

1 Die Abbildung zeigt die Graphen einer ganzrationalen Funktion f und einer trigonometrischen Funktion g.



a) Ordnen Sie die Funktionen f und g den abgebildeten Graphen zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.
b) Geben Sie für einen der abgebildeten Graphen einen möglichen Funktionsterm an. Erklären Sie, wie Sie dabei vorgegangen sind.
c) Entscheiden Sie begründet, welcher der angegebenen Terme zum Graphen der trigonometrischen Funktion passt.
$f_1(x) = \sin(x)$ $f_2(x) = \cos(x)$ $f_3(x) = \sin(x + \pi)$ $f_4(x) = \cos(x - \pi)$
d) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf des Produkts der beiden Funktionen f und g sowie den von dessen Ableitungsfunktion.
e) Leiten Sie die ganzrationale Funktion k mit $k(x) = x^3 \cdot (x^2 - 4)$ auf zwei verschiedene Arten ab. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie jeweils benutzt haben.
f) Erläutern Sie für eine der benutzten Ableitungsregeln, wie man sie plausibel machen oder herleiten kann.
g) Geben Sie möglichst viele Vorgehensweisen an, wie man die Nullstellen der ganzrationalen Funktion k (auch näherungsweise) bestimmen kann.

2 Gegeben ist der Ausschnitt des Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer ganzrationalen Funktion f.
a) Wodurch unterscheiden sich die drei gegebenen Nullstellen? Worin äußert sich dies im Term von f′?
…r gege-
…alen
…öglichen
…r Null-
…von f.
…everhalten von f.
…n f.
…′, welchen f?
…nktionsterm für f auf.

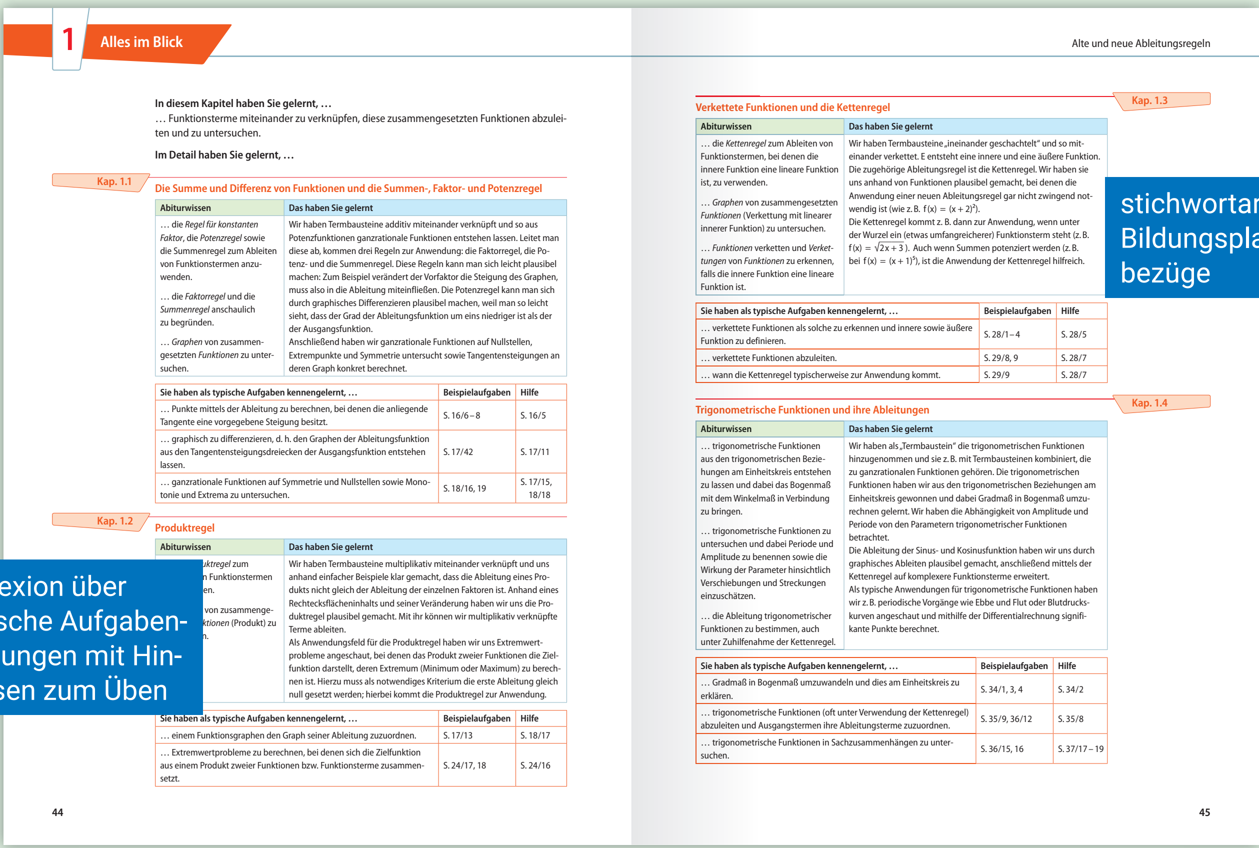


Reflexion

Fragen, die im Laufe eines mündlichen Abiturs gestellt werden könnten	Hilfe
Beschreiben Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Ableitungsfunktion den Graphen der Funktion rekonstruieren können.	
Was sagt die Ableitung an einer Stelle des Graphen einer Funktion aus?	
Beschreiben Sie Anwendungskontexte, in denen das Bestimmen der Ableitung eine Rolle spielt.	
Beschreiben Sie, wie man das Extremum einer ganzrationalen Funktion zweiten Grades mit und ohne das Bestimmen einer Ableitung finden kann. Führen Sie beide Verfahren an einem konkreten Funktionsterm durch.	
Beschreiben Sie an einem konkreten Beispiel, was man unter der Verkettung einer Funktion versteht.	
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Produktregel ableiten kann, bei dem man die Produktregel aber auch umgehen könnte.	
Führen Sie ein Beispiel für einen Funktionsterm an, den man mit der Kettenregel ableiten kann, bei dem man die Kettenregel aber auch umgehen könnte.	
Erläutern Sie an einem konkreten Funktionsterm, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich dem Produkt der Ableitungen der Faktoren ist.	
Machen Sie die Faktorregel für Ableitungen an einem konkreten Beispiel plausibel. Warum bleibt der Vorfaktor bei der Ableitung erhalten?	
Warum fällt das absolute Glied, also der Teil eines Terms, der mit keinem x verknüpft ist, beim Ableiten weg?	
Beschreiben Sie ein (Näherungs-)Verfahren, mit dem Sie die Nullstellen einer Funktion ermitteln können.	Horizonte
Beschreiben Sie, wie man die Ableitung einer Funktion an einer Stelle ohne Ableitungsregeln ermitteln kann. Benutzen Sie dabei auch die Begriffe Differenzenquotient und Differentialquotient sowie Sekanten- und Tangentensteigung. Inwiefern spielt der Grenzwert in diesem Kontext eine Rolle?	
Beschreiben Sie an einem selbstgewählten Beispiel, wie man Graphen ganzrationaler Funktionen auf Symmetrie untersuchen kann.	
Welche Arten von Symmetrie kennen Sie? Beschreiben Sie ein Kriterium, mit dem Sie eine beliebige Funktion anhand ihres Terms auf Symmetrie untersuchen können.	
Was versteht man unter einer ganzrationalen Funktion und wodurch unterscheidet sie sich von Potenzfunktionen?	
Wie lautet der Monotoniesatz für Funktionen? Gilt auch seine Umkehrung? Reflektieren Sie über die Umkehrbarkeit von Sätzen. Geben Sie Beispiele für umkehrbare und für nicht umkehrbare Sätze an.	
Nennen Sie die beiden hinreichenden Kriterien für Extremstellen. Wodurch unterscheiden Sie sich vom notwendigen Kriterium? Sind beide hinreichenden Kriterien gleich mächtige Werkzeuge, oder kann eines der beiden Kriterien mehr als das andere?	

Reflexion:
typische Fragen im mündlichen Abitur

Überblick über die erworbenen Kenntnisse und Kompetenzen



1 Alles im Blick

In diesem Kapitel haben Sie gelernt, …
… Funktionsterme miteinander zu verknüpfen, diese zusammengesetzten Funktionen abzuleiten und zu untersuchen.

Im Detail haben Sie gelernt, …

Kap. 1.1 – Die Summe und Differenz von Funktionen und die Summen-, Faktor- und Potenzregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die *Regel für konstanten Faktor*, die *Potenzregel* sowie die Summenregel zum Ableiten von Funktionstermen anzuwenden. … die *Faktorregel* und die *Summenregel* anschaulich zu begründen. … *Graphen* von zusammengesetzten *Funktionen* zu untersuchen.	Wir haben Termbausteine additiv miteinander verknüpft und so aus Potenzfunktionen ganzrationale Funktionen entstehen lassen. Leitet man diese ab, kommen drei Regeln zur Anwendung: die Faktorregel, die Potenz- und die Summenregel. Diese Regeln kann man sich leicht plausibel machen: Zum Beispiel verändert der Vorfaktor die Steigung des Graphen, muss also in die Ableitung miteinfließen. Die Potenzregel kann man sich durch graphisches Differenzieren plausibel machen, weil man so leicht sieht, dass der Grad der Ableitungsfunktion um eins niedriger ist als der der Ausgangsfunktion. Anschließend haben wir ganzrationale Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Symmetrie untersucht sowie Tangentensteigungen an deren Graph konkret berechnet.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Punkte mittels der Ableitung zu berechnen, bei denen die anliegende Tangente eine vorgegebene Steigung besitzt.	S. 16/6–8	S. 16/5
… graphisch zu differenzieren, d. h. den Graphen der Ableitungsfunktion aus den Tangentensteigungsdreiecken der Ausgangsfunktion entstehen lassen.	S. 17/42	S. 17/11
… ganzrationale Funktionen auf Symmetrie und Nullstellen sowie Monotonie und Extrema zu untersuchen.	S. 18/16, 19	S. 17/15, 18/18

Kap. 1.2 – Produktregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… *uktregel* zum … n Funktionstermen … en. … von zusammenge- … *ktionen* (Produkt) zu … n.	Wir haben Termbausteine multiplikativ miteinander verknüpft und uns anhand einfacher Beispiele klar gemacht, dass die Ableitung eines Produkts nicht gleich der Ableitung der einzelnen Faktoren ist. Anhand eines Rechtecksflächeninhalts und seiner Veränderung haben wir die Produktregel plausibel gemacht. Mit ihr können wir multiplikativ verknüpfte Terme ableiten. Als Anwendungsfeld für die Produktregel haben wir uns Extremwertprobleme angeschaut, bei denen das Produkt zweier Funktionen die Zielfunktion darstellt, deren Extremum (Minimum oder Maximum) zu berechnen ist. Hierzu muss als notwendiges Kriterium die erste Ableitung gleich null gesetzt werden; hierbei kommt die Produktregel zur Anwendung.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… einem Funktionsgraphen den Graph seiner Ableitung zuzuordnen.	S. 17/13	S. 18/17
… Extremwertprobleme zu berechnen, bei denen sich die Zielfunktion aus einem Produkt zweier Funktionen bzw. Funktionsterme zusammensetzt.	S. 24/17, 18	S. 24/16

44

Alte und neue Ableitungsregeln

Kap. 1.3 – Verkettete Funktionen und die Kettenregel

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… die *Kettenregel* zum Ableiten von Funktionstermen, bei denen die innere Funktion eine lineare Funktion ist, zu verwenden. … *Graphen* von zusammengesetzten *Funktionen* (Verkettung mit linearer innerer Funktion) zu untersuchen. … *Funktionen* verketten und *Verkettungen* von *Funktionen* zu erkennen, falls die innere Funktion eine lineare Funktion ist.	Wir haben Termbausteine „ineinander geschachtelt" und so miteinander verkettet. E entsteht eine innere und eine äußere Funktion. Die zugehörige Ableitungsregel ist die Kettenregel. Wir haben sie uns anhand von Funktionen plausibel gemacht, bei denen die Anwendung einer neuen Ableitungsregel gar nicht zwingend notwendig ist (wie z. B. $f(x) = (x+2)^2$). Die Kettenregel kommt z. B. dann zur Anwendung, wenn unter der Wurzel ein (etwas umfangreicherer) Funktionsterm steht (z. B. $f(x) = \sqrt{2x+3}$). Auch wenn Summen potenziert werden (z. B. bei $f(x) = (x+1)^5$), ist die Anwendung der Kettenregel hilfreich.

Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… verkettete Funktionen als solche zu erkennen und innere sowie äußere Funktion zu definieren.	S. 28/1–4	S. 28/5
… verkettete Funktionen abzuleiten.	S. 29/8, 9	S. 28/7
… wann die Kettenregel typischerweise zur Anwendung kommt.	S. 29/9	S. 28/7

Kap. 1.4 – Trigonometrische Funktionen und ihre Ableitungen

Abiturwissen	Das haben Sie gelernt
… trigonometrische Funktionen aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis entstehen zu lassen und dabei das Bogenmaß mit dem Winkelmaß in Verbindung zu bringen. … trigonometrische Funktionen zu untersuchen und dabei Periode und Amplitude zu benennen sowie die Wirkung der Parameter hinsichtlich Verschiebungen und Streckungen einzuschätzen. … die Ableitung trigonometrischer Funktionen zu bestimmen, auch unter Zuhilfenahme der Kettenregel.	Wir haben als „Termbaustein" die trigonometrischen Funktionen hinzugenommen und sie z. B. mit Termbausteinen kombiniert, die zu ganzrationalen Funktionen gehören. Die trigonometrischen Funktionen haben wir aus den trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis gewonnen und dabei Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen gelernt. Wir haben die Abhängigkeit von Amplitude und Periode von den Parametern trigonometrischer Funktionen betrachtet. Die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion haben wir uns durch graphisches Ableiten plausibel gemacht, anschließend mittels der Kettenregel auf komplexere Funktionsterme erweitert. Als typische Anwendungen für trigonometrische Funktionen haben wir z. B. periodische Vorgänge wie Ebbe und Flut oder Blutdruckkurven angeschaut und mithilfe der Differentialrechnung signifikante Punkte berechnet.

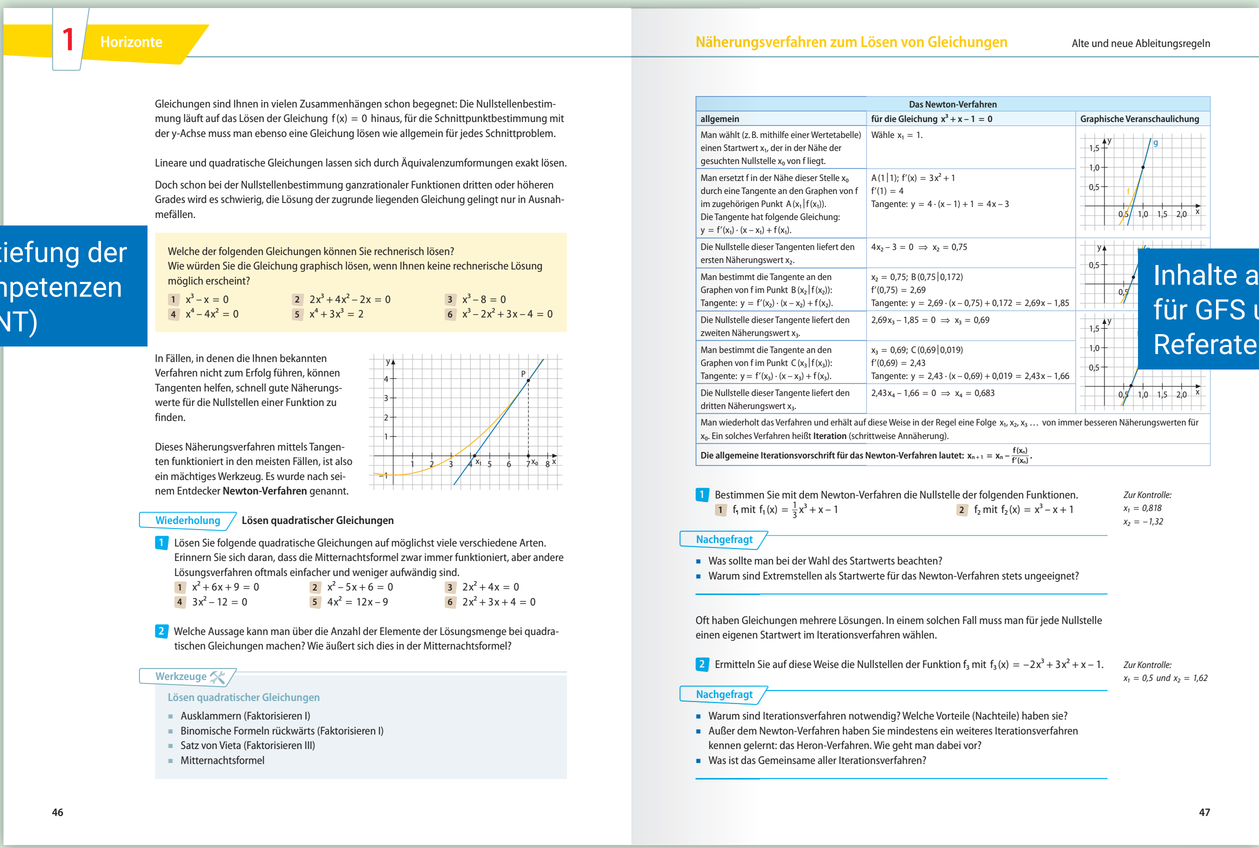
Sie haben als typische Aufgaben kennengelernt, …	Beispielaufgaben	Hilfe
… Gradmaß in Bogenmaß umzuwandeln und dies am Einheitskreis zu erklären.	S. 34/1, 3, 4	S. 34/2
… trigonometrische Funktionen (oft unter Verwendung der Kettenregel) abzuleiten und Ausgangstermen ihre Ableitungsterme zuzuordnen.	S. 35/9, 36/12	S. 35/8
… trigonometrische Funktionen in Sachzusammenhängen zu untersuchen.	S. 36/15, 16	S. 37/17–19

45

stichwortartige Bildungsplanbezüge

Reflexion über typische Aufgabenstellungen mit Hinweisen zum Üben

Vertiefung der Kompetenzen (MINT)



1 Horizonte

Gleichungen sind Ihnen in vielen Zusammenhängen schon begegnet: Die Nullstellenbestimmung läuft auf das Lösen der Gleichung $f(x) = 0$ hinaus, für die Schnittpunktbestimmung mit der y-Achse muss man ebenso eine Gleichung lösen wie allgemein für jedes Schnittproblem.

Lineare und quadratische Gleichungen lassen sich durch Äquivalenzumformungen exakt lösen.

Doch schon bei der Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen dritten oder höheren Grades wird es schwierig, die Lösung der zugrunde liegenden Gleichung gelingt nur in Ausnahmefällen.

Welche der folgenden Gleichungen können Sie rechnerisch lösen?
Wie würden Sie die Gleichung graphisch lösen, wenn Ihnen keine rechnerische Lösung möglich erscheint?

1 $x^3 - x = 0$ 2 $2x^3 + 4x^2 - 2x = 0$ 3 $x^3 - 8 = 0$
4 $x^4 - 4x^2 = 0$ 5 $x^4 + 3x^3 = 2$ 6 $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$

In Fällen, in denen die Ihnen bekannten Verfahren nicht zum Erfolg führen, können Tangenten helfen, schnell gute Näherungswerte für die Nullstellen einer Funktion zu finden.

Dieses Näherungsverfahren mittels Tangenten funktioniert in den meisten Fällen, ist also ein mächtiges Werkzeug. Es wurde nach seinem Entdecker **Newton-Verfahren** genannt.

Wiederholung – Lösen quadratischer Gleichungen

1 Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen auf möglichst viele verschiedene Arten. Erinnern Sie sich daran, dass die Mitternachtsformel zwar immer funktioniert, aber andere Lösungsverfahren oftmals einfacher und weniger aufwändig sind.
1 $x^2 + 6x + 9 = 0$ 2 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 3 $2x^2 + 4x = 0$
4 $3x^2 - 12 = 0$ 5 $4x^2 = 12x - 9$ 6 $2x^2 + 3x + 4 = 0$

2 Welche Aussage kann man über die Anzahl der Elemente der Lösungsmenge bei quadratischen Gleichungen machen? Wie äußert sich dies in der Mitternachtsformel?

Werkzeuge – Lösen quadratischer Gleichungen
- Ausklammern (Faktorisieren I)
- Binomische Formeln rückwärts (Faktorisieren I)
- Satz von Vieta (Faktorisieren III)
- Mitternachtsformel

46

Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen – Alte und neue Ableitungsregeln

Das Newton-Verfahren

allgemein	für die Gleichung $x^3 + x - 1 = 0$
Man wählt (z. B. mithilfe einer Wertetabelle) einen Startwert x_1, der in der Nähe der gesuchten Nullstelle x_0 von f liegt.	Wähle $x_1 = 1$.
Man ersetzt f in der Nähe dieser Stelle x_0 durch eine Tangente an den Graphen von f im zugehörigen Punkt $A(x_1 \mid f(x_1))$. Die Tangente hat folgende Gleichung: $y = f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f(x_1)$.	$A(1 \mid 1)$; $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f'(1) = 4$; Tangente: $y = 4 \cdot (x - 1) + 1 = 4x - 3$
Die Nullstelle dieser Tangenten liefert den ersten Näherungswert x_2.	$4x_2 - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0{,}75$
Man bestimmt die Tangente an den Graphen von f im Punkt $B(x_2 \mid f(x_2))$: Tangente: $y = f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f(x_2)$.	$x_2 = 0{,}75$; $B(0{,}75 \mid 0{,}172)$; $f'(0{,}75) = 2{,}69$; Tangente: $y = 2{,}69 \cdot (x - 0{,}75) + 0{,}172 = 2{,}69x - 1{,}85$
Die Nullstelle dieser Tangente liefert den zweiten Näherungswert x_3.	$2{,}69x_3 - 1{,}85 = 0 \Rightarrow x_3 = 0{,}69$
Man bestimmt die Tangente an den Graphen von f im Punkt $C(x_3 \mid f(x_3))$: Tangente: $y = f'(x_3) \cdot (x - x_3) + f(x_3)$.	$x_3 = 0{,}69$; $C(0{,}69 \mid 0{,}019)$; $f'(0{,}69) = 2{,}43$; Tangente: $y = 2{,}43 \cdot (x - 0{,}69) + 0{,}019 = 2{,}43x - 1{,}66$
Die Nullstelle dieser Tangente liefert den dritten Näherungswert x_4.	$2{,}43x_4 - 1{,}66 = 0 \Rightarrow x_4 = 0{,}683$

Man wiederholt das Verfahren und erhält auf diese Weise in der Regel eine Folge $x_1, x_2, x_3 \ldots$ von immer besseren Näherungswerten für x_0. Ein solches Verfahren heißt **Iteration** (schrittweise Annäherung).

Die allgemeine Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

1 Bestimmen Sie mit dem Newton-Verfahren die Nullstelle der folgenden Funktionen.
1 f_1 mit $f_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + x - 1$ 2 f_2 mit $f_2(x) = x^3 - x + 1$

Zur Kontrolle: $x_1 = 0{,}818$; $x_2 = -1{,}32$

Nachgefragt
- Was sollte man bei der Wahl des Startwerts beachten?
- Warum sind Extremstellen als Startwerte für das Newton-Verfahren stets ungeeignet?

Oft haben Gleichungen mehrere Lösungen. In einem solchen Fall muss man für jede Nullstelle einen eigenen Startwert im Iterationsverfahren wählen.

2 Ermitteln Sie auf diese Weise die Nullstellen der Funktion f_3 mit $f_3(x) = -2x^3 + 3x^2 + x - 1$.

Zur Kontrolle: $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 1{,}62$

Nachgefragt
- Warum sind Iterationsverfahren notwendig? Welche Vorteile (Nachteile) haben sie?
- Außer dem Newton-Verfahren haben Sie mindestens ein weiteres Iterationsverfahren kennen gelernt: das Heron-Verfahren. Wie geht man dabei vor?
- Was ist das Gemeinsame aller Iterationsverfahren?

47

Vertiefung der Kompetenzen (MINT)

Inhalte auch für GFS und Referate