Die Lösungen zum Grundwissen findest du im Anhang.

Mit rationalen Zahlen rechnen

1 Berechne ohne Taschenrechner.

a) $(+86) - (-44) =$
$(-112) - (+36) =$
$(-250) + (-185) =$

b) $(+2{,}4) - (+3{,}6) =$
$(-4{,}8) + (-1{,}9) =$
$(+3{,}9) + (+12{,}1) =$

c) $\left(+\frac{4}{5}\right) + \left(-1\frac{2}{5}\right) =$
$\left(-2\frac{3}{4}\right) - \left(-1\frac{1}{4}\right) =$
$\left(-3\frac{5}{6}\right) + (-2) =$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{9}\right) =$
$\left(+\frac{3}{10}\right) - \left(+\frac{7}{50}\right) =$
$\left(-1\frac{1}{6}\right) - \left(-2\frac{4}{15}\right) =$

2 Berechne vorteilhaft ohne Taschenrechner.

a) $20 \cdot (-6) =$
$-50 \cdot (+0{,}5) =$
$-1{,}5 \cdot (-22) =$
$-30 \cdot 2{,}6 =$

b) $-\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) =$
$\frac{5}{8} \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) =$
$-\frac{3}{4} \cdot 8 =$
$4\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} =$

c) $-144 : (-12) =$
$143 : (+13) =$
$(-195) : (+15) =$
$198 : (-11) =$

d) $15 : (-2{,}5) =$
$-9{,}6 : (+1{,}2) =$
$-8{,}75 : (-1{,}25) =$
$(+3{,}5) : (-0{,}05) =$

3 Berechne ohne Taschenrechner.

a) $\frac{3}{2} : \left(\frac{5}{6} - \frac{5}{9}\right)$

b) $\left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}\right)^2 : \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{6}\right)$

c) $13 : (0{,}75 \cdot 6 - 2)$

d) $3{,}75 - 0{,}345 : 0{,}15$

4 Berechne ohne Taschenrechner. Nutze Rechengesetze.

a) $(-5) \cdot 3{,}5 + (-5) \cdot 4{,}5 =$

b) $36{,}7 + (-12{,}9) + (-6{,}7) - 5{,}1 =$

c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \left(-\frac{7}{8}\right) + \left(-\frac{5}{12}\right) =$

d) $-22{,}1 \cdot 98 + 5{,}6 \cdot (-98) =$

e) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-14{,}7) - \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot (-14{,}7) =$

f) $0{,}01 \cdot (-27{,}1) + (-15{,}9) \cdot 0{,}01 =$

5 Der Platzwart eines Fußballvereins mäht den Rasen. Nachdem er eine Platzhälfte ganz und ein Drittel der zweiten Hälfte gemäht hat, beginnt es plötzlich zu regnen und er muss aufhören. Welchen Anteil des Fußballplatzes muss er nach der Regenpause noch mähen?

6 Lisa steht auf einem 100 m langen Rollband im Flughafen und legt die Strecke in 20 s zurück. Zu Fuß würde sie 72 s brauchen. Wie lange würde sie gehend auf dem Rollband für 100 m brauchen?

Addition und Subtraktion von Brüchen

Ungleichnamige Brüche werden zunächst **gleichnamig gemacht**. Anschließend werden die **Zähler addiert bzw. subtrahiert**. Der gleichnamige Nenner wird beibehalten.

Beispiel: $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4+3}{10} = \frac{7}{10}$

Multiplikation und Division von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man **Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner** multipliziert.
Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit seinem **Kehrbruch multipliziert**.

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21}$; $\frac{4}{7} : \frac{8}{9} = \frac{4}{7} \cdot \frac{9}{8} = \frac{\cancel{4}^{1} \cdot 9}{7 \cdot \cancel{8}_{2}} = \frac{9}{14}$

Addition und Subtraktion rationaler Zahlen

Bei gleichen Vorzeichen der Summanden werden die Beträge addiert; das gemeinsame Vorzeichen bleibt.

Beispiel: $(-4{,}2) + (-1{,}4) = -5{,}6$

Bei verschiedenen Vorzeichen der Summanden wird der kleinere Betrag vom größeren Betrag subtrahiert; das Ergebnis hat das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.

Beispiel: $(-6{,}3) + (+1{,}7) = -4{,}6$

Die Subtraktion einer rationalen Zahl lässt sich stets durch die Addition ihrer Gegenzahl ersetzen.

Multiplikation und Division rationaler Zahlen

Zwei rationale Zahlen werden multipliziert (dividiert), indem man zunächst deren Beträge multipliziert (dividiert). Haben beide Zahlen dasselbe Vorzeichen, so ist das Ergebnis positiv, andernfalls negativ.

Beispiel: $-2{,}3 \cdot (-1{,}5) = 3{,}45$ $\quad 3{,}45 : (-1{,}5) = 2{,}3$

Rechengesetze in $\mathbb{Q}$ (für alle a, b, c $\in \mathbb{Q}$)

Kommutativgesetz

$a + b = b + a$ $\qquad a \cdot b = b \cdot a$

Beispiel: $(4{,}2) + (-2{,}3) + (3{,}8) = (4{,}2) + (3{,}8) + (-2{,}3)$
$(2{,}5) \cdot (-1{,}8) \cdot (-6) = (2{,}5) \cdot (-6) \cdot (-1{,}8)$

Assoziativgesetz

$a + (b + c) = (a + b) + c$ $\qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Beispiel: $(-0{,}8) + [(2{,}8) + (-1)] = [(-0{,}8) + (2{,}8)] + (-1)$
$\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(+\frac{5}{7}\right)\right] = \left[\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(+\frac{5}{7}\right)$

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = ab + ac$ $\qquad a \cdot (b - c) = ab - ac$

Beispiel: $(-5) \cdot (3 + 8) = (-5) \cdot 3 + (-5) \cdot 8$

Potenzgesetze

7 Vereinfache den Term und berechne seinen Wert.
Es gilt: $a^1 = a$ ($a \in \mathbb{R}$); $a^0 = 1$ ($a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$)

a) $4^3 \cdot 4^0 \cdot 4^{-5} =$ **b)** $(4^{-2} \cdot 4^3) : 4^{-2} =$

c) $(2^{-3} + 2^{-2}) \cdot 2^4 =$ **d)** $1{,}2^4 \cdot (1{,}2^{-3} - 1{,}2^{-4}) =$

e) $(-2)^8 \cdot (-2)^{-4} \cdot (-2)^{-2} =$ **f)** $(2^4 \cdot 2^{-7}) : (2^{-3} \cdot 2^0) =$

8 Vereinfache so weit wie möglich.

a) $\frac{2^{10} \cdot a^5}{(2a^2)^5 \cdot 2^4} =$ **b)** $\frac{(-6)^4 \cdot a^5}{6a^3 \cdot (-6)^2} =$

c) $\frac{3x^5 \cdot 2x^4}{2x^2 \cdot 3x^3} =$ **d)** $\left(\frac{x^4y}{x^2y^3}\right)^{-2} =$

e) $\frac{(5x^2)^3 - (-3)^3 \cdot x^6}{(x^{-1})^2 \cdot (2x^2)^4} =$ **f)** $\frac{25x^2}{5 \cdot x^{-3}} + \frac{30x^4}{6x^{-5}} =$

g) $(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot x^{-3} =$ **h)** $\frac{1}{x-2} + 3 - \frac{1-x}{2-x} =$

1 Werden **Potenzen mit gleicher Basis** multipliziert (dividiert), bleibt die **Basis erhalten.** Der Exponent ist die Summe (Differenz) **der Exponenten.**
Beispiel: $(-3)^5 \cdot (-3)^3 = (-3)^{5+3} = (-3)^8$
$(-3)^5 : (-3)^3 = (-3)^{5-3} = (-3)^2$

2 Werden **Potenzen mit demselben Exponenten** multipliziert (dividiert), dann bleibt der **gemeinsame Exponent erhalten**. Die Basis ist dabei das Produkt (der Quotient) **der einzelnen Basen.**
Beispiel: $(-8)^5 \cdot 2^5 = (-8 \cdot 2)^5 = (-16)^5$
$(-8)^5 : 2^5 = (-8 : 2)^5 = (-4)^5$

3 Wird eine Potenz potenziert, werden die Exponenten multipliziert. Die Basis bleibt erhalten.
Beispiel: $(7^3)^5 = 7^{3 \cdot 5} = 7^{15}$

Rechnen mit Wurzeln

9 Bestimme die Lösungsmenge rechnerisch.

a) $x^2 - 49 = 0$ **b)** $x^2 = 2{,}25$ **c)** $x^2 = 0$

d) $\frac{1}{2}x^2 = 8$ **e)** $x^2 + 1 = 0$ **f)** $49x^2 = 9$

g) $4 - 9x^2 = 0$ **h)** $1 + 36x^2 = 0$ **i)** $25 + 4x^2 = 0$

10 Gib zur angegebenen Lösungsmenge eine reinquadratische Gleichung an.

a) $\mathbb{L} = \{-3; 3\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{-1; 1\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\}$

d) $\mathbb{L} = \{-2{,}5; 2{,}5\}$ **e)** $\mathbb{L} = \varnothing$ **f)** $\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

11 Rechne im Kopf.

a) $\sqrt{25 \cdot 9} =$ **b)** $\sqrt{196 \cdot 16} =$ **c)** $\sqrt{361 \cdot 9} =$

d) $\sqrt{\frac{36}{81}} =$ **e)** $\sqrt{\frac{49}{64}} =$ **f)** $\sqrt{\frac{81 \cdot 16}{121}} =$

12 Vereinfache folgende Terme.

a) $\sqrt{144 \cdot a^3b^2} =$ **b)** $\sqrt{\frac{8a^2}{b^2}} =$

c) $\sqrt{\frac{xy^2}{49}} =$ **d)** $\sqrt{\frac{1}{0{,}81 \cdot x^2y^4}} =$

13 Fasse zusammen.

a) $2 \cdot \sqrt{8} + 3 \cdot \sqrt{8} =$ **b)** $9 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{12} + \sqrt{3} =$

c) $6 \cdot \sqrt{15} - 2 \cdot \sqrt{60} =$ **d)** $7 \cdot \sqrt{63} - 5 \cdot \sqrt{28} =$

14 Setze Ziffern so in die Lücken ein, dass die Rechnungen stimmen.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{50}$ **b)** $\sqrt{\square 9} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{196}$

c) $\sqrt{\square 0} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{1\square\square}$ **d)** $\sqrt{432} : \sqrt{\square} = 6$

Addition und Subtraktion von Wurzeln

Zwei Quadratwurzeln lassen sich im Allgemeinen **nicht** zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen** (Ausnahme: Wurzeln mit gleichen Radikanden).
Beispiel: $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$
$3 + 4 \neq 5$
Bei Summen gilt das **Distributivgesetz**:
$a \cdot \sqrt{c} + b \cdot \sqrt{c} = (a + b) \cdot \sqrt{c}$, $c > 0$
Beispiel: $3 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{2} = (3 + 5) \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot \sqrt{2}$

Multiplikation und Division von Wurzeln

Multiplikation zweier Quadratwurzeln
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ für $a, b \geqq 0$
Beispiel: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9}$

Division zweier Quadratwurzeln
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $a \geqq 0$, $b > 0$
Beispiel: $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$

Lässt sich der Radikand in ein Produkt zerlegen, bei dem ein Faktor eine Quadratzahl ist, dann wird häufig nur **für diesen Teil die Wurzel gezogen**.
Für $b > 0$ gilt: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$
Beispiel: $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{3}$

Potenzen, Wurzeln höherer Ordnung und Logarithmen

15 Übertrage die Tabelle ins Heft und vervollständige die Lücken.

	Potenz	Wurzel	Logarithmus
a)	$2^3 = 8$	◻	◻
b)	$3^4 = 81$	◻	◻
c)	$4^5 = 1024$	◻	◻

	Potenz	Wurzel	Logarithmus
d)	◻	$\sqrt[3]{64} = 4$	◻
e)	◻	$\sqrt[6]{729} = 3$	◻
f)	◻	$\sqrt[9]{512} = 2$	◻

	Potenz	Wurzel	Logarithmus
g)	◻	◻	$\log_3 27 = 3$
h)	◻	◻	$\log_6 1296 = 4$
i)	◻	◻	$\log_8 64 = 2$

16 Bestimme den Wert unter der Wurzel. Schreibe dazu als Potenz und notiere auch die zugehörige Umkehraufgabe.

Beispiel: $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = 3$
Umkehraufgabe: $3^4 = 81$

a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{512}$ c) $\sqrt[5]{3125}$
d) $\sqrt[6]{729}$ e) $\sqrt[7]{128}$ f) $\sqrt[10]{59049}$
g) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ h) $\sqrt[4]{\frac{16}{256}}$ i) $\sqrt[7]{\frac{1}{2187}}$

17 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen.

Beispiel: $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 3$

a) $x^4 = 256$ b) $x^5 = 3125$
c) $x^3 = 343$ d) $x^6 = 0{,}000064$
e) $x^5 = 0{,}00032$ f) $x^7 = 0{,}0000001$
g) $x^8 = \frac{1}{256}$ h) $x^6 = \frac{64}{729}$

18 Berechne mit dem Taschenrechner. Runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Beispiel: $\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$

a) $\log_2 9$ b) $\log_3 25$ c) $\log_7 38$
d) $\log_8 50$ e) $\log_9 127$ f) $\log_{12} 1500$
g) $\log 25$ h) $\log 1750$ i) $\log 82$
j) $\log 0{,}5$ k) $\log 0{,}08$ l) $\log \frac{1}{4}$

Das **Radizieren** ist die Umkehroperation zum Potenzieren, wenn die Basis gesucht wird.
Allgemein:
$a^n = c$ Umkehrung: $a = \sqrt[n]{c}$

Weiterhin gelten folgende Zusammenhänge:
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Beispiel:
$5^4 = 625$
Umkehrung: $5 = \sqrt[4]{625}$ bzw. $5 = 625^{\frac{1}{4}}$

Das **Logarithmieren** ist die Umkehroperation zum Potenzieren, wenn der Exponent gesucht wird.
Der Exponent in der Gleichung $a^n = c$ heißt **Logarithmus von c zur Basis a.**
Allgemein:
$a^n = c$ Umkehrung: $n = \log_a c$

Beispiel:
$5^4 = 625$ Umkehrung: $4 = \log_5 625$

Der **dekadische Logarithmus** oder **Zehnerlogarithmus** hat die Basis 10.
Statt $\log_{10}$ schreibt man oft auch nur log oder kurz: lg

Weiterhin gelten folgende Zusammenhänge:
1 $\log_a c = \frac{\log c}{\log a}$ und
2 $\log_a u^n = n \cdot \log_a u$ bzw. $\log u^n = n \cdot \log u$

Auf deinem **Taschenrechner** findest du folgende Taste für den Logarithmus. Man gibt jeweils nur den Potenzwert ein.

LOG bzw. LG	Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10} x =$ LOG x oder $\log_{10} x =$ LG x

Für die Berechnung beliebiger Logarithmen mit dem Taschenrechner gilt:

$$\log_a c = \frac{\text{LOG } c}{\text{LOG } a}$$

19 Rechne im Kopf. Erkläre Gesetzmäßigkeiten.

a) $\log 10$ | $\log 100$ | $\log 1000$ | $\log 10\,000$

b) $\log \frac{1}{10}$ | $\log \frac{1}{100}$ | $\log \frac{1}{1000}$ | $\log \frac{1}{10\,000}$

c) $\log_2 4$ | $\log_2 8$ | $\log_2 16$ | $\log_2 32$

20 Berechne im Kopf und notiere jeweils die Umkehraufgabe.

Beispiel: $\log_2 8 = 3$, da $2^3 = 8$

a) $\log_3 9$ b) $\log_2 128$ c) $\log_5 125$
d) $\log_6 216$ e) $\log_4 1024$ f) $\log_7 7$
g) $\log_2 \frac{1}{8}$ h) $\log_5 \frac{1}{625}$ i) $\log_7 \frac{1}{49}$

21 Löse die Gleichungen. Notiere bei a) bis f) die zugehörige Potenz.

a) $\log_x 9 = 2$ b) $\log_x 64 = 3$ c) $\log_x 9 = 1$
d) $\log_2 x = 3$ e) $\log_3 x = 2$ f) $\log_7 x = 1$
g) $3^x = \frac{1}{243}$ h) $2^x = \frac{1}{256}$ i) $55 + 7 \cdot 5^x = 90$

Gleichungen, bei denen die Variable im Exponenten auftaucht, können durch **Logarithmieren beider Seiten** gelöst werden.

Wir fassen den Ausdruck $5^x = 625$ als Gleichung auf und wenden auf beiden Seiten den Logarithmus an.

$$\begin{aligned} 5^x &= 625 && \mid \log \\ \log 5^x &= \log 625 && \text{Anwendung von } 2 \\ x \cdot \log 5 &= \log 625 && \mid : \log 5 \\ x &= \frac{\log 625}{\log 5} = 4 \end{aligned}$$

Allgemeine Zusammenhänge:

Exponent
Potenzwert
$a^n = c$ $\log_a c = n$
Basis

Mit Termen rechnen

22 Vereinfache so weit, wie möglich.

a) $9x - (5x + 11) + (7x + 21)$
b) $x - [x + (3 - x) - (x - 3)] + (5 - 3x)$
c) $4x - 8 - [3 + (3{,}3 - 2{,}5x) - (-8{,}7 - 3{,}5x)]$
d) $2 \cdot (x + 0{,}5) + 5 \cdot (x - 5{,}2)$
e) $x \cdot (x + 1) + x^2 - (4 + x) \cdot x$
f) $(x - 3) \cdot (-2) + 5 \cdot (3x + 11)$

23 Die Terme 1 bis 6 sind jeweils äquivalent zur Summe oder Differenz zweier Terme auf den grünen Kärtchen. Ordne zu.

1 $4 + 7x$	2 $12 - 10x$	3 $8x$
4 $20 - x$	5 $40 + 2x$	6 $4 - 2x$
$T_1(x) = 16 + x$	$T_2(x) = 4 + 2x$	$T_3(x) = 8 - 4x$
$T_4(x) = 24 + x$	$T_5(x) = 6x - 4$	$T_6(x) = 12 + 3x$

24 Wie lautet ein gemeinsamer Faktor? Klammere ihn aus und vereinfache.

a) $7x^2 + 21x$ b) $12ab - 36a^2 + 18ab^2$
c) $15x^3 + 12x^2y$ d) $0{,}4klm + 2k^2lm - 1{,}6kl$
e) $0{,}8x^2 + 0{,}4ax - 0{,}2x$ f) $-t^4 - 1{,}2t^2 - 4{,}8t^3s$

1 **Gleiche Summanden** kann man zusammenfassen.
Beispiel: $3xy + 7xz - 7xy + 2xy - 2xz = -2xy + 5xz$

2 Wird eine **Summe (Differenz) addiert**, dann bleiben nach Auflösen der Klammer die Vorzeichen in der Klammer gleich.
Beispiel: $x + (y - z) = x + y - z$

3 Wird eine **Summe (Differenz) subtrahiert**, dann kehren sich nach Auflösen der Klammer die Vorzeichen in der Klammer um.
Beispiel: $x - (y - z) = x - y + z$

4 Wird eine **Summe mit einem Faktor multipliziert**, dann wird **jeder Summand** mit dem Faktor **(aus-) multipliziert**. Die entstandenen Produkte werden mit ihren Vorzeichen addiert.
Beispiel: $x \cdot (y + 12) = x \cdot y + 12x$

5 Kommt in einer **Summe von Produkten** in jedem Summanden **derselbe Faktor** vor, dann kann dieser **ausgeklammert werden**.
Beispiel: $x^2y + 12xy = xy \cdot (x + 12)$

Summenterme und binomische Formeln

25 Berechne das Produkt und vereinfache.

a) $(x - 3) \cdot (x + 1)$ **b)** $(a - b) \cdot (a - 2)$
c) $(-3x + 2) \cdot (x - 4)$ **d)** $(2{,}5y + 7) \cdot (x - y)$
e) $(1{,}2s - 0{,}5) \cdot (1{,}2s - t)$ **f)** $(-0{,}9a + b) \cdot (a - 6)$

26 Multipliziere die Klammern aus. Nutze die binomischen Formeln.

a) $(x - 1{,}5)^2$ **b)** $(8x + 2y)\,(8x - 2y)$
c) $3 \cdot (3 + h)^2$ **d)** $(2x + 6)^2$
e) $-(9y - 5x)^2$ **f)** $\frac{3}{4} \cdot (0{,}5a - 0{,}25b)^2$

27 Faktorisiere.

a) $a^2 - 4ab + 4b^2$ **b)** $9 + 16z^2 + 24z$
c) $6{,}25 - 4y^2$ **d)** $-1 - 4r - 4r^2$
e) $1{,}44x^2 - 0{,}64a^2$ **f)** $289y^2 - 4$

Beim **Multiplizieren von Summentermen** muss **jeder Summand** der ersten Klammer **mit jedem Summanden** der zweiten Klammer **multipliziert** werden.
Beispiel:

$(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$

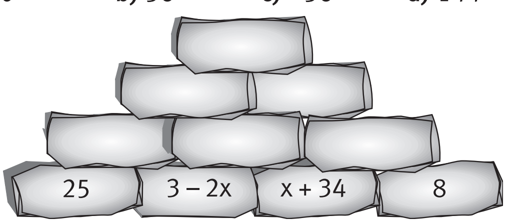
Mithilfe der **binomischen Formeln** lassen sich bestimmte Terme umformen.

1 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Lineare Gleichungen

28 Übertrage die Additionsmauer in dein Heft. Bestimme den Term im obersten Stein. Finde heraus, für welchen Wert x steht, wenn das Ergebnis auf dem oberen Stein …

a) 0 **b)** 36 **c)** −36 **d)** 144 ist.



29 Gib jeweils die Lösungsmenge an.

a) $12x - 1 = 2 \cdot (5x + 8)$ $\mathbb{G} = \mathbb{N}$
b) $-2{,}5 + 4x = 4 - (x - 2{,}5 + 4x)$ $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$
c) $-z \cdot (2 - z) = (2 - z)^2$ $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$
d) $(2x + 3)^2 = 4x \cdot (x + 6)$ $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

30 Finde die gesuchte Zahl.

a) Subtrahiert man vom Achtfachen einer natürlichen Zahl die Zahl 56, so erhält man 128.
b) Welche ganze Zahl ist um 162 größer als das Achtfache ihrer Gegenzahl?
c) Der Summenwert von fünf aufeinanderfolgenden Vielfachen von 5 ist 600. Bestimme die kleinste dieser Zahlen.

Gleichungen, die die Variable in der ersten Potenz enthalten, heißen **lineare Gleichungen**.
Die **Grundmenge** $\mathbb{G}$ gibt an, welche Zahlen für die Variable eingesetzt werden dürfen.
Die **Lösungsmenge** $\mathbb{L}$ gibt die Zahlen aus $\mathbb{G}$ an, die man für die Variable einsetzen kann, damit eine wahre Aussage entsteht.

Gleichungen kann man auch durch **Äquivalenzumformungen** lösen. Es gilt:

- Man **addiert** (**subtrahiert**) auf beiden Seiten der Gleichung die **gleiche Zahl** oder den **gleichen Term**.
- Man **multipliziert** (**dividiert**) auf beiden Seiten die **gleiche Zahl** (die nicht null sein darf).

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
4 \cdot (2 + x) - x &= -1 && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
8 + 4x - x &= -1 && \mid \text{zusammenfassen}\\
8 + 3x &= -1 && \mid -8\\
3x &= -9 && \mid :3\\
x &= -3\\
\mathbb{L} &= \{-3\}
\end{aligned}
$$

Lineare Gleichungssysteme

31 Ermittle graphisch die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

a) I $2x - y = 2$
II $-x + y = 1$

b) I $2y - x = -3$
II $2x + y = 6$

c) I $3x + 2y = 5$
II $3y = -x - 3$

d) I $6y - 2x = +3$
II $3y - x = -3$

e) I $y - 0{,}5x = 1{,}5$
II $2y - x = 3$

f) I $y - 2x - 3 = 0$
II $x = 0{,}5y + 1{,}5$

32 Bestimme die Lösungsmenge rechnerisch mit einem Verfahren deiner Wahl.

a) I $x = y + 5$
II $x + y = 29$

b) I $2x - 5y = 31$
II $2x = 16 - 10y$

c) I $5y + 32 = 4x$
II $12x - 6y = 42$

d) I $2x + 4y = 10$
II $0{,}5x = 8 - y$

e) I $x - 2y = 6$
II $y + 1 = 0{,}5x - 2$

f) I $22y - 6x + 15 = 0$
II $x = \frac{2}{3}y + 7$

33 Die Nachmittagsvorstellung eines Wanderzirkus (300 Plätze) war zur Hälfte ausverkauft. Finde mithilfe des abgebildeten Preisschilds heraus, wie viele Erwachsene und wie viele Kinder diese Vorstellung besucht haben, wenn die Einnahmen für diese Vorstellung 1 325 € betrugen. Wie hätten sich die Einnahmen an diesem Nachmittag geändert, wenn anstelle jedes erwachsenen Besuchers ein Kind und anstelle jedes Kinds ein Erwachsener gekommen wäre?

34 In einem rechtwinkligen Dreieck stehen die Längen der Katheten im Verhältnis 3 : 1. Verlängert man beide Katheten um jeweils 2 cm, dann nimmt der Flächeninhalt um 10 cm^2 zu. Wie lang sind die Katheten?

35 Die Notenverteilung einer Schulaufgabe der 10. Klasse mit 28 Schülern ist unvollständig.

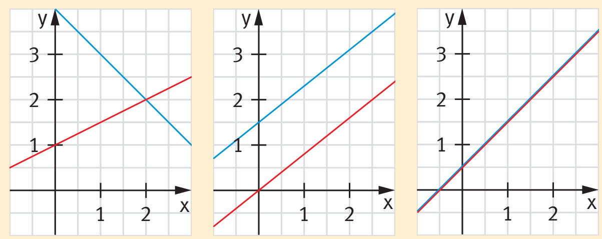
Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	6		7		0

Bestimme die fehlenden Anzahlen, wenn der Notendurchschnitt 3,25 beträgt.

Sollen Zahlenpaare (x | y) **zwei lineare Gleichungen gleichzeitig erfüllen**, so spricht man von einem **linearen Gleichungssystem**.

Es gibt drei Fälle:

1 genau eine Lösung
2 keine Lösung
3 unendlich viele Lösungen



Rechnerische Verfahren:

Einsetzungsverfahren
Löst man eine der Gleichungen nach einer Variable (z. B. y) auf, dann kann man diesen Term in die andere Gleichung einsetzen.

Beispiel: I $-x - 2y = 3$
II $y = 2x$
$-x - 2 \cdot (2x) = 3$
...

Gleichsetzungsverfahren
Löst man beide Gleichungen nach einer Variable (z. B. y) auf, dann kann man die Terme gleichsetzen.

Beispiel: I $y = 2x - 1$
II $y = -x + 5$ gleichsetzen
$2x - 1 = -x + 5$
...

Additionsverfahren
Man addiert beide Gleichungen, wenn vor einer Variable betragsgleiche Koeffizienten stehen, die ein unterschiedliches Vorzeichen haben.

Beispiel: I $2x - 2y = -5$
II $4x + 2y = -7$
I + II
$6x = -12 \quad | : 6$
...

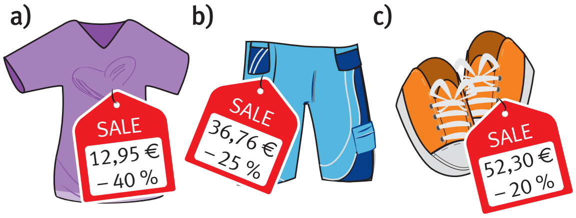
Prozentrechnung

36 Barbara hat sich eine Skijacke gekauft und dabei 30 € gespart. Der Händler hat 15 % Nachlass gewährt. Berechne den ursprünglichen Preis der Jacke.

37 Beim Kauf eines Fahrrades wurden 30 % Anzahlung geleistet. Berechne den Kaufpreis, wenn die Anzahlung 126 € beträgt.

38 Sandra geht mit ihrer Mutter einkaufen. Im Laden sind einige Produkte mit Rabattschildern versehen. Berechne, wie viel Sandra für ihr neues Outfit insgesamt noch bezahlen muss.

a) b) c)



39 Eine Schokoladentafel der Firma „Zuckersüß" kostet 0,89 €. Der Händler möchte den Preis um 15 % erhöhen. Damit der Käufer die Erhöhung nicht direkt bemerkt, beschließt er, den Preis zunächst um 8 % zu erhöhen.
Einige Wochen später steigt der dann aktuelle Preis nochmals um 7 %. Untersuche, ob sich damit der ursprüngliche Preis um insgesamt 15 % erhöht hat.

40 Bei einer Sonnenblume hat man folgendes Wachstum beobachtet:

Alter in Tagen	5	10	15	20	25	30	35
Höhe in cm	16	24	38	55	80	82	82

a) Wie viel Prozent der vollen Pflanzenhöhe (82 cm) hat die Sonnenblume an den beobachteten Tagen jeweils erreicht? Runde geeignet.

b) Um wie viel Prozent ist die Pflanze zwischen den beobachteten Tagen jeweils gewachsen? Runde geeignet.

41 Nachdem ein Paar Schuhe zweimal hintereinander um je 25 % ermäßigt wurde, kosten sie jetzt 54 €. Wie teuer waren die Schuhe ursprünglich?

Bei der Prozentrechnung gibt der **Grundwert GW** das Ganze an, der **Prozentwert PW** den Teil vom Ganzen sowie der **Prozentsatz p** die Anzahl der Hundertstel, die dem Prozentwert entsprechen.

Es gilt: $\frac{PW}{p} = \frac{GW}{100}$

Entspricht der Grundwert einem Prozentsatz von **mehr als 100**, so spricht man von einem **vermehrten Grundwert**.

Beispiel: 0,5 l Eistee kosten inkl. 10 % Bedienungsgeld 3,30 €.

	$GW_{vermehrt}$	GW
Preis in €	3,30	☐
Prozentsatz p	100 + 10	100

Preis für Eistee ohne Bedienungsgeld: 100 %	Bedienungsgeld: 10 %
Preis, der zu zahlen ist: 110 %	

$GW_{vermehrt} = 3{,}30\ €$

$GW = \frac{3{,}30\ €}{110} \cdot 100 = 3{,}00\ €$

Preis ohne Bedienungsgeld: 3,00 €

Berechnung mit dem **Wachstumsfaktor**:
$GW = 3{,}30\ € : 1{,}1 = 3{,}00\ €$
Preis ohne Bedienungsgeld: 3,00 €

Entspricht der Grundwert einem Prozentsatz von **weniger als 100**, so spricht man von einem **verminderten Grundwert**.

Beispiel: Der Preis eines Snakeboards wurde um 20 % reduziert. Es kostet jetzt noch 52 €.

	$GW_{vermindert}$	GW
Preis in €	52	☐
Prozentsatz p	100 – 20	100

ursprünglicher Verkaufspreis: 100 %	
Preis, der zu zahlen ist: 80 %	Nachlass: 20 %

$GW_{vermindert} = 52\ €$

$GW = \frac{52\ €}{80} \cdot 100 = 65\ €$

Berechnung mit dem **Wachstumsfaktor**:
$GW = 52\ € : 0{,}8 = 65\ €$
Ursprünglicher Preis: 65 €

Statistische Kennwerte und Häufigkeiten

42 Bestimme das arithmetische Mittel, den Median und den Modalwert der folgenden Datenreihen:

a) 2; 4; 5; 6; 4; 3; 5; 3; 3; 2; 1

b) 5,00 m; 5,20 m; 5,40 m, 5,20 m; 5,24 m

c) 0,1; 0,4; 0,4; 0,2; 0,22; 0,34; 0,1; 0,3

43 Christian misst eine Woche lang, wie viele Minuten er am Tag fernsieht:

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
20	30	25	35	60	180	35

a) Er möchte einen Mittelwert seiner täglichen Fernsehzeit berechnen. Hilf ihm dabei. Welchen Mittelwert würdest du Christian empfehlen? Begründe.

b) Seit neuestem kommt dienstags eine 30-minütige Serie, die Christian gern zusätzlich sehen möchte. Begründe, welche Mittelwerte sich dadurch ändern würden und welche nicht.

c) Christian nimmt sich vor, dass das arithmetische Mittel seiner täglichen Fernsehzeit nur noch 45 Minuten betragen darf. Wie lange dürfte er samstags noch fernsehen, wenn er an den restlichen Tagen genauso lange wie in der Tabelle angegeben schaut?

44 Die Schüler der 10a wurden nach der Anzahl ihrer Geschwister gefragt. Die Tabelle zeigt die Ergebnisse.

Anzahl der Geschwister	0	1	2	3	4
Häufigkeit	6	10	4	2	1

a) Stelle die Daten in einem Kreisdiagramm und einem Balkendiagramm dar. Runde geeignet.

b) Berechne das arithmetische Mittel der Geschwisteranzahl in der Klasse 10a.

c) Begründe, in welchem Diagramm aus a) man das arithmetische Mittel gut darstellen kann.

d) Gib den Median und den Modalwert der Umfrage an. Begründe, wecher Mittelwert die Umfrage besser beschreibt.

Kennwerte, die die Streuung von Daten beschreiben:

Minimum x_{min}: kleinster Datenwert

Maximum x_{max}: größter Datenwert

Spannweite R: Unterschied zwischen Minimum und Maximum

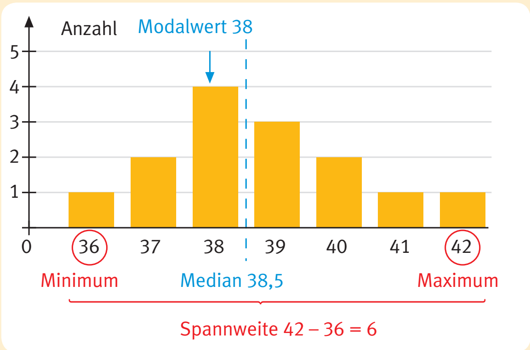
Kennwerte, die Daten durch einen zentralen Wert beschreiben:

Modalwert x_{mod}: häufigster Wert

Median x_{med}: Wert in der Mitte einer geordneten Datenreihe

arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{\text{Summe aller Einzelwerte}}{\text{Anzahl der Einzelwerte}}$

Beispiel:



$$\bar{x} = \frac{36 + 37 + 37 + \ldots + 41 + 42}{14} \approx 38{,}7$$

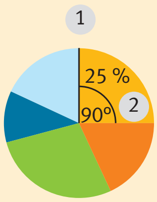
Die **tatsächliche Anzahl**, wie oft ein Ergebnis vorkommt, bezeichnet man als **absolute Häufigkeit H**.

Den Anteil, mit dem ein Ergebnis in Bezug auf die Gesamtanzahl aller Daten vorkommt, nennt man **relative Häufigkeit h**.

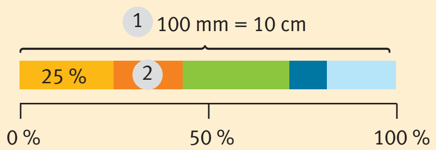
Zur Darstellung absoluter Häufigkeiten verwendet man **Säulen- oder Balkendiagramme**.

Zur Darstellung relativer Häufigkeiten eignen sich **Streifen- oder Kreisdiagramme**.

Kreisdiagramm

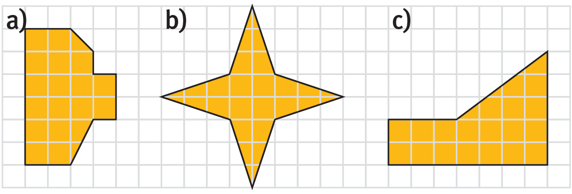


Streifendiagramm

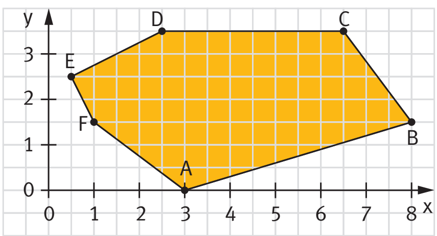


Flächeninhalte von ebenen Figuren

45 Bestimme den Flächeninhalt der Figuren. Übertrage sie zunächst und miss die nötigen Längen.



46



a) Übertrage das Sechseck in dein Heft und bestimme seinen Flächeninhalt.

b) Henriette meint: „Ich zerlege das Sechseck in das Dreieck ABF, das Trapez FBCD und ein rechtwinkliges Dreieck EFD. Von allen Teilflächen kann ich leicht den Flächeninhalt bestimmen.“ Begründe, warum dieses Verfahren geschickt ist, und wende es an.

c) Ergänze das Sechseck zu einem Rechteck und zeige so, dass $A = 17{,}5\ \text{cm}^2$.

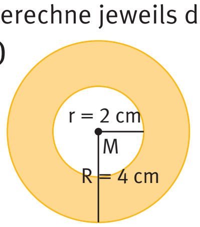
47 a) Ein Kreis hat den Radius $r = 3$ cm. Berechne seinen Flächeninhalt und Umfang.

b) Ein Kreis hat einen Umfang von 14,7 cm, der Radius eines zweiten Kreises ist 3,5 cm groß. Welcher Kreis hat den größeren Flächeninhalt?

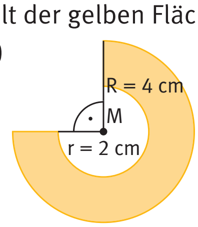
c) Ein Kreis hat den Umfang $u = 36$ cm. Welchen Radius hat ein Kreis mit fünffachem Umfang?

48 Berechne jeweils den Inhalt der gelben Fläche.

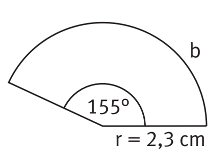
a)



b)



49 Bestimme die Länge des Kreisbogens b und den Flächeninhalt A.



Rechtecke und Quadrate

Für den **Flächeninhalt** eines **Rechtecks** und **Quadrats** gilt:

$u_R = 2 \cdot a + 2 \cdot b$
$A_R = a \cdot b$

$u_Q = 4 \cdot a$
$A_Q = a \cdot a = a^2$

Dreiecke

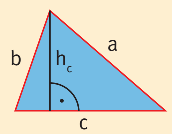
Für den **Flächeninhalt eines Dreiecks** mit der Grundseite g und der dazugehörigen Höhe h gilt:

$A_D = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

hier:

$A_D = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

$u_D = a + b + c$



Parallelogramme

Für den **Flächeninhalt** eines **Parallelogramms** gilt:

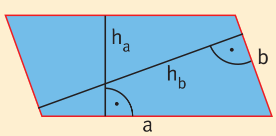
A_P = Grundseite · zugehörige Höhe

$A_P = g \cdot h$

hier:

$A_P = a \cdot h_a$ oder $A_P = b \cdot h_b$

$u_P = 2 \cdot (a + b)$

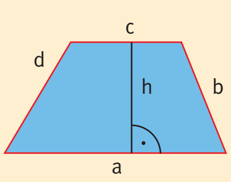


Trapeze

Der **Flächeninhalt eines Trapezes** lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$A_{Tr} = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

$u_{Tr} = a + b + c + d$



Kreise

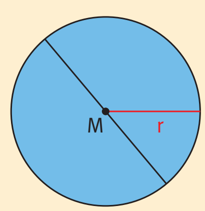
Für den **Flächeninhalt eines Kreises** gilt:

$\mathbf{A = \pi \cdot r^2}$

$\mathbf{u = \pi \cdot d}$

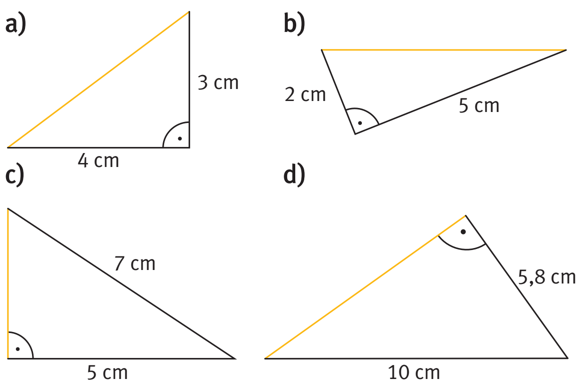
bzw. mit $d = 2r$

$\mathbf{u = 2 \cdot \pi \cdot r}$



Satz des Pythagoras

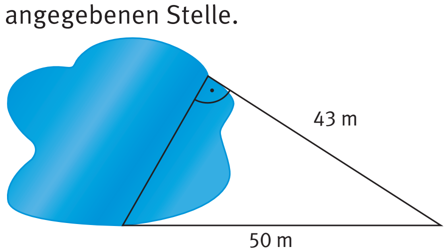
50 Berechne die Längen der gelben Strecken.



51 Übertrage die Tabelle in dein Heft und berechne die fehlenden Werte.

Länge von ...	a)	b)	c)	d)
Kathete 1	12 cm	7 m	8 dm	□
Kathete 2	9 cm	24 cm	□	240 dm
Hypothenuse	□	□	17 dm	26 m

52 Bestimme rechnerisch die Breite des Sees an der angegebenen Stelle.



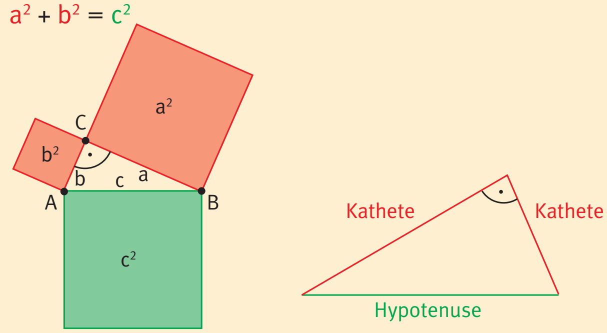
53 Wie lang ist die Raumdiagonale eines Würfels mit der Kantenlänge a = 5 cm? Zeichne zunächst ein Schrägbild dieses Körpers.

Der Satz des Pythagoras in der Ebene

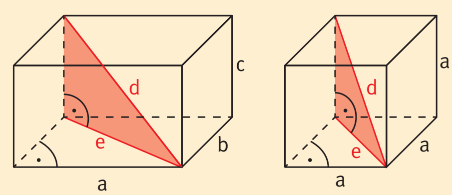
In einem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die Quadrate über den Katheten zusammen.

Allgemein gilt:
$\text{Kathete}^2 + \text{Kathete}^2 = \text{Hypotenuse}^2$

Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt kurz:
$a^2 + b^2 = c^2$



Der Satz des Pythagoras in Körpern



In Quadern:

Flächendiagonale
$e^2 = a^2 + b^2$
$e = \sqrt{a^2 + b^2}$

Raumdiagonale
$d^2 = e^2 + c^2$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Bei Würfeln gilt speziell:
$e = a\sqrt{2}$ $\quad$ $d = a\sqrt{3}$

Satz des Thales

54 Zeichne fünf verschiedene rechtwinklige Dreiecke ABC_1, ABC_2, ... und ABC_5 mit gemeinsamer Hypotenuse $\overline{AB}$ der Länge 8,5 cm.

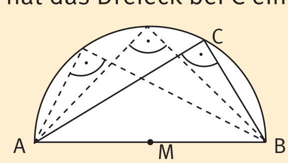
55 Konstruiere jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus den gegebenen Bestimmungsstücken.

a) $a = 5\text{ cm} = b$, $\gamma = 90°$

b) $a = 5\text{ cm}$, $c = 7\text{ cm}$, $\gamma = 90°$

Satz des Thales

Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf einem Halbkreis (**„Thaleskreis“**) über der Strecke $\overline{AB}$ ($C \notin \overline{AB}$), dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.



Zusammenhänge im Dreieck

56 Ermittle die Größen aller Innenwinkel eines Dreiecks ABC. Begründe deine Berechnungen.

a) $\alpha = \beta = \gamma$ **b)** $\gamma = 5 \cdot \alpha$; $\beta = 3 \cdot \alpha$.

57 Konstruiere, wenn möglich, das Dreieck ABC (Planfigur, Zeichnung, Beschreibung). Nenne den verwendeten Kongruenzsatz.

a) a = 5,2 cm; c = 3,8 cm; $\beta = 70°$

b) a = 4,8 cm; b = 6,0 cm; c = 7,0 cm

c) b = 4,3 cm; $\alpha = 57°$; $\gamma = 80°$

d) a = 5,4 cm; $\gamma = 3\alpha$; $\alpha = 2\beta$

Summe der Innenwinkel

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel stets 180°.

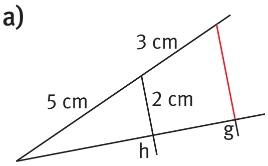
Kongruenzsätze für Dreiecke

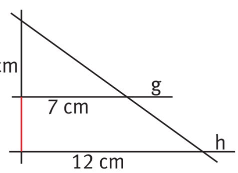
Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie …

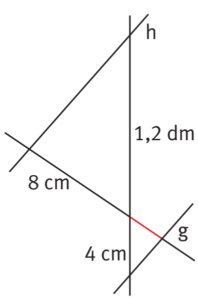
- in der Länge aller Seiten übereinstimmen (**SSS**).
- in der Länge zweier Seiten und dem Maß des eingeschlossenen Winkels übereinstimmen (**SWS**).
- in der Länge einer Seite und dem Maß beider anliegenden Winkel übereinstimmen (**WSW**).

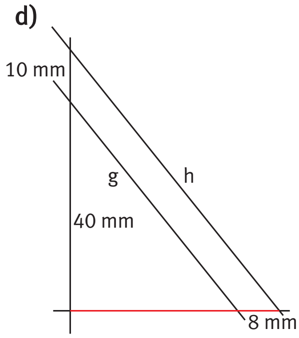
Strahlensätze

58 Bestimme die Länge der rot markierten Strecken (g ∥ h).

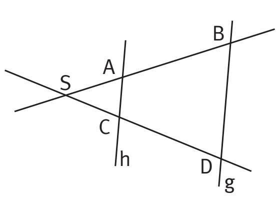
a)


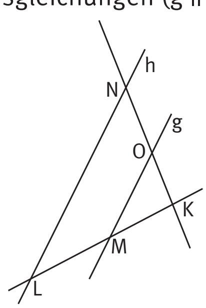
b)


c)


d)


59 Ergänze im Heft die Verhältnisgleichungen (g ∥ h).



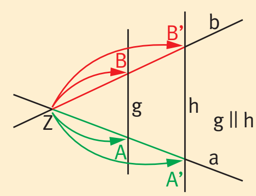


a) $\frac{|SC|}{|SD|} = \frac{|SA|}{\square}$ **b)** $\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{\square}{|BD|}$ **c)** $\frac{|AC|}{|SA|} = \frac{|BD|}{\square}$

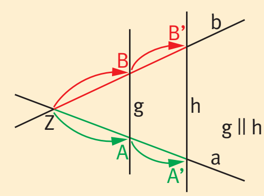
d) $\frac{|LN|}{|NK|} = \frac{\square}{|OK|}$ **e)** $\frac{|LK|}{|NK|} = \frac{|KM|}{\square}$ **f)** $\frac{|OK|}{\square} = \frac{\square}{|NL|}$

Werden zwei sich in Z schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, …

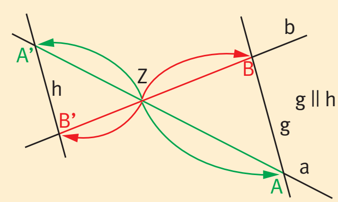
- dann stehen einander entsprechende Streckenabschnitte auf den Geraden durch Z im gleichen Verhältnis **(1. Strahlensatz)**.



$\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}$

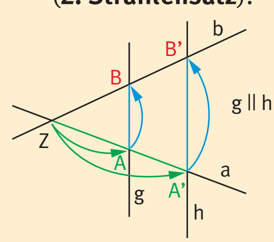


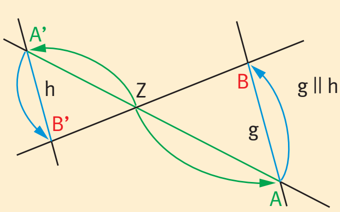
$\frac{|ZA|}{|AA'|} = \frac{|ZB|}{|BB'|}$



$\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|ZB|}{|ZB'|}$

- dann ist das Verhältnis der Streckenabschnitte auf den Parallelen gleich dem zugehörigen Streckenverhältnis auf jeder der Geraden durch Z (**2. Strahlensatz**).





$\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$ $\frac{|ZA|}{|ZA'|} = \frac{|AB|}{|A'B'|}$