

1

Finanzmathematik

EINSTIEG

Nachdem man die Führerscheinprüfung bestanden hat, ist der Wunsch nach einem eigenen Roller oder Motorrad sehr groß. Meistens reicht das ersparte Geld nicht für ein Neufahrzeug aus. Dann hilft eine Finanzierung. Bei einer Finanzierung leiht man sich in der Regel von einer Bank einen bestimmten Geldbetrag. Man spricht von einem Kredit bzw. einem Darlehen. Die Schulden, die man bei der Bank hat, müssen zuzüglich Zinsen innerhalb eines vereinbarten Zeitraums wieder zurückgezahlt werden. Dies geschieht meistens in Form von monatlichen Raten. Die Rückzahlung von Schulden bezeichnet man allgemein auch als Tilgung.

- Berechne für jedes Angebot den Gesamtpreis und vergleiche die Angebote. Welches ist der „teuerste“ Kredit?
- Was passiert, wenn die monatlich zu zahlenden Raten nicht mehr gezahlt werden können? Informiere dich auch im Internet.

Drive and fun

1690 € Kredithöhe
12 Monate Laufzeit
145 € monatliche Rate

Classic

1690 € Kredithöhe
24 Monate Laufzeit
74 € monatliche Rate

Easy and go

1690 € Kredithöhe
36 Monate Laufzeit
51 € monatliche Rate



Drive and fun

3390 € Kredithöhe
24 Monate Laufzeit
150 € monatliche Rate

Classic

3390 € Kredithöhe
36 Monate Laufzeit
101 € monatliche Rate

Easy and go

3390 € Kredithöhe
48 Monate Laufzeit
78 € monatliche Rate



AUSBLICK

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

- in verschiedenen Situationen Aufgaben zur Zinsrechnung zu bearbeiten.
- die Zinseszinsrechnung in verschiedenen Situationen anzuwenden.
- verschiedene Finanzmodelle zu unterscheiden, zu berechnen und anzuwenden.
- unterschiedliche Sparmodelle zu vergleichen.



- 1 Mischa hat bei einem Preisausschreiben den Hauptgewinn erhalten: 1000 € in bar. Diese legt sie bei einer Bank an.
 - 2 Das 15 Jahre alte Auto von Frau Grün ist nicht mehr durch den TÜV gekommen. Zeit für ein neues! Frau Grün nimmt dazu einen Kredit auf.
- Welche kaufmännischen Fachbegriffe bringst du mit diesen beiden Situationen in Verbindung?
 - Wie hängen diese Begriffe mit den Begriffen Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz zusammen?

MERKWISSEN

Die **Zinsrechnung** ist eine Anwendung der Prozentrechnung.

Prozentrechnung	Zinsrechnung
Grundwert GW	Kapital K (auch: Guthaben, Darlehen, Kreditbetrag, ...)
Prozentwert PW	Zinsen Z (auch: Jahreszinsen, Dividende)
Prozentsatz p	Zinssatz p (auch: Verzinsung, Zinsfuß)

In den meisten Fällen wird ein **Jahreszins** vereinbart.

Die Zinsen nach einem Jahr lassen sich somit als Teil vom Ganzen bestimmen:

$$Z = K \cdot \frac{p}{100} \quad \text{Zinsformel für Jahreszinsen}$$

Wird Geld nur einen **Teil des Jahres** angelegt, dann wird auch nur der zugehörige **Anteil der Jahreszinsen Z** berechnet.

Beispiel: Jahreszinsen 120 €

Zinsen für 150 Tage:

$$Z (150 \text{ Tage}) = 120 \text{ €} \cdot \frac{150}{360} = 50 \text{ €}$$

Zinsen für 7 Monate:

$$Z (7 \text{ Monate}) = 120 \text{ €} \cdot \frac{7}{12} = 70 \text{ €}$$

Vergleiche: $PW = GW \cdot \frac{p}{100}$

bzw. $\frac{PW}{p} = \frac{GW}{100}$

Vereinbarung:
1 Monat hat 30 Tage,
1 Jahr hat 360 Tage.

BEISPIELE

p. a. (lat. pro anno) heißt
„pro Jahr“

Bei der Zinsrechnung hast du die gleichen Lösungsmöglichkeiten wie bei der Prozentrechnung.

Am Einzahlungstag werden keine Zinsen berechnet, jedoch am Auszahlungstag.

- I a) Ein Kapital von 4000 € wird zu einem Zinssatz von 1,8 % p. a. angelegt. Berechne die Jahreszinsen.
- b) Welches Guthaben muss man anlegen, um beim Zinssatz 2 % nach einem Jahr 60 € Zinsen zu haben?
- c) Bei einem Guthaben von 12 000 € werden nach einem Jahr 450 € Zinsen gutgeschrieben. Gib den Zinssatz an.
- Lösung:**
- a) $Z = K \cdot p$
 $Z = 4000 \text{ €} \cdot \frac{1,8}{100} = 72 \text{ €}$
 Die Jahreszinsen betragen 72 €.
- b)

Zinssatz p	Geldbetrag
2	60 €
100	3000 €

 $\cdot 50$
 Man muss 3000 € anlegen.
- c) $\frac{p}{100} = \frac{Z}{K}$
 $p = \frac{450 \text{ €}}{12 000 \text{ €}} \cdot 100 = 3,75$
 Der Zinssatz beträgt 3,75 %.
- II Frau Krause hat vom 15. Juni einen Kleinkredit über 2000 € aufgenommen bei einem Zinssatz von 1,5 %. Sie zahlt den Kreditbetrag samt Zinsen am 20. Dezember zurück. Berechne die Höhe der Rückzahlung.

Lösung:

Anzahl der Tage: $t = 15 \text{ Tage} + 5 \cdot 30 \text{ Tage} + 20 \text{ Tage} = 185 \text{ Tage}$

$$Z (185 \text{ Tage}) = 2000 \text{ €} \cdot \frac{1,5}{100} \cdot \frac{185}{360} \approx 15,42 \text{ €}$$

Frau Krause zahlt 2015,42 € zurück.

VERSTÄNDNIS

- Gib an, wovon die Höhe der erhaltenen Zinsen abhängt.
- Eine Bank wirbt wie folgt: „5 % p. a. Zinsen, die dem Kapital jährlich gutgeschrieben werden.“ Sind die insgesamt erhaltenen Zinsen proportional zur Anlagedauer in Jahren? Begründe.

- 1 Berechne die Zinsen und das Kapital nach einem Jahr.
- a) Kapital: 1000 €, Zinssatz p.a.: 0,6 % b) Kapital: 1430 €, Zinssatz p.a.: 0,2 %
 c) Kapital: 20 300 €, Zinssatz p.a.: 1,8 % d) Kapital: 871,43 €, Zinssatz p.a.: 0,5 %
 e) Kapital: 47 368,40 €, Zinssatz p.a.: 2,9 %
 f) Kapital: 5500 €, Zinssatz p.a. 1,25 %
- 2 Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Kapital in €	320	■	7450	■	43 000	3870	■
Zinssatz p. a.	1,75 %	2,2 %	■	2,4 %	3,25 %	■	2,5 %
Zinsen in €	■	88,00	141,55	285,60	■	69,66	387,50

- 3 Berechne die Zinsen für die angegebenen Zeiträume.

a)	Kapital	Zinssatz p.a.	Zeitraum	b)	Darlehen	Zinssatz p.a.	Zeitraum
	12 000 €	2,1 %	300 Tage		4 920 €	7 %	01.02. – 31.06.
	4 400 €	0,9 %	$\frac{3}{4}$ Jahr		1 670 €	5,75 %	18.03. – 01.07.
	18 500 €	1,6 %	3 Monate		1 260 €	3,25 %	06.03. – 12.05.
	3 600 €	0,7 %	9 Monate 4 Tage		2 900 €	4 %	19.03. – 07.07

- 4 Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Darlehen in €	6000	36 000	1980	72 000	798	■	■
Zinssatz p. a.	■	4,3 %	9,5 %	■	10,0 %	13,0 %	6,8 %
Zinsen in €	120,00	309,60	■	468,00	55,42	130,00	612,00
Laufzeit in d	180	■	40	60	■	45	120

d ist die Anzahl der Tage.

- 5 Wer hat sein Geld am besten angelegt?



Frau Braun

Ich habe 6000 € angelegt und erhalte dafür im Jahr 150 € Zinsen.



Frau Weiß

Ich habe 15000 € für 30 Tage angelegt und dafür Zinsen in Höhe von 18,75 € erhalten.

Ich bekomme 11,16 € Zinsen bei einem Anlagebetrag von 375 € für 9 Monate.



Frau Rot

AUFGABEN

Tipp:

2 % Zinsen, 700 €:

$$700 \text{ €} \cdot \frac{2}{100}$$

$$= 700 \text{ €} \cdot 0,02$$

$$= 714 \text{ €}$$

$$\text{allgemein: } K \cdot \frac{p}{100}$$

Kapital nach 1 Jahr:

$$700 \text{ €} + 700 \text{ €} \cdot 0,02$$

$$= 700 \text{ €} \cdot (1 + 0,02)$$

$$= 700 \text{ €} \cdot 1,02$$

$$\text{allgemein: } K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^q$$

- 6 Frank möchte sich von den Zinsen seines ersparten Geldes in Höhe von 6000 € in fünf Monaten ein aktuelles Smartphone mit einem Preis von etwa 500 € kaufen. Berechne den dafür notwendigen Zinssatz bei einer Bank und schätze diesen Wert unter aktuellen Gesichtspunkten realistisch ein.



- 7 Berechne und beschreibe jeweils deinen Rechenweg.
- Herr Böttcher hat 1200 € für 240 Tage angelegt und bekommt 48 € an Zinsen für den Zeitraum gutgeschrieben. Wie hoch war der Zinssatz?
 - Frau Guthoff hat bei einem Zinssatz von 4 % nach 9 Monaten 45 € Zinsen bekommen. Welches Kapital hatte sie angelegt?
 - Für ein Darlehen in Höhe von 20 000 € zahlt Herr Meyer 1100 € Zinsen im ersten Jahr. Gib den Zinssatz des Darlehens an.
 - Frau Besold will sich ein Auto kaufen. Sie leiht sich von ihrer Bank 16 000 € und muss den Betrag nach einem Jahr mit 8 % Zinsen zurückzahlen.

- 8 Den Kauf eines Wohnmobils muss Herr Groß zu 40 % über ein Bankdarlehen finanzieren, den Rest bezahlt er aus eigenen Ersparnissen. Für das Bankdarlehen muss er nach 8 Monaten 496 € Zinsen bei einem Zinssatz von 2,5 % aufbringen. Berechne die Höhe des Darlehens und den Verkaufspreis des Wohnmobils.



- 9 a) Die Jahreszinsen für ein Kapital von 650 € bei einem Zinssatz von 2 % werden dem Kapital zugeschlagen. Auf welchen Betrag hat sich das Kapital dadurch nach einem Jahr erhöht? Beschreibe die unterschiedlichen Lösungswege mit eigenen Worten.

2% von 650 € sind:

$$0,02 \cdot 650 \text{ €} = 13 \text{ €}$$

Erhöhung des Kapitals auf:

$$650 \text{ €} + 13 \text{ €} = 663 \text{ €}$$

Änderungsfaktor:

$$1 + 0,02 = 1,02$$

Das Kapital erhöht sich auf:

$$1,02 \cdot 650 \text{ €} = 663 \text{ €}$$

- b) Eine Firma nimmt einen Kredit über 1,5 Mio. € auf. Die Bank behält 3 % dieser Kreditsumme als Damnum ein. Welcher Betrag wird an die Firma ausgezahlt? Beschreibe die unterschiedlichen Lösungswege mit eigenen Worten.

3% von 1,5 Mio. € sind:

$$0,03 \cdot 1\,500\,000 \text{ €} = 45\,000 \text{ €}$$

Ausgezahlter Betrag:

$$1\,500\,000 \text{ €} - 45\,000 \text{ €} =$$

$$1\,455\,000 \text{ €}$$

Änderungsfaktor:

$$1 - 0,03 = 0,97$$

Ausgezahlter Betrag:

$$0,97 \cdot 1\,500\,000 \text{ €} =$$

$$1\,455\,000 \text{ €}$$

Gut zu wissen

Als *Damnum (Disagio)* bezeichnet man die Differenz zwischen dem erhaltenen Betrag und dem Rückzahlungsbetrag eines Darlehens. Banken zahlen das Darlehen also nicht in vollständiger Höhe aus, sondern behalten einen Teil der Kreditsumme ein.

- 10 Du kennst die Berechnung eines erhöhten (erniedrigten) Grundwerts bereits aus der Prozentrechnung durch **Änderungsfaktoren**.

Wird ein Geldbetrag um p % erhöht (erniedrigt), dann kann man den neuen Betrag mit den Wachstumsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ bzw. Abnahmefaktor $q = 1 - \frac{p}{100}$ bestimmen.

In der Zinsrechnung bezeichnet man diese Faktoren auch als **Zinsfaktoren**.

Überlege zunächst, welche Größe gesucht ist. Berechne dann mithilfe des Zinsfaktors.

- 1 Jan hat 525 € für ein Jahr angelegt und erhält dafür 3 % Zinsen.
- 2 Petras Kontostand ist nach einem Jahr bei einem Zinssatz von 3,5 % auf 258,75 € angewachsen.
- 3 Frau Schmidt hat 4000 € angelegt. Nach einem Jahr beträgt der Kontostand 4080 €.
- 4 Ein Unternehmen nimmt bei seiner Hausbank ein Darlehen in Höhe von 5 Mio. € auf. Die Bank behält 4 % der Kreditsumme als Damnum ein.
- 5 Herr Kleine zahlt bei einer 500 € - Anleihe nur 470 € für das Wertpapier.
- 6 Ehepaar Uhl hat zur Finanzierung ihres Hauses einen Kredit aufgenommen. Sie bekommen 295 500 € ausgezahlt. Das Damnum betrug 1,5 %.

Gut zu wissen

Ein Wertpapier ist vereinfacht ausgedrückt ein Recht auf ein Vermögen in Form einer Urkunde. Zu Wertpapieren gehören z. B. Aktien oder Anleihen (zinstragendes Wertpapier).

VERTIEFUNG

Der Effektivzinssatz

Oftmals werden neben Zinsen auch Gebühren verlangt, die einen Kreditbetrag verteuern. Um Angebote miteinander zu vergleichen, werden diese Gebühren zum Gesamtbetrag hinzugezählt. Der **Effektivzinssatz** drückt die Gesamtkosten für einen Kredit in Prozent der Kreditsumme aus.

Beispiel:

Für einen Kredit über 50 000 €, der für 180 Tage in Anspruch genommen wird, berechnet die Gemeinschaftsbank Oberpfalz 4 % Zinsen p.a. und eine Bearbeitungsgebühr von 0,5 % des Kreditbetrags.

Tatsächliche Kreditkosten:	Effektivzinssatz:
4 % von 50 000 € für 180 Tage: $50\,000\ € \cdot 0,04 \cdot \frac{180}{360} = 1000\ €$	$p_{\text{eff}} = \frac{\text{Kreditkosten} \cdot 100 \cdot 360}{\text{Auszahlungsbetrag} \cdot \text{Tage}}$
0,5 % Bearbeitungsgebühr: $50\,000\ € \cdot 0,005 = 250\ €$	$p_{\text{eff}} = \frac{1250\ € \cdot 100 \cdot 360}{50\,000\ € \cdot 180} = 5\ %$
Kreditkosten insgesamt: 1250 €	Der effektive Zinssatz beträgt 5 %.

- Erkläre das Vorgehen zur Berechnung des effektiven Zinssatzes im Beispiel.
- Familie Schmidt möchte ein Darlehen in Höhe von 9000 € für ein Jahr lang aufnehmen. Vergleiche die Angebote anhand ihres Effektivzinssatzes.
 - 1 5,4 % Zinsen pro Jahr
 - 2 4,9 % Zinsen und 100 € Bearbeitungsgebühr
 - 3 4,9 % Zinsen und 1,5 % der Darlehenssumme Bearbeitungsgebühr
- Thomas hat vor, seinen Kredit für ein Rennrad innerhalb von zehn Monaten zurückzuzahlen. Dabei rechnet er damit, dass er durch Weihnachtsgeld und Geschenke dies am Ende dieser Zeit auf einmal schafft. Der Kredit, der ihm über den Fahrradhändler vermittelt wird, enthält folgende Angaben: Kredithöhe: 2500 € Zinsen: 4,38 %, Gebühr: 1,2 %, Laufzeit: 10 Monate. Berechne den Effektivzinssatz.



Legt man sein Geld über mehrere Jahre auf einem Konto an, so werden die erzielten Zinsbeträge diesem Konto gutgeschrieben. Damit erhöht sich also der Grundwert in jedem Jahr.

- Ermittle das Guthaben am Ende des 1. Jahres (2. Jahres, ..., 5. Jahres), wenn 1000 € zu 4 % angelegt werden und die Zinsen jeweils am Jahresende zum bisherigen Kapital zugeschlagen werden.
- Stelle die Veränderung des Guthabens graphisch dar. Ist der Verlauf des Graphen linear? Begründe.

MERKWISSEN

Wenn ein Anfangskapital K_0 zu einem jährlichen Zinssatz p über n Jahre hinweg verzinst wird und die Zinsen jeweils zum Ende eines Jahres ausbezahlt werden, so berechnet sich das Kapital K_n nach diesem Zeitraum mittels der sogenannten **Zinsseszinsformel**:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

mit $q = 1 + \frac{p}{100}$ (Zinsfaktor)

Beispiel:

Zinssatz 3 %; Anfangskapital K_0

- Kapital am Ende des 1. Jahres:
 $K_1 = K_0 \cdot 1,03$ bzw. $K_1 = K_0 \cdot 1,03^1$
- Kapital am Ende des 2. Jahres:
 $K_2 = (K_0 \cdot 1,03) \cdot 1,03$ bzw. $K_2 = K_0 \cdot 1,03^2$
- Kapital am Ende des 3. Jahres:
 $K_3 = (K_0 \cdot 1,03 \cdot 1,03) \cdot 1,03$ bzw. $K_3 = K_0 \cdot 1,03^3$
- Kapital am Ende des n -ten Jahres:
 $K_n = K_0 \cdot 1,03 \cdot \dots \cdot 1,03 = K_0 \cdot 1,03^n$

Da die Hauptvariable n (die Laufzeit in Jahren) im Exponenten steht, spricht man hier auch von einem exponentiellen Wachstum.

BEISPIELE

Endkapital K_n gesucht

- I Ein Kapital in Höhe von 5000 € wird genau 5 Jahre zu einem Zinssatz von 3,5 % p. a. angelegt. Berechne den Wert, auf den das Kapital nach dieser Laufzeit angestiegen ist.

Lösung:

$$K_5 = 5000 \text{ €} \cdot 1,035^5 \approx 5938,43 \text{ €}$$

Nach 5 Jahren beträgt der Wert des Kapitals ca. 5938,43 €.

Anzahl der Jahre n gesucht.

- II Ein Kapital in Höhe von 6500 € wird mit 4,0 % p. a. über mehrere Jahre angelegt. Wie viele Jahre muss man das Kapital liegen lassen, um das Kapital zu verdoppeln?

Lösung:

$$\begin{aligned} 6500 \text{ €} \cdot 1,04^n &= 13\,000 && | : 6500 \text{ €} \\ 1,04^n &= 2 && | \log \\ \log 1,04^n &= \log 2 \\ n \cdot \log 1,04 &= \log 2 && | : \log 1,04 \Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1,04} \approx 17,7 \end{aligned}$$

Das Kapital hat sich somit nach 18 Jahren erstmalig verdoppelt.

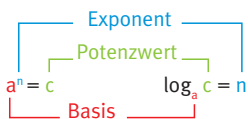
- III Ein Kapital noch unbekannter Höhe soll für ein zukünftiges Bauvorhaben über einen Zeitraum von 10 Jahren und einem Zinssatz von 3,8 % p. a. angelegt werden. Der Zielbetrag liegt bei 25 000 €. Ermittle das notwendige Anfangskapital.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } K_{10} &= x \cdot 1,038^{10} \geq 25\,000 \text{ €} \\ &\Rightarrow x \geq 17\,217,36 \text{ €} \end{aligned}$$

Der Anlagebetrag sollte bei mindestens 17 217,36 € liegen.

Zusammenhänge:



- IV** Ein Kapital in Höhe von 6500 € wird für einen Zeitraum von 12 Jahren angelegt. Nach diesen 12 Jahren weist das Konto ein Guthaben von 8000 € auf. Zu welchem Zinssatz wurde das Kapital verzinst?

Anfangskapital K_0 gesucht

Lösung:

$$6700 \text{ €} \cdot q^{12} = 8000 \text{ €} \quad | : 6700 \text{ €}$$

$$q^{12} = \frac{8000 \text{ €}}{6700 \text{ €}} \Rightarrow q = \sqrt[12]{\frac{8000 \text{ €}}{6700 \text{ €}}} \approx 1,0148 \dots \Rightarrow \text{Zinssatz: } \approx 1,5 \%$$

Der Anlagebetrag wurde zu einem Zinssatz von etwa 1,5 % verzinst.

VERSTÄNDNIS

- Begründe, warum das Anfangskapital auch oftmals mit K_0 bezeichnet wird.
- Ein Kapital K wird angelegt. Beschreibe, wie sich K entwickelt, wenn die Zinsen am Jahresende jeweils abgehoben werden (auf dem Konto verbleiben).

- 1** Berechne die fehlenden Größen. Runde geeignet.

	a)	b)	c)	d)	e)
Anfangskapital	3000 €	7000 €	■	25 000 €	45 000 €
Laufzeit	2 Jahre	3 Jahre	3 Jahre	5 Jahre	■
Zinssatz	4 %	6 %	3,5 %	■	3 %
Endkapital	■	■	13 304,62 €	26 500 €	50 647,90 €

- 2** Sabrina legt 2000 € für 3 Jahre auf einem Bankkonto an. Der Zinssatz beträgt 4,5 %, die Zinsen werden jeweils mitverzinst.

- a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende der Laufzeit?
- b) Bestimme den Gesamtbetrag der Zinsen, den Sabrina im Laufe der 3 Jahre erhält.
- c) Vergleiche das Ergebnis aus b) mit den Zinsen, die Sabrina insgesamt bekommen hätte, wenn die Zinsen jeweils ausgezahlt worden wären.

- 3** Ein Kapital von 10 000 € wird auf zwei unterschiedliche Weisen angelegt:

- 1 Mit einem Zinssatz von 6 % für drei Jahre, die Zinsen werden mitverzinst.
- 2 Im ersten Jahr werden 600 € Zinsen, im 2. Jahr 650 € und im 3. Jahr 700 € gutgeschrieben. Die Zinsen werden nicht verzinst.

Welche Anlageform ist die günstigere? Schätze zunächst und berechne dann.

- 4** Das Anfangskapital auf einem Sparbuch beträgt 12 500 € mit einem festen Zinssatz von 3,75 %. Berechne das Endkapital nach 15 Jahren ...

- a) mithilfe einer Tabelle.
- b) durch die Zinseszinsformel.

- 5** Herr Richter kauft einen Sparbrief für 6000 € zu einem Zinssatz von 3,4 %. Die Laufzeit beträgt 5 Jahre. Berechne die Höhe des Guthabens zum Laufzeitende.

AUFGABEN



- 6 Johanna behauptet, dass sie eine so gute Geldanlage gefunden hat, dass sich ihr Ersparnis innerhalb 5 Jahren verdoppelt hat. Kann das sein? Welcher Zinssatz wurde ihr versprochen?
- 7 „Wenn man sein Geld anlegt, kann man großen Gewinn einstreichen.“, behaupten viele Anzeigen im Internet oder in Zeitungen.

Kapital sparen lohnt sich!

Startkapital: 20 000 €
 Laufzeit: 5 Jahre
 Gewinn: 30 000 €
 Fester Zinssatz über die gesamte Laufzeit.

Lassen Sie Ihr Geld für sich arbeiten!

Machen Sie aus **2000 €** in nur drei Jahren **4000 €**.

Sicher in den Ruhestand!

Zahlen Sie jetzt 10 000 € ein, dann warten Sie auf den Ruhestand und erhalten 100 000 €.*

*Rechenbeispiel gültig, wenn Sie noch 35 Jahre arbeiten.

- a) Ermittle für jedes Angebot eine Gleichung einer Exponentialfunktion, die das Kapital in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
- b) Stell dir vor, du legst je 100 € zu den Zinssätzen der obigen Angebote an. Zeichne die drei Entwicklungen in ein Koordinatensystem.
- c) Begründe, dass einige solcher Angebote unseriös sind.



- 8 Frau Zoller hat mit dem Rauchen aufgehört. Sie steckt jeden Tag den Preis für eine Schachtel Zigaretten (4,80 €) in die Spargbüchse. Nach einem Jahr legt sie das Geld zu einem Zinssatz von 2,2 % auf ein Sparkonto.

- a) Ermittle die Höhe des Sparguthabens nach 5 Jahren.
 b) Wann hätte sich das Guthaben verdoppelt?

Gut zu wissen

Thesaurieren bedeutet, den Zinsertrag wieder anlegen, so dass Zinseszins berechnet werden muss.

Gut zu wissen

Festgeld ist Geld, das bei der Bank fest angelegt wird. Sie haben daher höhere Zinsen. Man unterscheidet Termingelder, die automatisch nach einem bestimmten Zeitraum zur Verfügung steht und Kündigungsgeld, das eine lange Kündigungszeit hat.

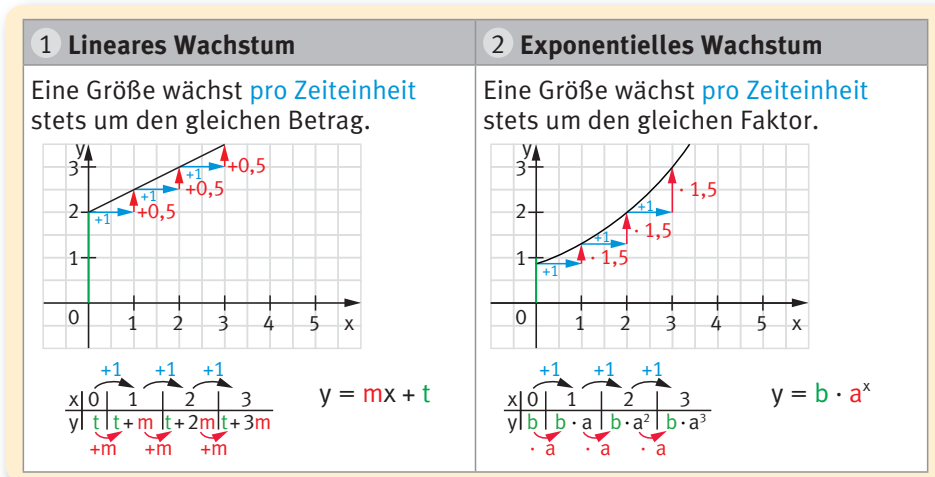
- 9 Florian legt sein Geld auf ein Festgeldkonto und möchte wissen, wie lange es bei 4,35 % thesauriert fest angelegt muss, damit das Kapital um mindestens 20 % anwächst.

- 10 Alina bekommt von ihren Großeltern zum Geburtstag 200,00 €. Sie legt sie zu 3,75 % Zinsen auf ein Termingeldkonto an. Sie entscheidet sich für Kündigungsgeld und überlegt, wann sie kündigen muss, wenn sich das Geld verdoppelt hat und sie eine Kündigung von 6 Monaten hat. Wird sie sich über das Ergebnis freuen?

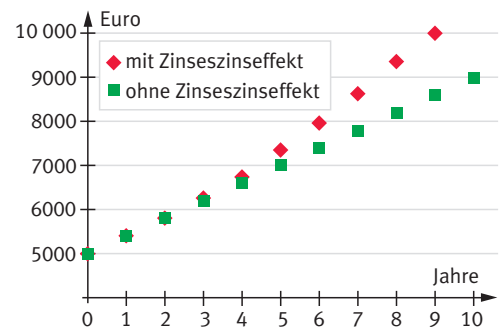


- 11 a) Welches Endkapital ergibt sich nach 8 Jahren, wenn die Bank das Anfangskapital von 4000 € zu 3,5 % p. a. verzinst?
 b) Welches Anfangskapital hätte man anstelle der 4000 € von Teilaufgabe a) anlegen müssen, um bei einer Verzinsung von 3,5 % p. a. nach 8 Jahren als Endkapital 6000 € zu erhalten?
 c) Mit welchem Jahreszinssatz verzinst die Bank das Anfangskapital von 4000 €, wenn sich nach 5 Jahren ein Endkapital von 4500 € ergibt?
 d) Für wie viele Jahre muss ein Anfangskapital von 4000 € angelegt werden, damit es bei einer Verzinsung von 5 % p. a. auf 6841,36 € anwächst?

- 12 Wachstumsvorgänge können ganz unterschiedlichen Verlauf haben. Zwei Formen des Wachstums sind besonders häufig:



- a) Begründe, dass es sich bei der Zinseszinsrechnung um exponentielles Wachstum handelt.
- b) Erfinde eine Beispielaufgabe für ein lineares Wachstum in der Zinsrechnung.
- 13 Berechne bei einem Zinssatz von 8 % p. a. und einem Anfangskapital von 5000 €, welches Kapital man am Ende des 1., 2., 3., 10. ... Jahrs hat, wenn man mit bzw. wenn man ohne Zinseszinsrechner rechnet und die Zinsen einmal pro Jahr zum Kapital geschlagen werden. Vergleiche dann mit dem Diagramm.
- 14 Du legst ein Anfangskapital in Höhe von 25 000 € an.
- a) Untersuche mit einem Tabellenprogramm die Entwicklung des Kapitals für verschiedene Zinssätze (2,5 %; 2,75 %; 3 %; 3,25 %; 3,5 %) und verschiedene Zeiten ($n = 1; 2; \dots; 25$). Berücksichtige den Zinseszins.
- b) Stelle die Daten auch in einem Diagramm dar. Was stellst du fest?
- 15 Bei vielen Tagesgeldkonten werden die Zinsen nicht jährlich, sondern am Ende eines Quartals dem Konto gutgeschrieben.



Wenn ein Kapital K zu einem jährlichen Zinssatz von p % über q **Quartale** hinweg angelegt wurde, so kann man den Wert des Kapitals K_q zum Ende dieser Laufzeit wie folgt bestimmen: $K_q = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{4}\right)^q$

- a) Begründe die Richtigkeit der obigen Formel.
- b) Gib eine Formel zur Berechnung des Kapitals nach m Monaten (t Tagen) an, wenn man davon ausgeht, dass die erreichten Zinsen monatlich (täglich) dem Konto gutgeschrieben werden. Begründe deine Vorgehensweise.
- c) Ein Tagesgeldkonto bietet einen jährlichen Zinssatz von 3,5 % an. Ein Interessent möchte 100 000 € anlegen. Er kann selbst entscheiden, welche Art der Verzinsung er wünscht. Es stehen die jährliche, die quartalsmäßige, die monatliche sowie die tägliche Gutschrift der Zinsen zur Wahl. Begründe (möglichst ohne Rechnung), auf welches Angebot der Interessent eingehen sollte. Berechne für alle drei Angebote den Kapitalbetrag nach 5 Jahren.

Gut zu wissen

Wenn die Verzinsungsintervalle kleiner sind als ein Jahr, dann spricht man von einer unterjährigen Verzinsung mit m Intervallen pro Jahr.

1.3 Kapitalaufbau durch Rentenzahlung

Sabrina ist gerade 16 Jahre alt geworden und möchte sich mit 18 Jahren ein Auto kaufen. Sie rechnet mit einem Kleinwagen, der etwa 8000,00 € kostet. Bereits jetzt trägt sie Zeitungen aus. Zusätzlich gibt sie Nachhilfe in Mathematik. Sie überlegt jeden Monat einen Teil des Geldes zur Seite zu legen.

- Begründe, warum es hilfreich ist, jeden Monat denselben Betrag zu sparen.
- Wie kann Sabrina berechnen, wie viel Geld sie an ihrem 18. Geburtstag zusammengespart hat?
- Beurteile, wie realistisch ihre Sparabsichten sind.



r = regelmäßige Zahlung
(Rente/Rate)

MERKWISSEN

Werden in regelmäßigen Zeitabständen gleich große Ein- oder Auszahlungen getätigt, dann nennt man eine solche Zahlung eine **Rente r** .

Wird eine regelmäßige Zahlung jeweils zu Beginn eines Jahres getätigt, so spricht man von einer **vorschüssigen Rentenzahlung**. Am Ende des Jahres werden dabei Zinsen gutgeschrieben.

Bei einer Zahlung jeweils am Ende eines Jahres spricht man von einer **nachschüssigen Rentenzahlung**. Die letzte Rate wird dabei nicht mehr verzinst.

Herleitung des Endwerts einer Rentenzahlung nach n Jahren mit Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ und regelmäßiger Rente r bei vorschüssiger Rente:

- 1 Die erste Rentenzahlung r wächst nach n Jahren auf: $r \cdot q^n$
Die zweite Rentenzahlung im Folgejahr wächst auf: $r \cdot q^{n-1}$
...
- 2 Die Summe der Beträge $r \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \dots + r \cdot q = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Es folgt für den **Endwert** des Guthabens bei ...

1 vorschüssiger Rentenzahlung:	2 nachschüssiger Rentenzahlung:
$K_n' = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Wird eine Anfangszahlung geleistet, muss diese ebenfalls berücksichtigt werden. Für die Kapitalmehrung ergibt sich:	
$K_n' = K_0 \cdot q^n + r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Entsprechend ergibt sich für eine Kapitalminderung :	
$K_n' = K_0 \cdot q^n - r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$K_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

I Moriz schließt einen Sparvertrag ab, bei dem er die nächsten fünf Jahre am Jahresende jeweils 1200 € einbezahlt bei einem Zinssatz von 2,8 %.

- Bestimme sein Guthaben am Ende der Laufzeit.
- Welcher Betrag des Guthabens resultiert aus den Zinseszinsen?

Lösungsmöglichkeit:

$$a) r = 1200 \text{ €}, n = 5, q = 1 + \frac{2,8}{100} = 1,028$$

$$K_6 = 1200 \text{ €} \cdot \frac{1,028^6 - 1}{1,028 - 1} = 7723,22 \text{ €}$$

Moritz hat nach 6 Jahren 7723,22 € zur Verfügung.

- Einzahlungen insgesamt: $6 \cdot 1200 \text{ €} = 7200 \text{ €}$
523,22 € erhält Moritz durch die Verzinsung der Zinsen in dem Zeitraum.

II Sarah bekommt zum 18. Geburtstag von ihrer Oma einen Bausparvertrag geschenkt. Die Oma hat als Anfangssumme 10 000 € eingezahlt und sie zahlt sechs weitere Jahre je 3000 € zu Jahresbeginn ein. Die Bausparkasse verzinst das Geld mit 3,5%. Berechne die Gesamtsumme, die in den 6 Jahren angespart werden.

Lösung:

$$n = 6, q = 1,035, r = 3000 \text{ €}, K_0 = 10\,000 \text{ €}$$

Endwert der Rentenzahlung:

$$K_6 = 10\,000 \text{ €} \cdot 1,035^6 + 3000 \text{ €} \cdot 1,035 \cdot \frac{1,035^6 - 1}{1,035 - 1} = 32630,77 \text{ €}$$

Nach 6 Jahren wurden 32630,77 € angespart.

VERSTÄNDNIS

- Begründe die Unterschiede in der vorschüssigen und nachschüssigen Endwertformel.
- Erkläre das Vorgehen in den Beispielen in eigenen Worten.
- Markus behauptet: Nachschüssige Zahlung ist wie vorschüssige Zahlung mit einem Jahr weniger. Stimmt das? Begründe.
- Lea überlegt, ob sie keine Anfangszahlung leistet, dafür aber höhere Rentenzahlungen tätigt. Sie meint, sie kommt zur selben Ansparsumme innerhalb der gleichen Zeit. Kann das sein?

1 Celine zahlt seit ihrem 12. Geburtstag zu jedem Geburtstag 200 € auf ein Sparkonto. Die Zinsen betragen 4,325 %. Wieviel bekommt Celine zur Volljährigkeit ausbezahlt?

2 Vergleiche die Angebote miteinander bei einer Laufzeit von 7 Jahren.

Baobank

Zinssatz 4,8 %
jährliche Rate am 01.01.
750,00 €

Neubank

Zinssatz 4,8 %
jährliche Rate am 31.12.
750,00 €

- 3 Der 14-jährige Florian soll sparen lernen. Darum macht ihm seine Mutter zu Jahresbeginn folgendes Angebot: Sie eröffnet ein Sparkonto auf seinen Namen mit einem Garantiezins von 3,8 %, auf das sie sofort 1000 € einbezahlt. In jedem Jahr muss Florian nach Weihnachten jeweils 500 € einzahlen. Wie viel Geld hat Florian nach 4 Jahren auf seinem Konto?
- 4 Luca hat sich bei der Bank zwei Angebote erstellen lassen, mit deren Hilfe er in den nächsten Jahren Geld sparen möchte

Topsparen

Angebot bis 31.10.
 Einmaleinlage 2000 €
 Jährlich zu Jahresanfang 500 €
 3 % Zinsen
 Gebührenfrei
 Festanlage: min. 5 Jahre

Supersparen

Fünf Jahre lang am Jahresanfang 900 € einzahlen und die Verzinsung von 4,2 % genießen.
 Ohne Gebühren

- a) Vergleiche die Angebote. Schätze zuerst und rechne dann.
 b) Was könnte Luca dazu bewegen, das „schlechtere Angebot“ anzunehmen?
- 5 Louise legt ein Sparbuch an und zahlt jeweils nachschüssig 60 € im Jahr ein bei einem Zinssatz von 4 %. Ab dem wievielten Jahr hat sie mehr als 500 € auf dem Konto?
- 6 Ab der Geburt ihres Kindes zahlen die Eltern jährlich 780 € auf ein Konto ein. Berechne den Kontostand am 1., 2., 3., ... 18. Geburtstag bei 2,5 % Zinsen.
- 7 Ein Rentner hat ein Vermögen von 80 000 €. Am Ende eines jeden Jahres entnimmt er den festen Betrag von 6500 €. Die Verzinsung beträgt 3 %. Stelle einen Auszahlungsplan aus, bis das Vermögen aufgebraucht ist.
- 8 Hanna hat mit ihrer Ausbildung angefangen und will jeden Monat 50,00 € sparen. Das Geld zahlt sie jeweils am Ende des Jahres auf ihr Sparkonto ein. Dort werden ihr 2,25 % Zinsen gutgeschrieben. Was hat sie am Ende ihrer Ausbildung (drei Jahre) angespart?
- 9 Katharina trägt Zeitungen aus und spart jeden Monat 50,00 €. Im ersten Jahr bekommt sie 3,5 %, im zweiten Jahr 3,2 % und im dritten Jahr nur noch 2,7 % Zinsen. Wie viel Geld hat sie am Ende des dritten Jahres zur Verfügung?
- 10 Elena zahlt seit sie 12 Jahre alt ist ihr Ersparnis immer am Jahresende auf ihr Sparkonto. Da sie das Weihnachtsgeld der Großeltern auch nicht ausgibt, kommen so jedes Jahr 480,00 € zusammen. Wie viel Geld ist an Weihnachten nach ihrem 18. Geburtstag auf dem Konto, wenn Sie 2,4 % Zinsen gutgeschrieben bekommt?



- 11** Ein Bausparer zahlt bei einer Bausparkasse am Anfang des Jahres einmalig 5000 € ein und ab dem Folgejahr für weiter 5 Jahre jeweils 2000 € zu Jahresbeginn. Nach 6 Jahren kann er über den doppelten Betrag seines Kapitals als Bausumme verfügen. Wie hoch ist diese Bausumme bei einem Zinssatz von 2,8 %?



- 12** Frau Kraft schließt einen Sparvertrag mit folgenden Bedingungen ab: 10 000 € zahlt sie sofort zu Jahresbeginn ein und dann jeweils 1200 € zum Jahresende. Die Laufzeit des Sparvertrages beträgt 8 Jahre bei einem Zinssatz von 3,5 %.
- Welcher Betrag hat sich am Ende der Laufzeit angesammelt?
 - Welcher Wert des Endwerts ist auf den Zinseszinseszins zurückzuführen?

- 13** Die Zwillinge Tobias und Luca sparen fleißig in ihr Sparschwein. Immer zum Weltspartag am 31.10. wird das Geld auf ein Sparkonto eingezahlt. Sie bekommen 1,5 % Zinsen jährlich gutgeschrieben. Die Tabelle zeigt die Einlagen von Tobias und Luca in den letzten Jahren.



Tip: Da Luca und Tobias immer 12 Monate sparen, kannst du mit Jahreszinsen rechnen.

Tobias	1. Jahr: 22,27 €	2. Jahr: 24,87 €	3. Jahr: 81,32 €
Luca	1. Jahr: 16,74 €	2. Jahr: 27,88 €	3. Jahr: 83,84 €

Überlege, zuerst, wer am Weltspartag vor der Einzahlung im vierten Jahr am meisten Geld auf dem Sparkonto hat und berechne dann.

- 14** Solveig ist noch in der Ausbildung und hat bereits 2000,00 € zusammengespart. Auf einer Werbetafel sieht sie das abgebildete Angebot. Kann das ein seriöses Angebot sein? Solveig ist misstrauisch, da die Raten nicht angegeben werden. Könnte sie entsprechende Raten zahlen?

BANK AN DER ECKE DA

Zustände wie beim Lotto!!!

Verfünffachen Sie ihren Einsatz innerhalb von sechs Jahren.

Schon ab einem einmaligen Einsatz von 2000,00 EUR und zusätzlichen jährlichen Einzahlungen verzinsen wir ihr Geld mit sagenhaften 3,7 %

- Berechne die Rate und beurteile, ob Solveig diesen Betrag aufbringen kann.
 - Solveig möchte höchstens 500 € im Jahr anlegen und kann ein entsprechendes Angebot aushandeln. Wie groß ist ihr Vermögen nach sechs Jahren?
- 15** Maurice möchte sein Ersparnis von 1500 € mindestens vervierfachen. Seine Bank bietet ihm Ratensparen zu 3 % an. Nach wieviel Jahren hat er sein Ziel erreicht, wenn er jedes Jahr 650 € einzahlt? Unterscheiden sich vorschüssige und nachschüssige Zahlungen?

Annika und Dominik wollen ein Haus kaufen. Sie haben zwar einiges gespart, müssten aber trotzdem einen Kredit aufnehmen. Sie informieren sich nach verschiedenen Angeboten und erhalten unterschiedliche Rückzahlungsmodalitäten.

- Informiere dich bei einer Bank nach verschiedenen Rückzahlungsmodellen.
- Lasse dir von einer Bank zu einem Kreditbeispiel deiner Wahl einen Tilgungsplan erstellen und stelle ihn deiner Klasse vor.



Restschuld ist der Betrag, der am Ende des Jahres von der Kreditsumme übrig ist.

Bei unseren Rückzahlungen gehen wir von Tilgungen jeweils zum Jahresende aus.

MERKWISSEN

In der Finanzwelt erhält man beispielsweise von einer Bank einen Kredit und zahlt diesen in n Jahren in Raten zurück. Die jährliche Rückzahlungsrate wird **Annuität A** genannt. Sie ist die Summe aus den **Zinsen Z** der Restschuld und dem **Tilgungsanteil T** , mit denen der Kreditbetrag verringert wird: $A = Z + T$.

Man unterscheidet zwei Arten der Rückzahlung:

1 Ratentilgung

Die jährliche Tilgung T ist konstant. Die Zinsen und die jährliche Annuität nehmen im Laufe der Jahre ab.

Beispiel: Ein Darlehen von 6000 € wird bei einem Zinssatz von 3 % durch eine jährliche Tilgung von 2000 € zurückbezahlt.

Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Z	T	A
1	6000 €	180 €	2000 €	2180 €
2	4000 €	120 €	2000 €	2120 €
3	2000 €	60 €	2000 €	2060 €
Gesamtbetrag:				6360 €

2 Annuitätentilgung

Die jährliche Annuität A ist konstant. Die jährlichen Zinsen sinken, während der Tilgungsbetrag steigt.

Beispiel: Ein Darlehen von 6000 € wird bei einem Zinssatz von 3 % in drei Jahren durch eine gleich-bleibende Annuität zurückbezahlt.

Tilgungsplan:

Jahr	Restschuld	Z	T	A
1	6000 €	180 €	1941,18 €	2121,18 €
2	4058,82 €	121,76 €	1999,42 €	2121,18 €
3	2059,40 €	61,78 €	2059,40 €	2121,18 €
Gesamtbetrag:				6363,54 €

- I Ein Darlehen in Höhe von 15 000 € soll innerhalb von fünf Jahren zurückgezahlt werden. Die jährliche Tilgung soll jeweils gleich sein. Die Bank verlangt 3,8 % Zinsen. Wie hoch sind die jährlichen Belastungen? Wie hoch ist der Gesamtbetrag des Kredits? Beschreibe dein Vorgehen.

Lösung: Ratentilgung

- gleichbleibende Tilgungsrate berechnen:
Die jährliche Tilgungsrate beträgt $15\,000\text{ €} : 5 = 3000\text{ €}$
- Tilgungsplan erstellen:

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	15 000 €	570 €	3000 €	3570 €
2	12 000 €	456 €	3000 €	3456 €
3	9000 €	342 €	3000 €	3342 €
4	6000 €	228 €	3000 €	3228 €
5	3000 €	114 €	3000 €	3114 €
Gesamtbetrag:			16 710 €	

Die jährlichen Belastungen fallen von 3570 € auf 3114 €, da die zu zahlenden Zinsen jedes Jahr geringer werden.

- Gesamtbetrag bestimmen: Insgesamt müssen für den Kredit 16 710 € zurückbezahlt werden.

- II Die Familie Reinhardt will innerhalb von 4 Jahren den Kredit für die Küche in Höhe von 6000 € zurückzahlen. Sie möchten jeweils zum Jahresende stets 1800 € insgesamt an die Bank zahlen. Die Bank verlangt 4,5 % Zinsen. Ist der Kredit nach 4 Jahren zurückbezahlt? Beschreibe dein Vorgehen.

Lösung: Annuitätentilgung

- Tilgungsplan erstellen

Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
1	6000 €	270 €	1530 €	1800 €
2	4470 €	201,15 €	1598,85 €	1800 €
3	2871,15 €	129,20 €	1670,80 €	1800 €
4	1200,35 €	128,49 €	1200,35 €	1328,84 €
Gesamtbetrag:			6728,84 €	

- Beurteilung: Es klappt, sie sind nach vier Jahren schuldenfrei. Die letzte Annuität ist sogar geringer, da die Restschuld kleiner ist als der mögliche letzte Tilgungsbetrag.

VERSTÄNDNIS

- Beschreibe Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Rückzahlungsmöglichkeiten.
- Richtig oder falsch: Wenn die prozentuale Tilgung niedrig ist, beeinflusst das die Rückzahlung mehr als wenn die Zinsen hoch sind.
- Patrick stellt fest: „Annuitätentilgung ist wie Rentensparen rückwärts.“ Was meint er? Hat er Recht?

- 1 Kira möchte sich ein Auto kaufen. Hierfür nimmt sie einen Kredit in Höhe von 9500 € bei einer Laufzeit von fünf Jahren auf. Die Bank verlangt 3,2 % Zinsen und vereinbart mit ihr Ratentilgung. Erstelle einen Tilgungsplan.

- 2 Johannes liebäugelt mit einem schönen Motorrad. In der Zeitung hat er ein Angebot für eine gebrauchte Maschine für 11 500 € gefunden. 3000 € hat er bereits zusammen. Den Rest muss er über einen Kredit finanzieren. Da er lieber gleiche Beträge zurückzahlt, entscheidet er sich für einen Annuitätenkredit mit einer jährlichen Annuität von 1600 €, den er innerhalb von sechs Jahren zurückzahlen will. Die Bank berechnet 3,3 % Zinsen.



Erstelle einen Tilgungsplan und bestimme die letzte Annuität.

- 3 Stellt man keinen Tilgungsplan auf, kann man die Werte auch berechnen. Bei Ratentilgungen wird die Schuldsomme in n Jahren in n gleichen Teilbeträgen getilgt. Damit ergeben sich folgende Formeln:

$$q = 1 + \frac{p}{100} \text{ (Zinsfaktor)}$$

In deiner Abschlussprüfung darfst du eine Merkhilfe, in der unter anderem diese Formeln stehen, verwenden. Du musst sie also nicht auswendig lernen.

Tilgungsraten:

$$T = \frac{K_0}{n}$$

Zinsen der Restschuld in einem Jahr v :

$$Z_v = T \cdot (q - 1) \cdot (n - v + 1)$$

Annuität = Zinsen + Tilgung:

$$A = Z + T$$

Für die letzte Annuität im Jahr n gilt:

$$A_n = T \cdot q$$

Für die Annuität im Jahr v gilt:

$$A_v = T \cdot (q - 1) \cdot (n - v + 1) + T$$

Restschuld am Ende des v -ten Jahres:

$$K_v = T \cdot (n - v)$$

Probiere nun verschiedene Möglichkeiten aus.

Selina zieht in ihre erste eigene Wohnung. Dazu benötigt sie Möbel. Wenn sie das nötigste kauft, summiert sich der benötigte Geldbetrag auf 3700 €. Ihr erspartes Geld hat sie für den Urlaub verwendet, so dass sie nun einen Kredit beantragen muss. Von der Bank bekommt sie folgendes Angebot:

Vier Jahre lang jedes Jahr 1050 € zurückzahlen.

Wie hoch sind die Zinsen?

- 4 Özlem zieht mit ihrem Freund zusammen. Sie müssen sich eine neue Küche für 4500 € kaufen und wollen diese über einen Konsumkredit finanzieren. Der Händler bietet ihnen über seine Bank einen Ratenkredit mit 20-prozentiger Tilgung an, so dass sie innerhalb von fünf Jahren die Schulden abbezahlt hätten. Er verlangt allerdings 5,65 % Zinsen. Erstelle einen Tilgungsplan und bestimme den Gesamtbetrag des Kredits.

Konsumkredite werden oftmals bei Händlern angeboten. Der Zinssatz kann dabei höher sein, als direkt bei einer Bank.

- 5 Familie Schreiber möchte einen Kredit für die Wohnung in Höhe von 950 000 € jährlich mit 4 % tilgen. Die Zinsen betragen 2,95 %.

- a) Wie hoch ist die jährliche Tilgungsrate?
b) Bestimme die Laufzeit des Kredits. Erstelle dazu einen Tilgungsplan.



Nutze ein Tabellenprogramm, wenn möglich.

- 6 Eine gleich bleibende Annuität entspricht der Rente bei der Rentenzahlung. Bei vorgegebener Laufzeit kann man durch diesen Zusammenhang die Höhe der Annuität bestimmen.

Berechnung einer **gleichbleibenden (nachsüssigen) Annuität A** bei dem Kreditbetrag K_0 über eine Laufzeit von n Jahren und dem Zinsfaktor q :

$$K_0 \cdot q^n = A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \iff A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

Die Tilgungsraten sind bei der Annuitätentilgung nicht konstant. Somit ergibt sich in Abhängigkeit der Jahre:

Tilgungsrate im Jahr 1:

$$T_1 = \frac{K_0 \cdot (q - 1)}{q^n - 1} = \frac{A}{q^n}$$

Tilgungsrate im Jahr v bzw. n :

$$T_v = T_1 \cdot q^{v-1} \text{ bzw. } T_n = T_1 \cdot q^{n-1}$$

Zinsen der Restschuld in einem Jahr v :

$$Z_v = \frac{K_0 \cdot (q - 1) \cdot (q^n - q^{v-1})}{q^n - 1}$$

Restschuld am Ende des v -ten Jahres:

$$K_v = K_0 \cdot q^v - \frac{A \cdot (q^v - 1)}{q - 1}$$

Diese Formeln musst du nicht auswendig lernen. Du erhältst sie bei deiner Abschlussprüfung in der Merkhilfe.

- a) Berechne die gleichbleibende Annuität A für folgende Kredite:

- 1 $K_0 = 10\,000$ €, $n = 5$ Jahre, Zinssatz: 2,5 %
- 2 $K_0 = 90\,000$ €, $n = 12$ Jahre, Zinssatz: 1,5 %
- 3 $K_0 = 6500$ €, $n = 4$ Jahre, Zinssatz: 4,6 %

- b) Ein Darlehen soll in 5 Jahren zurückgezahlt werden. Der Zinssatz beträgt 4 %, die Annuität soll 1000 € betragen.

- 1 Bestimme das mögliche Darlehen für diese Bedingungen.
- 2 Stelle allgemein wie im Kasten eine Formel zur Berechnung des Kreditbetrages bei den vorgegebenen Bedingungen auf.

- 7 Eine Hypothek in Höhe von 450 000 € soll innerhalb von 20 Jahren durch eine gleichbleibende Annuität getilgt werden. Berechne die Höhe der jährlichen Belastung, wenn die Zinsen 3,25 % betragen.

- 8 Sarah hat im Laden eine Medienanlage für 2300 € entdeckt. Bei der Bank erhält sie ein Angebot für einen Konsumkredit.

- a) Vergleiche die Angebote und die Ratenhöhen. Erstelle jeweils einen Tilgungsplan.
- b) Welche Gründe könnte Sarah haben, sich für das jeweilige Kreditangebot zu entscheiden?

Konsumkredit!

Anzahlung 300 €
Rest in monatlichen
Raten in Höhe von
180 €

BANKKREDIT

Nur bis zum 30.
dieses Monats!!!
4,2 % Zinsen und gleiche
monatliche Raten

- 9 Sandro hat im Internet ein verlockendes Angebot für ein Motorrad gefunden. Da er nicht 7500 € auf dem Konto hat, muss er es über einen Kredit finanzieren. Es liegen ihm zwei Kreditangebote vor:

Alles Easy Kredit

Monatliche Raten von 700 €,
Verzinsung 4,5 %

Gerechte Verzinsung!

Tilgen Sie jeden Monat gleich
Schuldzinsen: 5,5 %

*Bei unterjähriger Verzinsung wird der Effektivzins berechnet:
 $q = 1 + i$, $i = \frac{p}{m}$
 m : Häufigkeit, mit der im Jahr verzinst wird.*

- a) Begründe jeweils, welche Tilgungsart vorliegt.
- b) Erstelle jeweils einen Tilgungsplan.
- c) Vergleiche: Welches Angebot ist günstiger?

KAPITEL 1

Gut zu wissen

Der Nominalzins ist beim Kredit zu zahlende, vertraglich vereinbarte Zins. Hier sind noch keine Nebenkosten und weitere Einflüsse berücksichtigt.

Gut zu wissen

Ein Kredit, der erst nach Ende der Laufzeit fällig wird, zurückzahlen, nennt man Fälligkeitskredit.

Beim Dispo (Überziehungskredit) handelt es sich um eine von der Bank eingeräumte Kreditlinie, die bei Bedarf vom Kontoinhaber genutzt werden kann. Diese Kreditlinie dient der kurzfristigen Überbrückung finanzieller Engpässe.

- 1 Julia und Admir sind mit der Lehre fertig und wollen nun zusammenziehen und eine Wohnung kaufen. Ein angebotener Kreditvertrag enthält folgende Bedingungen.
Beide haben das Gefühl, dass der Kredit doch nicht so günstig ist, wie es im ersten Augenblick erscheint und bitten dich um Hilfe. Berechne für sie den Effektivzins.

Kreditvertrag

Zwischen
Kreditsumme: 100 000 €
Nominalzins: 2,24 %
Bearbeitungsgebühr: 1,5 %
Damnum: 2 %

- 2 Niklas benötigt 15 000 €, die er über einen Kredit finanzieren muss. Er hat die Wahl zwischen folgenden Kreditangeboten:

1 Nominalzins: 3,78 %
Damnum 1 %

1 Zinsen: 3,63 %
Bearbeitungsgebühr: 1,45 % der Kreditsumme

- a) Berechne die effektive Verzinsung im ersten Jahr.
b) Wie ändert sich das Angebot bei einer Laufzeit von drei Jahren?
c) Welcher Kredit ist günstiger, wenn davon ausgegangen wird, dass am Ende der Laufzeit die gesamten Schulden inkl. Zinsen zurückgezahlt werden?
- 3 Arne hat einen monatlichen Kontoeingang von 600 €. Seine Bank gewährt ihm einen Dispositionskredit in doppelter Höhe zu einem Zinssatz von 7,9 %.
- a) Arne möchte den Dispo vollständig für 15 Tage (11 Monate, ein Jahr) in Anspruch nehmen. Gib die zu zahlenden Zinsen an.
b) Im Mai benötigt er den Dispo in voller Höhe für 20 Tage. Allerdings reicht der Zahlungseingang im Juni nicht aus, um diesen Dispo zu begleichen. Reicht der monatliche Zahlungseingang im Juli aus, um den Dispo zu begleichen? Begründe.
- 4 Peter kauft sich ein Fahrrad für 1500 €. Bei sofortiger Zahlung werden 3 % Rabatt gewährt. Dafür müsste er allerdings sein Konto für 10 Tage überziehen. Der Zinssatz für den Dispo beträgt 8,5 %. Hilf Peter bei seiner Entscheidung. Begründe rechnerisch. Berate ihn und weise auf die Gefahren eines Dispos hin.



- 5 Ein Auszubildender vergleicht die Girokonto-Angebote verschiedener Banken.

Bank	monatliche Grundgebühr	Dispozins	Guthabenzins
1	0 €	12,75 %	0,33 %
2	3,50 €	11,89 %	0 %
3	5,90 €	8,50 %	0 %
4	0 €	13,24 %	1,10 %

- a) Das Konto weist ein Guthaben über 3000 € auf. Ermittle für jedes Angebot den Kontostand nach 5 Monaten ohne Geldbewegung.
b) Das Konto wird um 1000 € überzogen. Vergleiche die anfallenden Kosten (einschließlich Grundgebühr) pro Monat.
c) Hole dir Angebote von Banken aus deiner Umgebung und stelle diese deinen Mitschülern vor. Nutze zum Vergleich ähnliche Aufgaben wie zuvor.

6

Super-Sparen

1. Jahr: 2 %
2. Jahr: 3 %
3. Jahr: 4 %

TOP-Sparen

1. Jahr: 3 %
2. Jahr: 3 %
3. Jahr: 3 %

Extra-Sparen

1. Jahr: 1 %
2. Jahr: 3 %
3. Jahr: 5 %

Vergleiche die Angebote der Banken miteinander, wenn die Zinsen ...

- am Ende jedes Jahres ausbezahlt werden.
- am Jahresende auf dem Konto verbucht und mitverzinst werden.

7 Frau Violdahl lässt ein Guthaben von 4200 € drei Jahre lang auf ihrem Konto liegen. Am Ende zeigt der Kontoauszug ein Guthaben von 4724,43 € an. Mit welchem gleichbleibenden Zinssatz wurde das Geld verzinst? Probiere aus.

8 Stell dir vor, die Bank gibt dir 3 % Zinsen auf dein Guthaben. Du lässt das Geld über Jahre hinweg unberührt auf dem Konto liegen. Dabei werden die Zinsen jeweils auf dem Konto gelassen und mitverzinst. Am Ende des Jahres hast du somit 103 % bzw. das 1,03-Fache des Kapitals vom Jahresanfang auf dem Konto. Nach n Jahren wächst dein anfängliches Guthaben K auf $K \cdot 1,03^n$ an.



- Überprüfe die Aussagen aus dem Text an einem Zahlenbeispiel.
- Du zahlst 10 000 € auf das Konto ein. Nach wie viel Jahren bist du Millionär?

9 Bei der Geburt ihres ersten Kindes legt Familie Simon bei der Bank 1000 € an bei einer jährlichen Verzinsung von 1,8 %. Zinsen verbleiben auf dem Konto.

- Wie entwickelt sich der Kontostand in den ersten fünf Jahren?
- Wie hoch ist der Kontostand nach fünf Jahren, wenn zu Beginn jedes Jahres 1000 € auf das Konto eingezahlt werden?
- Wie viel Geld hätte die Familie einmalig anlegen müssen, um nach fünf Jahren den gleichen Kontostand zu haben wie in b)?

10 Ein Kapital in Höhe von 25 000 € wird auf einem Festgeldkonto mit einem Zinssatz in Höhe von 3,8 % p. a. angelegt. Die Zinsen werden nicht ausgezahlt. Nutze zur Lösung ein Tabellenkalkulationsprogramm.

- Berechne die Höhe des Kapitals jeweils am Ende des Jahres bei einer Laufzeit von 10 Jahren.

	A	B	C	D	E
1	Jahre	Kapital	Zinssatz	Zinsen	Endkapital
2	1	25.000,00 €	3,80%	950,00 €	
3	2		3,80%		
4	3		3,80%		
5	4		3,80%		

- Ermittle die Mindestlaufzeit für die Verdopplung des Kapitals.
- Bestimme die Laufzeit, ab der der jährliche Zuwachs durch Zinszahlungen über 3500 € liegt.
- Stelle in einem geeigneten Diagramm die Kapitalentwicklung innerhalb der ersten 10 Jahre dar.
- Ermittle den Zinssatz, der mindestens notwendig wäre, um das angegebene Kapital innerhalb von 10 Jahren zu verdoppeln.

Nutze ein Zahlenbeispiel und argumentiere dann.

- 11** Elena ist 18 und möchte für eine Wohnungseinrichtung sparen. Im Internet findet sie zwei Angebote:

BINGO BANK	RATE-BANK
<p>Niedrige Rate und hohe Verzinsung beim Ratensparen. Vertragsbindung: vier Jahre Einmalige Zahlung: 1000 € Jährliche Rate: 500 € Zinsen: 2,8 %</p>	<p>Sparen Sie regelmäßig, um ihr Vermögen aufzubauen: 750 € jährliche Rate Nur für vier Jahre! Wir gewähren einen Zinssatz von 3,1 %</p>

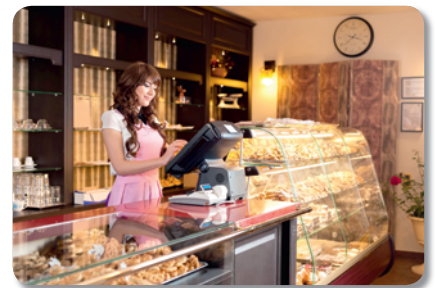
Elena ist etwas skeptisch, ob die Angebote im Internet auch halten, was sie versprechen. Und vereinbart einen Termin bei ihrer Bank.

- Vergleiche die Angebote miteinander. Unterscheide dabei vorschüssige und nachschüssige Rentenzahlung.
 - Welchen Zinssatz muss Elenas Bank mindestens bieten, wenn sie bereits 1800 € auf dem Konto hat und jedes Jahr 450 € zusätzlich anlegen könnte?
- 12** Herr und Frau Bödger möchten ein Darlehen über 30 000 € aufnehmen. Die Bank macht ihnen drei Finanzierungsangebote. Bestimme jeweils die jährliche konstante Annuität.
- Laufzeit: 5 Jahre, Zinssatz 2,5 %
 - Laufzeit: 10 Jahre, Zinssatz 3,0 %
 - Laufzeit: 15 Jahre, Zinssatz 3,5 %



- 13** Herr Kemper möchte für den Ausbau seiner Ferienwohnung einen Kredit über 40 000 € aufnehmen, den er in 6 Jahren getilgt haben möchte. Die Bank bietet ihm bei 2,5 % eine Ratentilgung oder eine Annuitätentilgung an. Stelle für beide Möglichkeiten einen Tilgungsplan auf. Berate Herrn Kemper.

- 14** Frau Kaiser nimmt für eine Geschäftserweiterung einen Kredit über 90 000 € auf. Sie möchte den Kredit in gleichbleibenden Raten von 7000 € im Jahr zurückzahlen bei einem Zinssatz von 1,5 %.
- Berechne die Restschuld am Ende von 5 Jahren.
 - Bestimme, nach wie viel Jahren der Kredit vollständig getilgt ist.



- 15** Welches Darlehen kann sich Familie Meisel leisten, wenn sie im Jahr den angegebenen Betrag zurückzahlen kann unter den angegebenen Bedingungen.
- Betrag: 4000 €, Zinssatz: 1,5 %, Laufzeit: 10 Jahre
 - Betrag: 1500 €, Zinssatz: 2 %, Laufzeit: 4 Jahre
 - Betrag: 7500 €, Zinssatz: 1,2 %, Laufzeit: 15 Jahre.

- 16** Das Darlehen der Familie Neubert soll in 5 Jahren zurückgezahlt sein bei einem aktuellen Zinssatz von 1,5 %. Die jährliche gleichbleibende Annuität soll 1000 € betragen. Bestimme die Höhe des möglichen Darlehens und stelle einen Tilgungsplan auf.

SITUATIONSBESCHREIBUNG

Johannes ist 18 Jahre alt und hat einen Traum: Wenn er 30 ist, möchte er ein Häuschen mit Garten besitzen. Er rechnet damit, dass er dafür 250 000 € benötigt. Da seine Eltern auch ein Haus besitzen, weiß er, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, seinen Traum zu finanzieren. Er ist überzeugt davon, dass es sinnvoll ist, zuerst etwas Geld zu sparen und überlegt sich, dass er während der Lehre jeden Monat 250,00 €, danach 450,00 € sparen kann. Sein Arbeitgeber hat ihm vermögenswirksame Leistungen zugesagt. Er hat bei verschiedenen Anbietern Angebote eingeholt und muss diese nun miteinander vergleichen.

Angebot 1: Junge Familien

Erfüllen Sie sich Ihren Traum innerhalb weniger Jahre, indem Sie jedes Jahr 4000 € ansparen. Die Zinsen betragen phantastische 4,2 %.

Mindestanlage fünf Jahre, danach jährlich kündbar. Für eine monatliche Ansparung während des Jahres bieten wir Ihnen ein Tagesgeldkonto mit 1,8 % Zinsen.

Angebot 3: Fond-Sparen

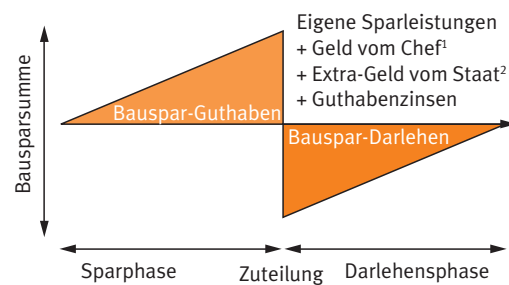
Zahlen Sie jedes Jahr 3000 € in einen Fond und sparen Sie so ein Vermögen an, über das Sie nach zehn Jahren frei verfügen können! Die Zinsen können bis zu 6 % sein. Der Aufwandszuschlag beträgt lediglich 2,5 % bei 0,5 % Verwaltungsgebühr.

Angebot 2: Traum vom Eigenheim

12 Jahre ansparen zu 1,4 %

Sperrfrist : 7 Jahre

Danach besteht die Möglichkeit einen Bausparkredit mit 2,78 % Zinsen um ein Haus im Wert von 250 000 € zu finanzieren.

**Angebot 4: Private Equity**

Legen Sie jedes Jahr 5000 € gewinnbringend in Private Equity an. Professionelle Prüfer untersuchen die Unternehmen, damit sich Ihr Gewinn maximiert.

Nach jeweils 6 Jahren können Sie mit Gewinnen zwischen 7,5 % und 9 % rechnen.

HANDLUNGSAUFRÄGE

1. Beurteile, wie realistisch Johannes Annahmen zum Sparen sind. Wovon hängen die Annahmen ab?
2. Erkundige dich bei einer Bank und im Internet nach weiteren Spar- und Finanzierungsangeboten.
3. Stelle Kriterien zusammen, die Johannes für sein Ansparen wichtig sein sollten.
4. Vergleiche die angegebenen und eingeholte Angebote miteinander. Beurteile, inwiefern es sinnvoll sein kann, Angebote zu kombinieren oder Angebote zu wechseln? Gehe davon aus, dass die Angebote über die Jahre stabil bleiben.

Hinweis:

Bei den Abschlussprüfungen bis einschließlich 2017 beträgt die Gesamtpunktzahl pro Aufgabe 20 Punkte. Die Lösungen zu den Abschlussprüfungsaufgaben sind erhältlich unter www.ccbuchner.de/medien (6254-01).

AUFGABE 1

Herr Zink gewinnt bei einem Fernsehquiz 500 000 €. Er möchte sich seinen Traum erfüllen und von einem Teil des Gewinnes eine kleine Finca auf Mallorca kaufen. Ein passendes Objekt ist schnell gefunden und Herr Zink erhält von der Hin und Weg GmbH einen Brief mit drei verschiedenen Finanzierungsvorschlägen.

Herrn Hans Zink
Franz-Fihl-Str. 3c
80992 München

Hin und Weg GmbH
Balnerario 4-5
Playa de Palma

Tel.: +34 (913) 1979080
info@hinundweg.tv

Playa de Palma, 22.06.2014

Finanzierungsvorschläge für das Objekt 123-453

Sehr geehrter Herr Zink,

anbei schicken wir Ihnen die gewünschten Unterlagen und möchten Ihnen, wie vor Ort besprochen, drei attraktive Finanzierungsbeispiele unterbreiten.

Angebot 1: Sofortige Barzahlung von 120 000,00 € und Zahlung der restlichen 100 000,00 € in einem Jahr

Angebot 2: Fünf vorschüssige Zahlungen – beginnend in zwei Jahren – in Höhe von jeweils 50 000,00 €

Angebot 3: Sofortige Barzahlung von 15 000,00 € und jeweils weitere vier nachschüssige jährliche Zahlungen in Höhe von 52 000,00 €

Bitte teilen Sie uns Ihre Entscheidung bis Ende August 2014 mit.
Mit freundlichen Grüßen

Michael Schuhmann

Michael Schuhmann
Geschäftsführer Hin und Weg GmbH

6 Punkte

- 1.1** Berechnen Sie, welches Angebot für Herrn Zink am besten wäre, wenn er mit einem Zinssatz von 3,5 % rechnen kann.

Herr Zink möchte 20 % seines Gewinns von 500 000 € bei seiner Hausbank anlegen und sich davon jeweils am Jahresende 8000 € auszahlen lassen.

5 Punkte

- 1.2** Berechnen Sie, wie viele Jahre er sich den vollständigen Betrag auszahlen lassen kann, wenn ihm seine Hausbank einen jährlichen Zinssatz von 2,5 % anbietet.

- 1.3** Seiner Frau wäre es aber lieber, sich nur zehn Jahre lang jeweils am Jahresanfang eine bestimmte Summe auszahlen zu lassen. Berechnen Sie diesen Betrag.

3 Punkte

Herrn Zinks 25-jähriger Sohn Felix erhält einen Teil des Gesamtgewinns als Startkapital für ein Eigenheim. Die restlichen benötigten 150 000 € bekommt er von seiner Hausbank, mit der er nachstehenden Darlehensvertrag abschließt.

DARLEHENSVERTRAG

Darlehensgeber: Moneybank München, Dachauerstr. 220, 80992 München
Darlehensnehmer: Felix Zink, Franz-Fihl-Str. 3c, 80992 München

1. Darlehensgewährung

Der Darlehensgeber gewährt dem Darlehensnehmer ein verzinsliches Darlehen in Höhe von 150 000,00 EUR (in Worten einhundertfünfzigtausend Euro).

2. Verzinsung

Das Darlehen ist mit 2,9 % p. a. zu verzinsen.

3. Annuitäten

Das Darlehen ist mit zehn jährlich gleichbleibenden Annuitäten jeweils am 31.12. jeden Jahres zurückzuzahlen.

4. Sonstiges

Zum 01.01.2020 kann das Darlehen durch eine Sondertilgung gänzlich zurückgezahlt werden.

Die Laufzeit des Darlehens beginnt mit dem 01.01.2015

- 1.4** Stellen Sie einen Tilgungsplan für die ersten zwei Jahre auf.
(Zwischenergebnis: $A = 17\,494,95$ €)

4 Punkte

- 1.5** Zum 01.01.2020 wird ein Bausparvertrag über 80 000,00 € fällig. Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Summe ausreicht, um das ganze Darlehen anschließend vollständig zurückzahlen zu können.

2 Punkte

20 Punkte

AUFGABE 2

Herr Sauer hat von seiner Mutter ein Einfamilienhaus geerbt und möchte dieses nun verkaufen.

Er erhält folgende Angebote:

- A: Sofortige Barzahlung von 85 000 € und beginnend nach 3 Jahren 7 weitere vor-schüssige Zahlungen in Höhe von 55 000 €.
B: 5 Jahre lang nachschüssige Zahlungen von je 88 000 €.
C: 3 gleiche Raten in Höhe von 155 000 € im Abstand von 4 Jahren, wobei die 1. Rate sofort fällig ist.

- 2.1*** Berechnen Sie, welches Angebot für Herrn Sauer aus finanzieller Sicht am besten ist, wenn man einen Zinssatz von jährlich 2,5 % zugrunde legt.

6 Punkte

Aus dem Verkauf des Hauses legt Herr Sauer bei seiner Bank einen Betrag von 100 000 € unter der Gewährung von Zinseszinsen an. Der Anlage-betrag soll nach 10 Jahren auf den Auszahlungsbetrag von 120 000 € anwachsen.

3 Punkte

2.2 Berechnen Sie, welchen gleichbleibenden Zinssatz die Bank zugrunde legt.

Herr Sauer legt außerdem für das Studium seiner Tochter Katja 24 000 € zu einem Zinssatz von 0,7 % an. Katja bekommt davon jährlich vorschüssig 4900 € ausbezahlt.

5 Punkte

2.3 Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren Katjas Guthaben aufgebraucht ist.

DARLEHENSVERTRAG

- **Darlehensnehmer**

Herr Tom Sauer, Tannenweg 3, 91555 Feuchtwangen

- **Darlehensgeber**

Sparkasse Feuchtwangen, Dorfgütingen 18, 91555 Feuchtwangen

Der Darlehensgeber gewährt dem Darlehensnehmer ab dem 01.01.2016 ein verzinsliches Darlehen in Höhe von 150 000,00 € (in Worten ein-hundertfünfzigtausend Euro). Der Darlehensnehmer bestätigt mit seiner Unterschrift unter diesem Vertrag den Erhalt des Darlehens.

1. Verzinsung

Das Darlehen ist mit einem Zinssatz in Höhe von 2,6 % p. a. zu verzinsen. Die Zinsen sind jeweils am 31.12. eines Jahres zu zahlen.

2. Annuität

Die jährlichen Annuitäten (Zins und Tilgung) betragen 5400,00 €. Feuchtwangen, 22.12.2015

L. A. Schmidt

(Darlehensgeber)

T. Sauer

(Darlehensnehmer)

Katjas Bruder Tom möchte sich im nächsten Jahr eine Eigentumswohnung kaufen. Er benötigt dafür ein Darlehen in Höhe von 150 000 €. Mit seiner Bank schließt er folgenden Darlehensvertrag ab.

3 Punkte

2.4 Erstellen Sie einen Tilgungsplan für die ersten zwei Jahre.
(Restschuld am Ende des 2. Jahres: 146 961 €)

Am Ende des 2. Jahres kann Tom zusätzlich zur Annuität eine Sondertilgung in Höhe von 10 000 € leisten.

3 Punkte

2.5 Berechnen Sie, wie hoch die Restschuld am Ende des 10. Jahres ist.

 20 Punkte

AUFGABE 3

Herr Gigl hat ein Barvermögen in Höhe von 50 000 € geerbt und überlegt, dieses bis zu seinem Renteneintritt in 15 Jahren für die Altersvorsorge anzulegen. Sein Bankberater unterbreitet ihm ein Angebot für eine Kapitalanlage mit steigendem Zinssatz. In den ersten 10 Jahren verzinst sich die Anlage pro Jahr mit 1,5 %, danach erhöht sich der Zinssatz für den Rest der Laufzeit einmalig um 1,0 %.

- 3.1** Berechnen Sie die Höhe des Kapitals, welches Herr Gigl bei Vertragsende ausbezahlt bekommen würde.

4 Punkte

Herr Gigl fragt seinen Bankberater nach einer Kapitalanlage, bei der sich sein geerbtes Barvermögen innerhalb von 15 Jahren verdoppeln würde.

- 3.2** Berechnen Sie den durchschnittlichen Zinssatz, den der Bankberater Herrn Gigl für diese Kapitalanlage anbieten müsste.

3 Punkte

Herr Gigl möchte das geerbte Kapital letztendlich in ein Appartement für seinen Altersruhesitz investieren. Er bekommt von der Wohnungsbaugesellschaft drei Finanzierungsangebote vorgelegt:

Angebot A: Sofortzahlung in Höhe von 85 000 €

Angebot B: Drei nachschüssige jährliche Zahlungen in Höhe von 31 000 €; beginnend in einem Jahr

Angebot C: Mit Vertragsabschluss vier vorschüssige jährliche Raten zu je 15 000 € und eine Abschlusszahlung nach fünf Jahren in Höhe von 32 000 €

- 3.3*** Berechnen Sie, welches Angebot Herr Gigl annehmen sollte, wenn er mit einem Zinssatz von 2,6 % p. a. rechnet.

5 Punkte

Herr Gigl entscheidet sich für Angebot A und hat deshalb einen Kreditbedarf in Höhe von 35 000,00 €. Im Internet findet er einen Finanzierungsrechner und fordert mit Hilfe der unten stehenden Internetseite ein Angebot an.


- 3.4** Stellen Sie für die eingetragenen Finanzierungsbedingungen einen Tilgungsplan für die ersten zwei Jahre auf. (Zwischenergebnis: $p = 2,0\%$)

3 Punkte


- 3.5** Herr Gigl hat sich das Ziel gesetzt, bis zum Renteneintritt in 15 Jahren schuldenfrei zu sein. Zeigen Sie mithilfe einer Rechnung, ob er dieses Ziel mit dem vorliegenden Angebot erreichen wird.

5 Punkte

20 Punkte


PTIBANK AG
 Mit der optimalen Finanzierung ins neue Zuhause

Annuitätentilgung
 Ratentilgung




Darlehensbetrag	35 000,00 €
Objektwert	85 000,00 €

Festlegungen für das erste Jahr

Zins	700,00 €
Tilgung	2 100,00 €

Angebot einholen



KAPITEL 1

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

😊	😐	☹️
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Berechne die fehlenden Werte. Runde geeignet.

	a)	b)	c)	d)
K	2500 €	1700 €	18 500 €	240 €
p	5	■	6	3
Zeit	7 Mon.	4 Mon.	■	50 d
Z	■	45,33 €	277,50 €	■

2 Herr Herold hat im Lotto 20 000 € gewonnen. Er möchte es zunächst anlegen und erhält zwei Angebote. Welches sollte er nehmen? Begründe.

SUPER-SPAREN
ZINSSATZ 2,8 %
LAUFZEIT: 5 JAHRE

DYNA-SPAR
1. Jahr 2 % 2. Jahr 2,25 %
3. Jahr: 2,5 % 4. Jahr: 3 %
5. Jahr 3,5 %

3 Berechne die fehlenden Werte. Runde geeignet.

	a)	b)	c)	d)
K_0	8500 €	■	2500 €	6000 €
K_n	■	1207,10 €	2828,52 €	7329,24 €
p	3,5	1,9	2,5	■
n	8 Jahre	10 Jahre	■	7 Jahre

4 Das Kapital soll sich verdoppeln.

a) Berechne die Zeit für die Zinssätze.

1 $p = 2,5$

2 $p = 3,0$

3 $p = 4,0$

4 $p = 10,0$

b) Berechne den Zinssatz.

1 $n = 14$ Jahre

2 $n = 13$ Jahre

3 $n = 10$ Jahre

4 $n = 6$ Jahre

5 10 000 € werden in einer Bank vier Jahre lang zu 3 % angelegt.

a) Berechne für jedes einzelne Jahr ...

1 das Kapital zusammen mit den angefallenen einfachen Zinsen (ohne Zinseszins).

2 das mit dem Zinseszins angewachsene Kapital (Thesaurierung).

b) Beschreibe die Entwicklung des Kapitals aus a) anhand eines Diagramms.

6 Bei einem Darlehen über 15 000 € über 15 Monate beträgt der Zinssatz 2,15 %. Zusätzlich wird eine Bearbeitungsgebühr (1,7 % der Darlehenshöhe) erhoben. Berechne den Effektivzinssatz.

7 Katharina legt ihr Geld so an, dass es monatlich verzinst wird. Der Zinssatz beträgt 2,5 % p.a.. Ahmeds Ersparnis wird immer nur am Jahresende mit 2,5 % verzinst. Wie hoch ist bei beiden der Guthabenstand nach sieben Jahren, wenn beide 2500 € anlegen?

8 Herr Özdemir legt für seinen Sohn seit dessen Geburt jedes Jahresende 1860 € an. Die Verzinsung beträgt 2,75 %. Wie viel Geld ist vorhanden, wenn sein Sohn mit 25 Jahren heiratet.

9 Sinems Onkel hat auf das Dach seines Hauses eine Solaranlage gebaut.



Die Einnahmen von 10 000 € zahlt er immer zu Jahresende auf sein Sparkonto auf dem bereits 42 000 € sind und für das er 3 % Zinsen bekommt. Hat er nach 15 Jahren $\frac{1}{4}$ Mio. € zusammen?

10 Florian möchte sich einen Gebrauchtwagen für 5400 € kaufen. Dazu muss er einen Kredit zu 3,9 % Zinsen aufnehmen, den er innerhalb von drei Jahren zurückzahlen möchte. Erstelle einen Tilgungsplan für Raten- und Annuitätentilgung.

Das kann ich!

Kann ich!

11 Ein Darlehen in Höhe von 170 000 € soll innerhalb von zehn Jahren mit gleicher Annuität getilgt werden. Die Zinsen belaufen sich auf 3,45 %. Ermittle die Annuität nach 10 Jahren.

12 Maries Eltern kaufen ein Haus für 2 Mio. €. Davon müssen sie 60 % durch einen Kredit finanzieren. Wie lange müssen die Eltern den Kredit tilgen, wenn die Zinsen 2 % betragen und eine Annuität von 70 000 € jährlich vereinbart wird.

13 Anne und Dominik haben sich eine Wohnung gekauft. Sie nehmen einen Kredit für 79 500 € auf. Die Laufzeit soll bei 2,5 % Zinsen nur 5 Jahre dauern. Beurteile, was günstiger ist: Raten- oder Annuitätentilgung?



14 Wie hoch ist die Restschuld eines Kredits über 75 000 € nach 5 Jahren, wenn sich die Annuität auf 5000 € beläuft und 2,8 % Zinsen berechnet werden?

15 Wie lange dauert es, einen Kredit in Höhe von 95 000 € zurückzuzahlen, der mit 6,5 % verzinst wird, wobei die Annuität aus den Zinsen des ersten Jahres und 1 % Tilgung besteht.

16 Ein Darlehen von 175 000 € soll mit gleichbleibender Rate innerhalb von 12 Jahren getilgt werden. Der Zinssatz beträgt 3,1 %.

- Berechne die Annuität.
- Wie groß sind Tilgungsrate und Zinsen im ersten Jahr?
- Wie hoch sind die Zinsen nach fünf Jahren?

17 Michaela möchte sich mit einer Buchhandlung selbstständig machen. Sie überlegt, dass sie jedes Jahr 13 800 € an Zinsen und Tilgung von ihrem Gewinn zurückzahlen kann. Sie rechnet damit, dass die Bank 5,3 % Zinsen verlangt und möchte das Darlehen innerhalb von 20 Jahren zurückzahlen. Wie viel Geld kann sie als Darlehen bekommen?



18 Ein Annuitätendarlehen in Höhe von 150 000 € soll innerhalb von 15 Jahren getilgt werden. Allerdings ändert sich der Zins nach acht Jahren von 2,5 % auf 4,5 %. Berechne die Annuität der ersten acht Jahre und die der letzten sieben.

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

- Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
- Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
- Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

19 Die Zinseszinsformel lautet:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

20 Bei einer Tilgungsquote von 5 % ist ein Ratenkredit nach 20 Jahren getilgt.

21 Bei einer Sparanlage von 100 000 €, die mit 2 % verzinst wird, hat sich das Ersparnis nach zehn Jahren um mindestens $\frac{1}{5}$ erhöht.

22 Bei der Schnelligkeit der Tilgung ist ein niedriger Jahreszins nicht so bedeutend, wie eine hohe Tilgungsrate.

Aufgabe	Ich kann ...	Hilfe
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 19	Größen (Zinsen, Zinssätze, Kapital, Laufzeiten) bei der Zins- und Zinseszinsrechnung berechnen.	S. 18 S. 20 S. 21 S. 22
5	Kapitalentwicklungen graphisch darstellen.	S. 25
8, 9, 21	Größen bei der Rentenrechnung berechnen.	S. 26
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20	Größen (Annuitäten, Restschuld, Laufzeiten, Zinsen, Tilgung) bei der Tilgungsrechnung berechnen.	S. 30 S. 32 S. 33
10	einen Tilgungsplan aufstellen.	S. 30
2, 7, 10, 13, 22	Finanzangebote mit verschiedenen Bedingungen vergleichen.	S. 22 S. 30

KAPITEL 1

<p>S. 18 S. 20 S. 21 S. 22</p>	<table border="1"> <tr> <td>Prozentrechnung</td> <td>Zinsrechnung</td> </tr> <tr> <td>Grundwert GW</td> <td>Kapital K</td> </tr> <tr> <td>Prozentwert PW</td> <td>Zinsen Z</td> </tr> <tr> <td>Prozentsatz p</td> <td>Zinssatz p</td> </tr> </table>	Prozentrechnung	Zinsrechnung	Grundwert GW	Kapital K	Prozentwert PW	Zinsen Z	Prozentsatz p	Zinssatz p	<p>Die Zinsrechnung ist eine Anwendung der Prozentrechnung. In den meisten Fällen wird ein Jahreszins vereinbart, d. h. nach einem Jahr wird das Kapital um die berechneten Zinsen erhöht.</p> $Z = K \cdot \frac{p}{100} \text{ („Zinsformel“)}$																								
Prozentrechnung	Zinsrechnung																																	
Grundwert GW	Kapital K																																	
Prozentwert PW	Zinsen Z																																	
Prozentsatz p	Zinssatz p																																	
<p>S. 18</p>	<p>Jahreszinsen 120 €, Zinsen für 7 Monate sind dann $Z = 120 \text{ €} \cdot \frac{7}{12} = 70 \text{ €}$, Zinsen für 45 Tage sind dann $Z = 120 \text{ €} \cdot \frac{45}{360} = 15 \text{ €}$</p>	<p>Wird Geld nur einen Teil des Jahres angelegt, dann wird auch nur der zugehörige Anteil von den Jahreszinsen Z berechnet.</p>																																
<p>S. 22</p>	<p>Zinssatz 3 % Kapital K nach 2 Jahren: $K_2 = K \cdot 1,03^2$ Kapital K nach 3 Jahren: $K_3 = K \cdot 1,03^3$ Kapital K nach n Jahren: $K_n = K \cdot 1,03^n$</p>	<p>Werden am Ende eines Jahres die Zinsen nicht abgehoben, so werden sie zum Guthaben hinzugerechnet und im nächsten Jahr ebenfalls mitverzinst. Man spricht vom Zinseszins. Kapital K nach n Jahren bei einem Zinssatz von p: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ („Zinseszinsformel“)</p>																																
<p>S. 26</p>	<p>Kapitalendwert bei vorschüssiger Rentenzahlung:</p> $K_n' = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{bzw.}$ $K_n' = K_0 \cdot q^n + r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ <p>Kapitalendwert bei nachschüssiger Rentenzahlung:</p> $K_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \text{bzw.}$ $K_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	<p>Werden in regelmäßige Zeitabständen gleich große Ein- oder Auszahlungen getätigt, dann nennt man eine solche Zahlung eine Rente r. Wird eine regelmäßige Zahlung jeweils zu Beginn eines Jahres getätigt, so spricht man von einer vorschüssigen Rentenzahlung. Am Ende des Jahres werden dabei Zinsen gutgeschrieben. Bei einer Zahlung jeweils am Ende eines Jahres spricht man von einer nachschüssigen Rentenzahlung. Die letzte Rate wird dabei nicht mehr verzinst.</p>																																
<p>S. 30 S. 32 S. 33</p>	<p>Kredit 5000 €, Zinsen: 5 % Ratentilgung:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Jahr</th> <th>Zinsen</th> <th>Tilgung</th> <th>Annuität</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>250 €</td> <td>2000 €</td> <td>2250 €</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>150 €</td> <td>2000 €</td> <td>2150 €</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>50 €</td> <td>1000 €</td> <td>1050 €</td> </tr> </tbody> </table> <p>Annuitätentilgung:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Jahr</th> <th>Zinsen</th> <th>Tilgung</th> <th>Annuität</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>250 €</td> <td>1750 €</td> <td>2000 €</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>162,5 €</td> <td>1837,5 €</td> <td>2000 €</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>70,63 €</td> <td>1412,5 €</td> <td>1483,13 €</td> </tr> </tbody> </table>	Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	1	250 €	2000 €	2250 €	2	150 €	2000 €	2150 €	3	50 €	1000 €	1050 €	Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität	1	250 €	1750 €	2000 €	2	162,5 €	1837,5 €	2000 €	3	70,63 €	1412,5 €	1483,13 €	<p>Bei einer Tilgung wird die jährliche Rückzahlungsrate Annuität A genannt. Sie ist die Summe aus den Zinsen Z der Restschuld und dem Tilgungsanteil T, mit denen der Kreditbetrag verringert wird: $A = Z + T$. Man unterscheidet: Ratentilgung: die jährliche Tilgung T ist konstant. Die Zinsen und die jährliche Annuität nehmen im Laufe der Jahre ab. Annuitätentilgung: die jährliche Annuität A ist konstant. Die jährlichen Zinsen sinken, während der Tilgungsbetrag steigt.</p>
Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität																															
1	250 €	2000 €	2250 €																															
2	150 €	2000 €	2150 €																															
3	50 €	1000 €	1050 €																															
Jahr	Zinsen	Tilgung	Annuität																															
1	250 €	1750 €	2000 €																															
2	162,5 €	1837,5 €	2000 €																															
3	70,63 €	1412,5 €	1483,13 €																															