2 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

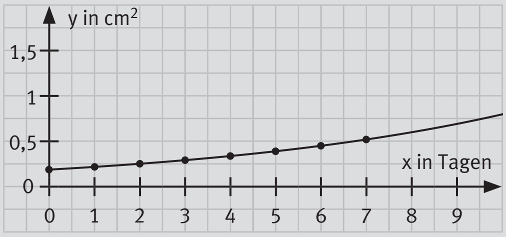
K3

- **In der Medizin werden Bakterienkulturen in Schalen gezüchtet, um beispielsweise neue Medikamente zu entwickeln oder zu erproben. Dabei betrachtet man das Wachstum der Bakterien unter optimalen Vermehrungsbedingungen.
Ein bestimmter Bakterienstamm vergrößert die von ihm bedeckte Fläche jeden Tag um 15 %.
Zu Beginn einer Messung nehmen die Bakterien auf einer Petrischale eine Fläche von 0,2 cm² ein.
Erstelle eine Wertetabelle für die ersten sieben Tage des Wachstums.**

Tag	0	1	2	3	4	5	6	7
Fläche in cm^2	0,2	0,23	0,26	0,30	0,35	0,40	0,46	0,53

K4

- **Stelle den Zusammenhang zwischen Zeit und Flächeninhalt grafisch dar.**



K2

- **Die Schale hat einen Durchmesser von 90 mm. Schätze den Zeitpunkt, an dem die Bakterienkultur die ganze Schale bedeckt.**
Bei den Schätzungen können verschiedene Werte auftreten.
Die genaue Lösung ergibt sich mit einer Rechnung:
Für den Flächeninhalt der Schale gilt:
$A = r^2 \cdot \pi = (4{,}5\,cm)^2 \cdot \pi \approx 63{,}6\,cm^2$
$63{,}6\,cm^2 = 0{,}2\,cm^2 \cdot 1{,}15^x$
$318 = 1{,}15^x$
$\ln 318 = x \cdot \ln 1{,}15$
$x \approx 41{,}2$
Nach rund 41 Tagen bedeckt die Bakterienkultur die ganze Schale.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

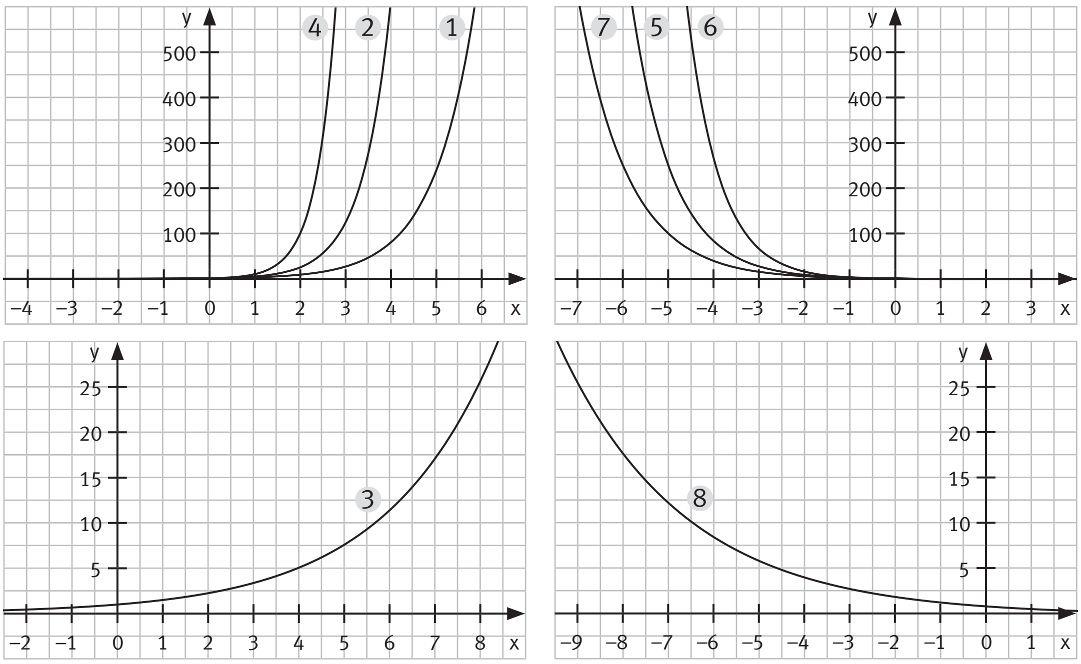
Verständnis

K1 ▪ Berechne den Schnittpunkt von $y = k \cdot a^x$ mit der y-Achse:
$y = k \cdot a^0 \Leftrightarrow y = k$
Die Graphen der Exponentialfunktionen schneiden die y-Achse im Punkt (0|k).

K1 ▪ Für a = 1 ergibt sich: $y = k \cdot 1^x \Leftrightarrow y = k$
Man erhält also als Graph die Gerade y = k, jedoch nicht den Graph einer Exponentialfunktion.

K5 **1 a)**

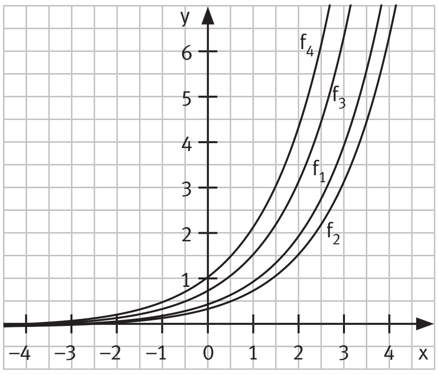
x		−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	1	0,04	0,06	0,11	0,19	0,33	0,58	1	1,73	3	5,20	9	15,59	27
	2	0,008	0,02	0,04	0,09	0,2	0,44	1	2,24	5	11,18	25	55,90	125
	3	0,30	0,36	0,44	0,54	0,67	0,82	1	1,22	1,5	1,84	2,25	2,76	3,38
	4	0,001	0,003	0,01	0,03	0,1	0,32	1	3,16	10	31,6	100	316,23	1000
	5	27	15,59	9	5,20	3	1,73	1	0,58	0,33	0,19	0,11	0,06	0,04
	6	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13	0,06	0,03	0,02
	7	15,63	9,88	6,25	3,95	2,5	1,58	1	0,63	0,4	0,25	0,16	0,10	0,06
	8	2,92	2,44	2,04	1,71	1,43	1,20	1	0,84	0,7	0,59	0,49	0,41	0,34



b) Für alle Funktionen gilt:
$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$
Der Graph von y = 0 (x-Achse) ist waagrechte Asymptote.

K5 **2 a)**

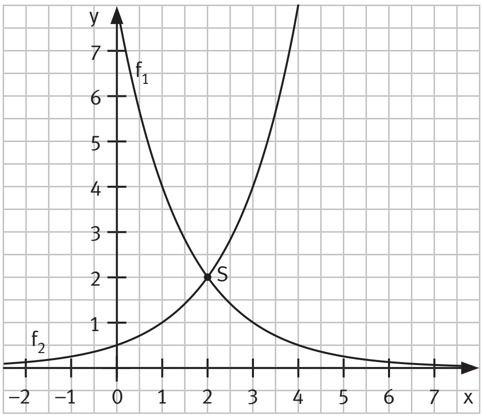
x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
1 $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$	0,06	0,09	0,13	0,18	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4
2 $y = 0{,}4 \cdot 2^x$	0,05	0,07	0,1	0,14	0,2	0,28	0,4	0,57	0,8	1,13	1,6	2,26	3,2
3 $y = 0{,}8 \cdot 2^x$	0,1	0,14	0,2	0,28	0,4	0,57	0,8	1,13	1,6	2,26	3,2	4,53	6,4
4 $y = 1{,}1 \cdot 2^x$	0,14	0,19	0,28	0,39	0,55	0,78	1,1	1,56	2,2	3,11	4,4	6,22	8,8



b)

	$\mathbb{D}$	$\mathbb{W}$	Asymptote	Im Vergleich zu 2^x ...
1 $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestaucht
2 $y = 0{,}4 \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestaucht
3 $y = 0{,}8 \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestaucht
4 $y = 1{,}1 \cdot 2^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$y = 0$	gestreckt

K4 **3**



f_1: $y = 8 \cdot 0{,}5^x$ f_2: $y = 0{,}5 \cdot 2^x$

Der Schnittpunkt von f_1 und f_2 ist S (2|2).

Rechnerische Überprüfung durch jeweiliges Einsetzen von S in die Funktionsgleichungen von f_1 und f_2:

$f_1(2) = 8 \cdot 0{,}5^2 = 8 \cdot 0{,}25 = 2$

$f_2(2) = 0{,}5 \cdot 2^2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2$

K4 **4** **a)** Einsetzen von $P(3 \mid y_p)$ in die Funktionsgleichung von f ergibt:

$y_p = 0{,}5^3 = 0{,}125$

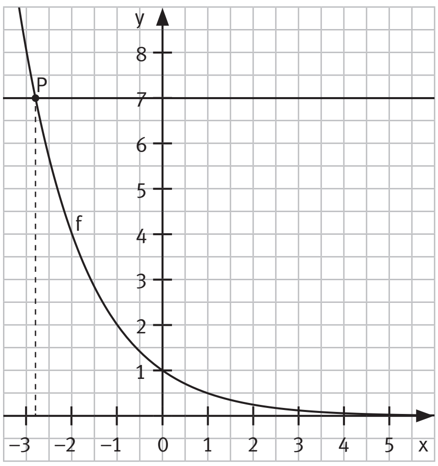
Für $y_p = 0{,}125$ liegt P auf dem Graphen von f.

b) Zeichnung siehe c)

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

Der Graph von f besitzt die waagrechte Asymptote $y = 0$.

c)

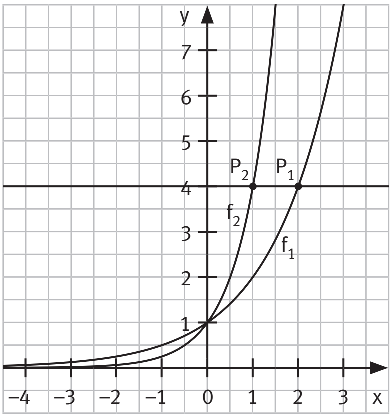


Der Graph von f schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 7$ ungefähr im Punkt A (–2,8|7).

Probe mit dem Taschenrechner: $0{,}5^{-2{,}8} = 6{,}96 \approx 7$

K5 **5** **a)**

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
f_1: $y = 2^x$	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4
f_2: $y = 4^x$	0,06	0,13	0,25	0,5	1	2	4	8	16



b) 1 Lösungsmöglichkeit:

$y = 4$: f_1: $4 = 2^x \Leftrightarrow x = 2$

f_2: $4 = 4^x \Leftrightarrow x = 1$

$y = 16$: f_1: $16 = 2^x \Leftrightarrow x = 4$

f_2: $16 = 4^x : \Leftrightarrow x = 2$

Die Entfernung zwischen P_1 und P_2 ist jeweils genauso groß wie der Abstand von P_2 zur y-Achse.

2 Anhand der Beispiele erkennt man, dass f_1 bei doppeltem x-Wert immer denselben Funktionswert besitzt wie f_2. Es gilt also: $y = 4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$

K3 **6** **a)** Sei n die Anzahl der richtigen Antworten, dann ist:

Option 1: $y = 100 \cdot 2^n$

Option 2: $y = 500n$

b)

Anzahl n richtiger Antworten	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Guthaben Option 1 in €	200	400	800	1600	3200	6400	12 800	25 600	51 200	102 400
Guthaben Option 2 in €	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000

Option 1 verspricht mehr Geld, wenn mindestens 5 Fragen richtig beantwortet werden; Option 2 ist besser bei höchstens 4 richtig beantworteten Fragen. Insgesamt kann man bei Option 1 deutlich mehr Geld gewinnen. Die 2. Option ist jedoch die sicherere Variante, da man auch bei den ersten Fragen relativ viel Geld gewinnen kann und vergleichsweise mehr bekommt, wenn man frühzeitig aufhört. Allerdings hängt die Entscheidung auch davon ab, wie der Schwierigkeitsgrad der Fragen bewertet wird. Üblicherweise steigt dieser, je mehr Fragen man bereits richtig beantwortet hat.

K1 **7** **a)** $y = 0{,}5^x\,\text{m} \qquad x \geq 0; x \in \mathbb{N}$

b) $0{,}5^x\,\text{m} < 0{,}001\,\text{m}$

$0{,}5^x < 0{,}001$

$x \cdot \lg 0{,}5 < \lg 0{,}001$

$x > 9{,}97$

Nach 10 Teilungen ist zum ersten Mal eine Strecke erreicht, deren Länge weniger als 1 mm beträgt.

c) 2 m: $y = 2 \cdot 0{,}5^x\,\text{m}$

4 m: $y = 4 \cdot 0{,}5^x\,\text{m}$

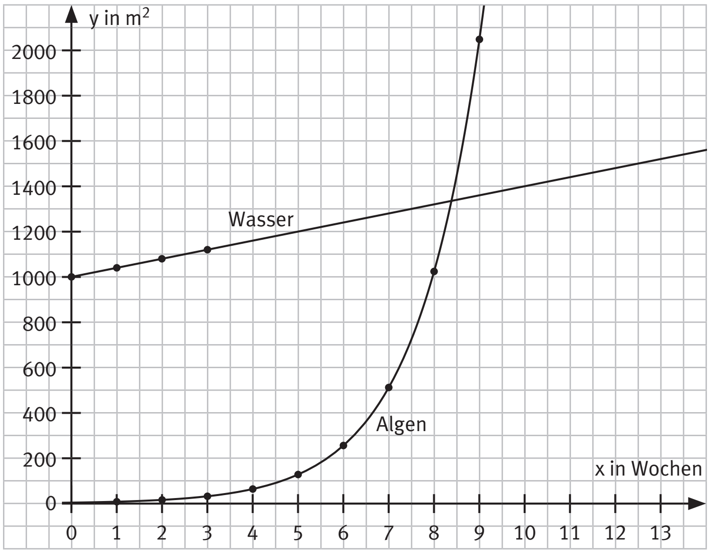
5 m: $y = 5 \cdot 0{,}5^x\,\text{m}$

8 m: $y = 8 \cdot 0{,}5^x\,\text{m}$

Bei einer Strecke, die s Meter lang ist, kommt zur Gleichung aus a) noch ein Vorfaktor s hinzu.

K 3 **8** **a)**

x in Wochen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wasserfläche in m^2	1000	1040	1080	1120	1160	1200	1240	1280	1320	1360
Algenfläche in m^2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048



b) Wasserfläche: $y = 1000 + 40x$
Algenfläche: $y = 4 \cdot 2^x$

c) Die beiden Graphen schneiden sich bei $x \approx 8{,}4$.
Die Alge bedeckt nach etwa 8 bis 9 Wochen den ganzen See.
(Bemerkung: Die Rechnung stellt nur ein theoretisches Modell dar. In der Praxis fehlt der Alge irgendwann der Sauerstoff, sodass sie sich nicht mehr mit der angegebenen Geschwindigkeit ausbreiten kann.)

K 3 **9** **a)** Das Kapital nimmt jedes Jahr um den Faktor $1 + \frac{p}{100}$ zu, da zu dem Kapital (100 % bzw. 1) jedes Jahr ein gewisser Prozentsatz (p % bzw. $\frac{p}{100}$) dazu addiert wird:

$K(n + 1) = K(n) + p\,\% \cdot K(n) = K(n) \cdot (1 + p\,\%) = K(n) \cdot (1 + \frac{p}{100})$

b)

n	1	2	3	4	5
K (n) in €	15 300,00	15 606,00	15 918,12	16 236,48	16 561,21

n	6	7	8	9	10
K (n) in €	16 892,44	17 230,29	17 574,89	17 926,39	18 284,92

c)

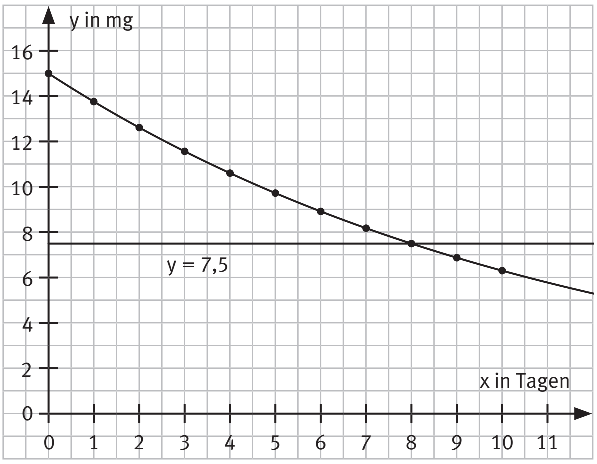
n	11	12	13	14	15
K (n) in €	18 650,61	19 023,63	19 404,10	19 792,18	20 188,03

Nach ungefähr 14,5 Jahren beträgt das Guthaben 20 000 €.

K3 **10 a)** Für die verbleibende Menge y des Jods in mg nach x Tagen gilt: $y = 15 \cdot 0{,}917^x$.

b) Menge des Jods nach 10 Tagen: $y = 15 \cdot 0{,}917^{10} \approx 6{,}31$ mg
Menge des Jods nach 20 Tagen: $y = 15 \cdot 0{,}917^{20} \approx 2{,}65$ mg

c)



Die Halbwertszeit des Isotops beträgt 8 Tage.

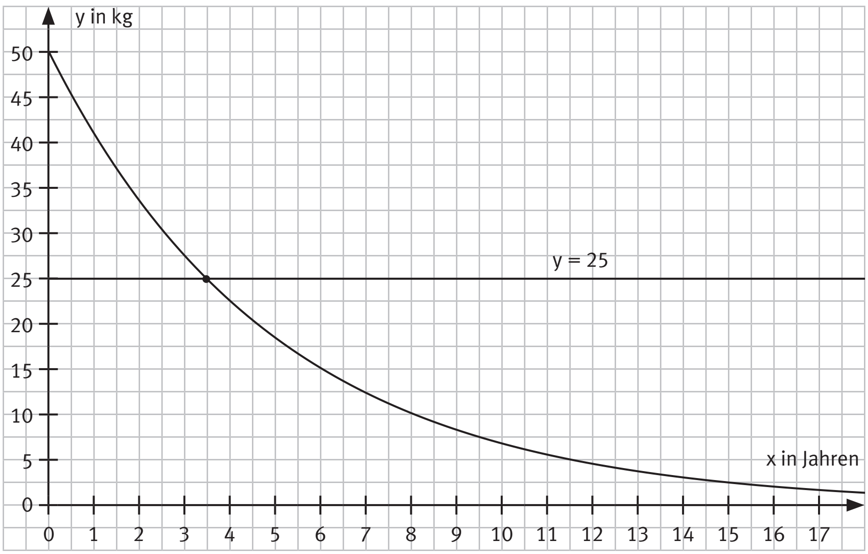
K3 **11 a)** $y = 50 \cdot 0{,}819^x$

x in Jahren	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y in kg	40,95	33,54	27,47	22,50	18,42	15,09	12,36	10,12	8,29	6,79

Zeichnung siehe Teilaufgabe c)

b) x = 12: $y = 50 \cdot 0{,}819^{12} \approx 4{,}55$ (kg)
x = 16: $y = 50 \cdot 0{,}819^{16} \approx 2{,}05$ (kg)

c)



Die Halbwertszeit beträgt ca. 3,5 Jahre bzw. 3 Jahre und 183 Tage.

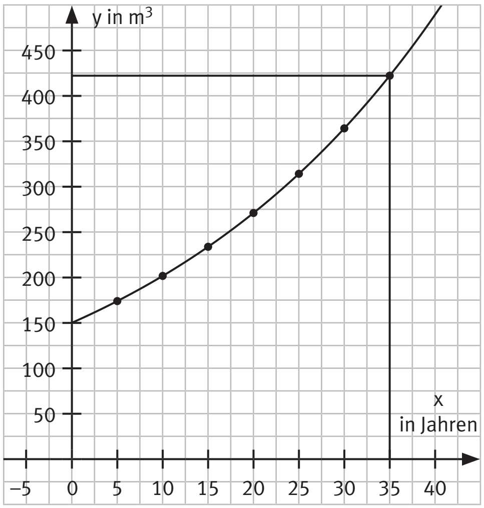
K3 **12** **a)** Für den Holzbestand y in m³ nach x Jahren gilt: $y = 150 \cdot 1{,}03^x$.

b)

x in Jahren	0	5	10	15	20	25	30	35	40
y in m³	150	173,89	201,59	233,70	270,92	314,07	364,09	422,08	489,31

Zeichnung siehe **c)**

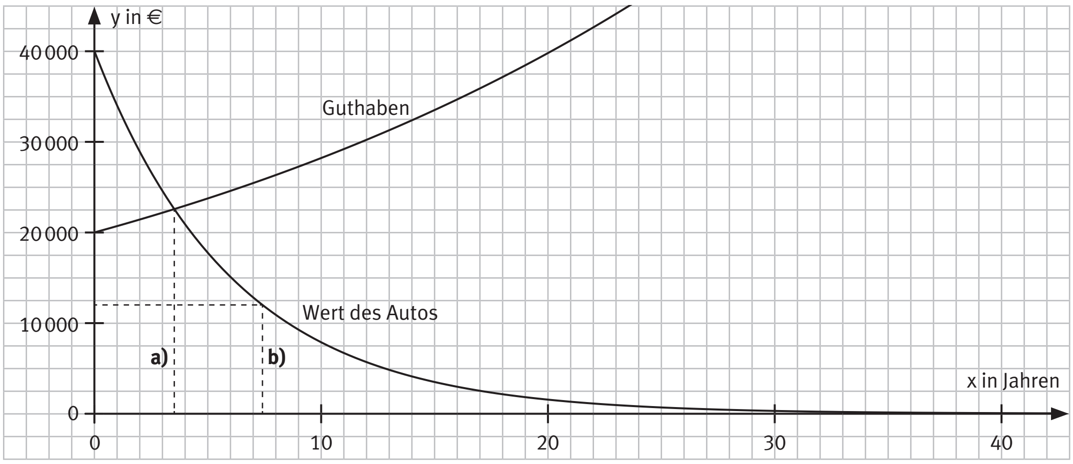
c)



Das Holzvolumen nach 35 Jahren beträgt etwa 420 m³.

K4 **13** **a)** Für das Guthaben y in € nach x Jahren gilt: $y = 20\,000 \cdot 1{,}035^x$
Für den Wert y des Wagens in € nach x Jahren gilt: $y = 40\,000 \cdot 0{,}85^x$
Zeichnung siehe **b)**
Nach etwa 3,5 Jahren hat das momentane Guthaben den Wert des Autos erreicht.

b) 30 % des Werts des Wagens sind 12 000 €.



Nach etwa 7,4 Jahren hat der Wert des Wagens um 70 % abgenommen.

Alltag

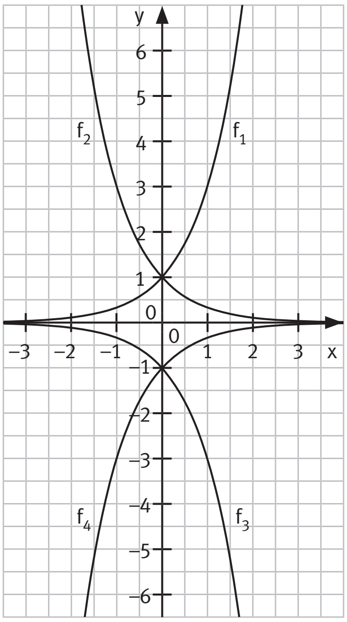
K5
- Die Werte der Tabelle sind von der konkreten Messung abhängig.
- Die Grafik und die Funktionsgleichung sind von der konkreten Messung abhängig.

Verständnis

KX ■ Diese Aussage ist richtig. Wird ein Graph an der y-Achse gespiegelt, ist dieser identisch mit dem anderen Graph. Daher sind die beiden Graphen kongruent.

KX ■ In allen drei Fällen erhält man wieder eine Exponentialfunktion.
Einzige Ausnahme: Für a = 1 erhält man bei Spiegelung des Graphen an y = x eine Gerade, die parallel zur y-Achse ist, also in dem Fall keinen Funktionsgraphen.

KX **1** **a)**



	f_1: $y = 3^x$	f_2: $y = 3^{-x}$	f_3: $y = -3^x$	f_4: $y = -3^{-x}$
1 Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
2 Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$
3 Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton fallend	streng monoton fallend	streng monoton steigend
4 Nullstellen	keine	keine	keine	keine
5 Symmetrie	keine	keine	keine	keine
6 Asymptoten	y = 0	y = 0	y = 0	y = 0

c) Lösungsmöglichkeit:
- Die Graphen von f_1 und f_2 liegen symmetrisch zur y-Achse.
- Die Graphen von f_3 und f_4 liegen symmetrisch zur y-Achse.
- Die Graphen von f_1 und f_3 liegen symmetrisch zur x-Achse.
- Die Graphen von f_2 und f_4 liegen symmetrisch zur x-Achse.
- Die Graphen von f_1 und f_4 liegen symmetrisch zum Ursprung O (0|0).
- Die Graphen von f_2 und f_3 liegen symmetrisch zum Ursprung O (0|0).

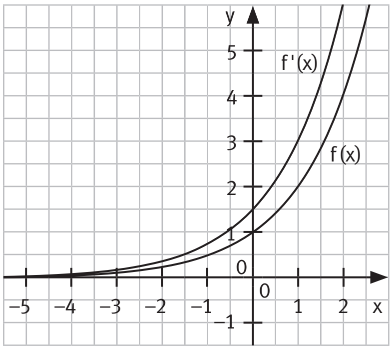
KX **2** **a)** $f(x) = 3^x$
$f^* = 3^{x+2}$
$f'(x) = -2 \cdot 3^{x+2}$

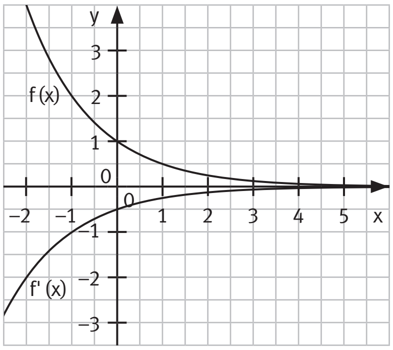
b) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$
$f^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 2$
$f'(x) = -2 \cdot \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x - 2\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x + 4$

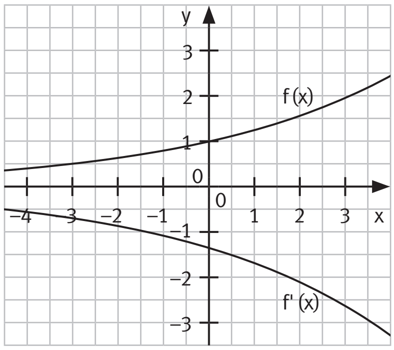
c) $f(x) = 0{,}5^x$
$f^* = 0{,}5^{x+3}$
$f'(x) = -1{,}5 \cdot 0{,}5^{x+3}$

KX **3 a)**

	1 $f'(x) = 1{,}5 \cdot 2^x$	2 $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$	3 $f'(x) = -\frac{4}{3} \cdot 0{,}8^{-x}$
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$
Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton steigend	streng monoton fallend
Nullstelle	keine	keine	keine
Schnittpunkt mit y-Achse	$(0 \mid 1)$	$\left(0 \mid -\frac{1}{2}\right)$	$\left(0 \mid -\frac{4}{3}\right)$
Symmetrie	keine	keine	keine
Asymptoten	$y = 0$	$y = 0$	$y = 0$

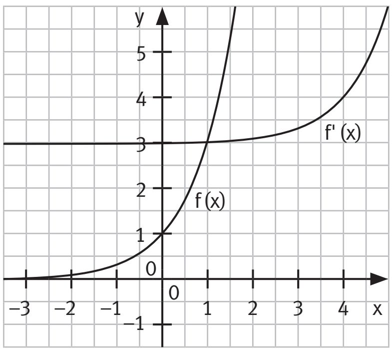


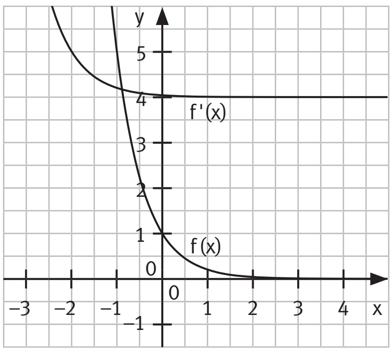


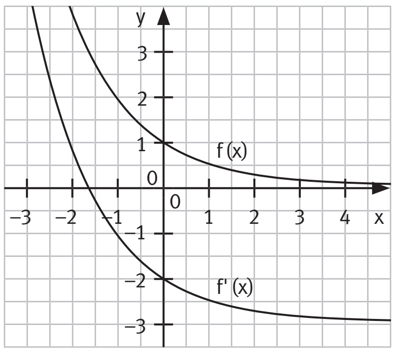


b)

	1 $f'(x) = 3^{x-4} + 3$	2 $f'(x) = 0{,}2^{x+2} + 4$	3 $f'(x) = 2^{-x} - 3$
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}$	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -3\}$
Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton fallend	streng monoton fallend
Nullstelle	keine	keine	$\approx -1{,}6$
Schnittpunkt mit y-Achse	$(0 \mid \approx 0{,}3)$	$(0 \mid \approx 4{,}0)$	$(0 \mid -2)$
Symmetrie	keine	keine	keine
Asymptoten	$y = 3$	$y = 4$	$y = -3$

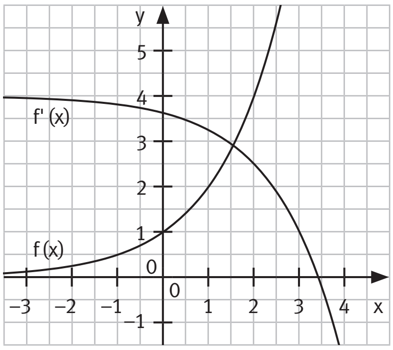


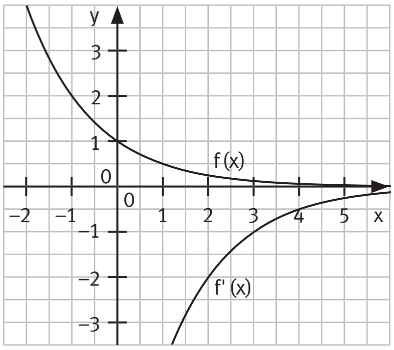




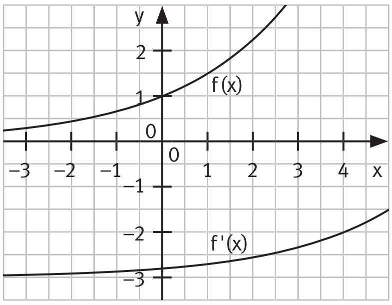
KX **4**

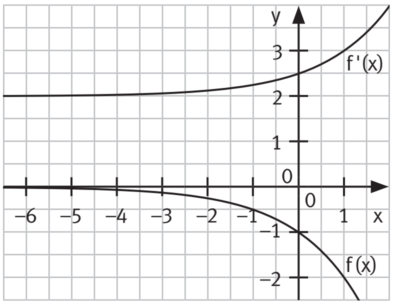
	a) $f'(x) = -1{,}5 \cdot 2^{x-2} + 4$	**b)** $f'(x) = 0{,}5^{x-3}$
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y < 4\}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$
Monotonie	streng monoton fallend	streng monoton steigend
Nullstelle	$\approx 3{,}4$	keine
Schnittpunkt mit y-Achse	$(0 \mid 3{,}625)$	$(0 \mid -8)$
Symmetrie	keine	keine
Asymptoten	$y = 4$	$y = 0$





	c) $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} - 3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{x-3} - 3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x-4} - 3$	**d)** $f'(x) = -0{,}5 \cdot -2^x + 2 = 0{,}5 \cdot 2^x + 2$
Definitionsmenge	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertemenge	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -3\}$	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$
Monotonie	streng monoton steigend	streng monoton steigend
Nullstelle	$\approx 6{,}7$	keine
Schnittpunkt mit y-Achse	$(0 \mid \approx 2{,}8)$	$(0 \mid 2{,}5)$
Symmetrie	keine	keine
Asymptoten	$y = -3$	$y = 2$





Verständnis

K1
- $\log_a a$ ist per Definition diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um a zu erhalten. Es gilt aber: $a^1 = a$. Also ist $\log_a a = 1$.

K1
- $\log_{10} 10 = n \Leftrightarrow 10^n = 10 \Leftrightarrow n = 1$
  $\log_{10} 100 = n \Leftrightarrow 10^n = 100 \Leftrightarrow n = 2$
  $\log_{10} 1000 = n \Leftrightarrow 10^n = 1000 \Leftrightarrow n = 3$
  Es fällt auf, dass der Logarithmus zur Basis 10 einer Zehnerpotenz gleich dem Exponenten dieser Zehnerpotenz ist: $\log_{10} 10^n = n$.

Kx **1**

	a)	b)	c)	d)
Potenz	$4^3 = 64$	$17{,}5^2 = 306{,}25$	$7^3 = 343$	$5^6 = 15\,625$
Wurzel	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[2]{306{,}25} = 17{,}5$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[6]{15\,625} = 5$
Logarithmus	$\log_4 64 = 3$	$\log_{17{,}5} 306{,}25 = 2$	$\log_7 343 = 3$	$\log_5 15\,625 = 6$

K5 **2** **a)** 1,89 **b)** 2,65 **c)** 1,67 **d)** 7,23
e) 2,62 **f)** 1,92 **g)** 3,45 **h)** 2,48

K5 **3** **a)** 4; 3; 9; 1; 5 **b)** −2; −4; −6; −3; −1

K5 **4** **a)** $5^x = 125 \Leftrightarrow x = 3$ **b)** $8^2 = x \Leftrightarrow x = 64$
c) $x^3 = 216 \Leftrightarrow x = 6$ **d)** $10^x = 1000 \Leftrightarrow x = 3$
e) $10^x = 0{,}00001 \Leftrightarrow x = -5$ **f)** $5^x = 230 \Leftrightarrow x = \log_5 230 \approx 3{,}38$

K5 **5** Die Werte sind teils auf zwei Dezimalen gerundet.
a) 4 **b)** 1,45 **c)** 3,26 **d)** −2,02 **e)** 2 **f)** 0,82
g) 0,35 **h)** −2,89 **i)** 0,96 **j)** 1,97 **k)** −2,33 **l)** − 0,65

K1 **6** **a)** $\lg 3 \approx 0{,}48$ $\lg 30 \approx 1{,}48$ $\lg 300 \approx 2{,}48$ $\lg 3000 \approx ...$
Es gilt: $\lg (3 \cdot 10^n) = \lg 3 + n \approx 0{,}48 + n$
b) $\lg 7 \approx 0{,}85$ $\lg 70 \approx 1{,}85$ $\lg 700 \approx 2{,}85$ $\lg 7000 \approx ...$
Es gilt: $\lg (7 \cdot 10^n) = \lg 7 + n \approx 0{,}85 + n$
c) $\lg 0{,}5 \approx -0{,}3$ $\lg 0{,}05 = -1{,}3$ $\lg 0{,}005 \approx -2{,}3$ $\lg 0{,}0005 \approx ...$
Es gilt: $\lg (0{,}5 \cdot 10^{-n}) = \lg 0{,}5 - n \approx -0{,}3 - n$

KX **7** **a)** $\lg\left(\frac{x}{y}\right)$ **b)** $\lg\left(\frac{x \cdot y^3}{z^2}\right)$ **c)** $\lg\left(\frac{a}{b}\right)$ **d)** $\lg (x^2 \cdot y)$
e) $\lg a + 1$ **f)** $\lg 5 - 2 \approx -1{,}30$ **g)** $\lg (3 \cdot a^2)$ **h)** 0,78

KX **8** **a)** $\lg a + \lg b + \lg c + \lg d$ **b)** $\lg a + \lg b - \lg c$ **c)** $2 \cdot \lg a + \lg b$
d) $4 \cdot (\lg a + \lg b)$ **e)** $3 \cdot (\lg a + \lg b)$ **f)** $(\lg a + \lg b) - (\lg 2 + \lg c)$
g) $\lg a + \frac{1}{2} \cdot \lg b - \lg c$ **h)** $\lg b - \frac{1}{3} \cdot \lg a$ **i)** $\lg 2 + 3 \cdot \lg a + \frac{1}{2} \cdot \lg 8a$

KX **9** **a)** 1,5850 **b)** 1,3652 **c)** 0,8340 **d)** 3,1699
e) 2,3103 **f)** 1,4370 **g)** 0,4165 **h)** −7,9695
i) 3,9147 **j)** 3,0192 **k)** 0,7325 **l)** −0,2224

KX **10** **a)** 8 **b)** 1 **c)** −2 **d)** 8 **e)** 0,73 **f)** 3,46

KX **11** **a)** Es sind individuelle Lösungen möglich.

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \log_a a^{m-n}$

$\log_a\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = m - n$

sei $b = a^m \Leftrightarrow m = \log_a b$

$c = a^n \Leftrightarrow n = \log_a c$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

K2 **12** **a)** $K_0 = 5000\,€$ $\quad n = 3$

$K_1 = 5000\,€ \cdot 1{,}03 = 5150\,€$

$K_2 = 5150\,€ \cdot 1{,}03 = 5304{,}50\,€$

$K_3 = 5304{,}50\,€ \cdot 1{,}03 \approx 5463{,}64\,€$

Bzw.: $K_3 = 5000\,€ \cdot 1{,}03^3 \approx 5463{,}64\,€$

b) $K_0 = 10\,000\,€$

$1\,000\,000\,€ = 10\,000\,€ \cdot 1{,}03^n$

$100 = 1{,}03^n$

$n = \log_{1{,}03} 100 \approx 155{,}8$

Mit 10 000 € Startkapital und 3 % Zinsen wäre man nach knapp 156 Jahren Millionär.

KX **13** **a)** $x_1 = +\sqrt[4]{625} = 5$; $x_2 = -\sqrt[4]{625} = -5$

b) $a_1 = +\sqrt[8]{6561} = 3$; $a_2 = -\sqrt[8]{6561} = -3$

c) $m = +\sqrt[5]{120} \approx 2{,}61$

d) $y_1 = +\sqrt[10]{72} \approx 1{,}53$; $y_2 = -\sqrt[10]{72} \approx -1{,}53$

e) $x = \log_4 256 = 4$

f) $b = \log_5 100 \approx 2{,}86$

g) $n = \log_{0{,}5} 0{,}05 \approx 4{,}32$

h) $y = \log_{0{,}2} 15 \approx -1{,}68$

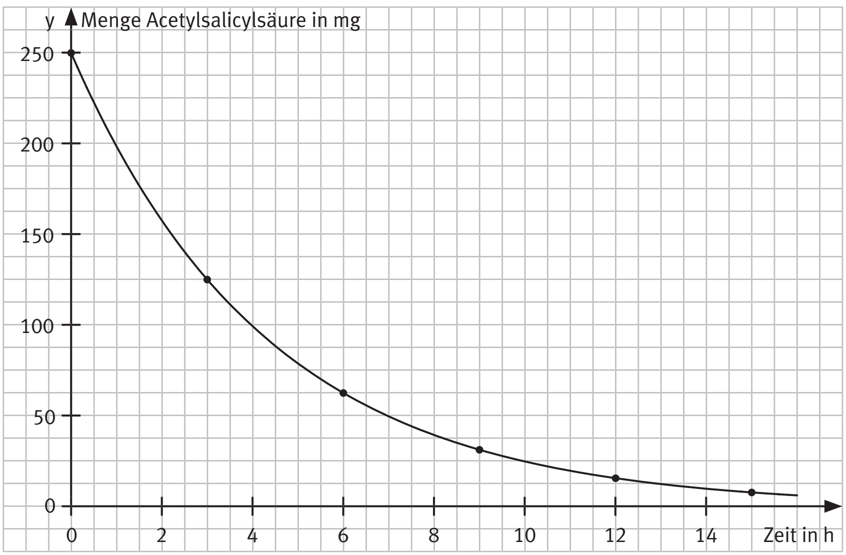
KX **14** **a)** $15\,mg \cdot 0{,}917^n = 7{,}5\,mg \Leftrightarrow n \approx 8$ Tage

Nach ca. 8 Tagen befindet sich nur noch 50 % des Jods im Körper des Patienten.

b) $15\,mg \cdot 0{,}917^n = 1\,mg \Leftrightarrow n \approx 31{,}25$ Tage

Nach 31,25 Tagen beträgt die Masse weniger als 1 mg.

KX **15** **a)**



b) $250\,mg \cdot a^3 = 125\,mg$

$a^3 = \frac{1}{2}$

$a = 0{,}794$

f: $y = 250 \cdot 0{,}794^t$ min in Jahren

$10 = 250 \cdot 0{,}794^t$

$t \approx 13{,}7\,h = 13\,h\,42\,min$

Nach ca. 13,7 Stunden befinden sich noch 10 mg im Körper.

Wissen

KX

- Die Ziffern vor dem Komma werden beim Rechenschieber als Kennzahlen und die Nachkommastellen als Mantissen bezeichnet. Um den Logarithmus eines Produkts zu berechnen, werden die Mantissen der logarithmierten Faktoren addiert. Wenn man nun die Länge der aneinandergereihten Mantissen misst, kommt man auf dasselbe Ergebnis.
- Die Genauigkeit liegt bei 3 Nachkommastellen.
- Als Grundlage dient hierfür $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$.
- Es sind individuelle Lösungen möglich.

Verständnis

KX ■ $y = \log_a x$ kann äquivalent zu $a^y = x$ umgeformt werden.
Für konstantes $a > 1$ wird der Exponent y bei größer werdendem x-Wert ebenfalls größer.
Für $0 < a < 1$ wird der Exponent y bei größer werdendem x-Wert kleiner.

KX ■ Die y-Achse mit der Gleichung $x = 0$ ist die Asymptote der Logarithmusfunktion, da der Funktionsgraph der y-Achse beliebig nahe kommt.

? Aufgabennummerierung.

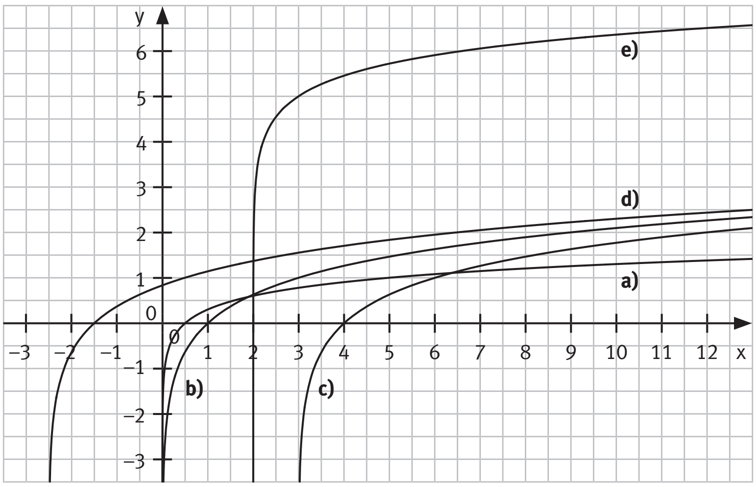
KX **1** **a)** $a = 3$ **b)** $a = 0{,}5$ **c)** $a = 1{,}5$ **d)** $a = 0{,}25$ **e)** $a = 5$

KX **2** **a)** $f'(x) = 2 \cdot \lg x + 2$ **b)** $f'(x) = -\lg(x-2)$

KX **2** **a)** $f'(x) = -3 \cdot \lg(x+4) + 2$ **b)** $f'(x) = 0{,}5 \cdot \lg(x-5) - 5$

KX **3** **a)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** Diese Funktion ist schon die Ausgangsfunktion.

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **e)** $k = 1{,}5;\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$



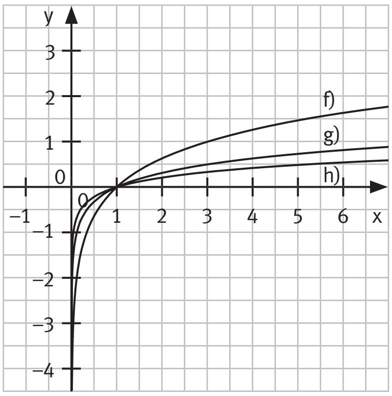
KX **4** In den vorliegenden Fällen entstehen die Graphen der Funktionen jeweils durch eine orthogonale Affinität. Exemplarisch wird die Rechnung in je einem Fall vorgeführt. Die weiteren Eigenschaften (Asymptoten, …) können den Graphen entnommen werden.

a) f: $y = \log_3 x$
g: $y = \log_9 x$
$9^y = x$
$(3^2)^y = x$
$(3^y)^2 = x$
$3^y = x^{\frac{1}{2}}$
$y = \log_3 x^{\frac{1}{2}}$
$y = \frac{1}{2} \log_3 x$
h: $y = \log_{27} x = \frac{1}{3} \log_3 x$

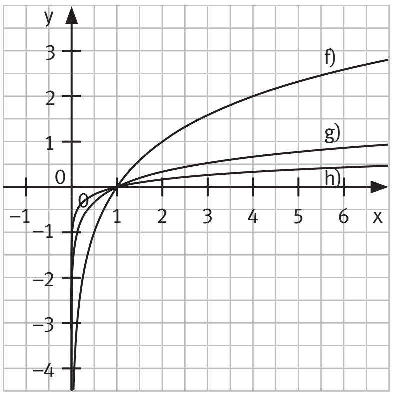
b) f: $y = \log_2 x$
g: $y = \log_8 x$
$8^y = x$
$(2^3)^y = x$
$(2^y)^3 = x$
$2^y = x^{\frac{1}{3}}$
$y = \log_3 x^{\frac{1}{3}}$
$y = \frac{1}{3} \log_2 x$
h: $y = \log_{64} x = \frac{1}{6} \log_2 x$

c) f: $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
g: $y = \log_{\frac{1}{4}} x$
$\left(\frac{1}{4}\right)^y = x$
$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^y = x$
$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^y\right)^2 = x$
$\left(\frac{1}{2}\right)^y = x^{\frac{1}{2}}$
$y = \log_{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$
$y = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x$
h: $y = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} x$

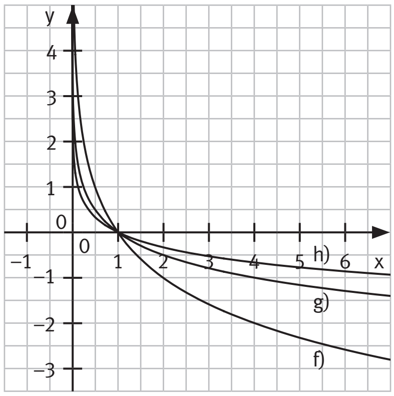
a)



b)



c)



KX **5**

	a)		b)		c)	
	f_1	f_2	f_1	f_2	f_1	f_2
Definitionsmenge $\mathbb{D}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2{,}5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5{,}5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$
Wertemenge $\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Asymptoten	$x = 2{,}5$	$x = 5{,}5$	$x = -1$	$x = 3$	$x = 2$	$x = 6$
Schnittpunkt	$S\,(6{,}5 \mid 2{,}5)$		$S\,(7 \mid 3)$		$S_1\,(7 \mid 5)$; $S_2\,(22 \mid 6{,}72)$	

a) $\log_4 (x - 2{,}5) + 1{,}5 = \log_4 (x - 5{,}5) + 2{,}5$

$\log_4 (x - 2{,}5) - \log_4 (x - 5{,}5) = 2{,}5 - 1{,}5$

$$\log_4 \left(\frac{x - 2{,}5}{x - 5{,}5}\right) = 1$$

$$\frac{x - 2{,}5}{x - 5{,}5} = 4$$

$$x - 2{,}5 = 4(x - 5{,}5)$$

$$x - 2{,}5 = 4x - 22$$

$$19{,}5 = 3x$$

$$x = 6{,}5$$

$\log_4 (6{,}5 - 2{,}5) + 1{,}5 = \log_4 + 1{,}5 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$

$\Rightarrow S\,(6{,}5 \mid 2{,}5)$

b) $\log_2 (x + 1) = \log_2 (x - 3) + 1$

$\log_2 (x + 1) - \log_2 (x - 3) = 1$

$$\log_2 \left(\frac{x + 1}{x - 3}\right) = 1$$

$$\frac{x + 1}{x - 3} = 2$$

$$x + 1 = 2x - 6$$

$$x = 7$$

$\log_2 (7 + 1) = \log_2 8 = 3$

$\Rightarrow S\,(7 \mid 3)$

c) $2 \log_5 (x - 2) + 3 = \log_5 (x - 6) + 5$

$\log_5 (x - 2)^2 - \log_5 (x - 6) = 2$

$$\log_5 \left(\frac{(x - 2)^2}{x - 6}\right) = 2$$

$$\frac{(x - 2)^2}{x - 6} = 5^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25(x - 6)$$

$$x^2 - 4x + 4 = 25x - 150$$

$$x^2 - 29x + 154 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4 \cdot 1 \cdot 154}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{29 \pm 15}{2}$$

$x_1 = 7$

$2 \log_5 (7 - 2) + 3$

$= 2 \log_5 5 + 3$

$= 2 + 3 = 5$

$\Rightarrow S_1\,(7 \mid 5)$

$x_2 = 22$

$2 \log_5 (22 - 2) + 3$

$= 2 \log_5 20 + 3$

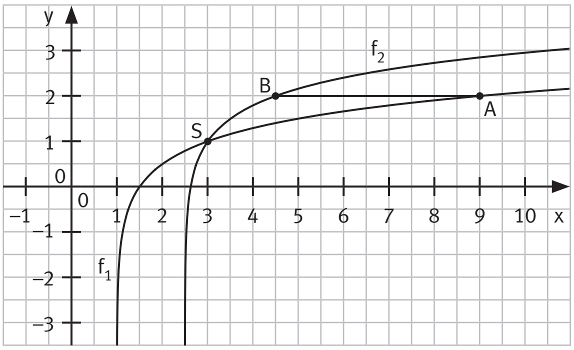
$= 4 \log_5 2 + 5$

$\Rightarrow S_2\,(22 \mid 6{,}72)$

KX **6** **a)**

	Definitionsmenge	Wertemenge	Asymptote
f_1	$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$	Asymptote: $x = 1$
f_2	$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2{,}5\}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$	Asymptote: $x = 2{,}5$

b)



Schnittpunkt: S (3 | 1)

$f_1(3) = \log_4(3 - 1) + 0{,}5 = \log_4 2 + 0{,}5 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$

$f_2(3) = \log_4(3 - 2{,}5) + 1{,}5 = \log_4 0{,}5 + 1{,}5 = -0{,}5 + 1{,}5 = 1$

c) Der Grafik kann man entnehmen: $x_A > x_B$

Für x_1 gilt: $x_A = x_B + 4{,}5$

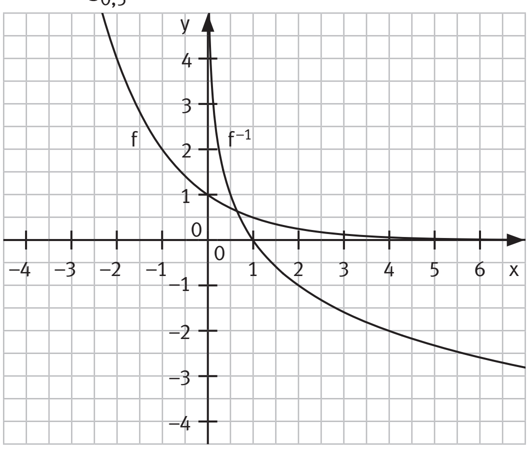
$$\log_4(x_A - 1) + 0{,}5 = \log_4(x_B - 2{,}5) + 1{,}5$$
$$\log_4(x_B + 4{,}5 - 1) + 0{,}5 = \log_4(x_B - 2{,}5) + 1{,}5$$
$$\log_4(x_B + 3{,}5) + 0{,}5 = \log_4(x_B - 2{,}5) + 1$$
$$\log_4(x_B + 3{,}5) - \log_4(x_B - 2{,}5) = 1$$
$$\log_4\left(\frac{x_B + 3{,}5}{x_B - 2{,}5}\right) = 1$$
$$\frac{x_B + 3{,}5}{x_B - 2{,}5} = 4$$
$$x_B + 3{,}5 = 4x_B - 10$$
$$13{,}5 = 3x_B$$
$$x_B = 4{,}5$$

$f_2(4{,}5) = \log_4(4{,}5 - 2{,}5) + 1{,}5$
$= \log_4 2 + 1{,}5$
$= 0{,}5 + 1{,}5 = 2$

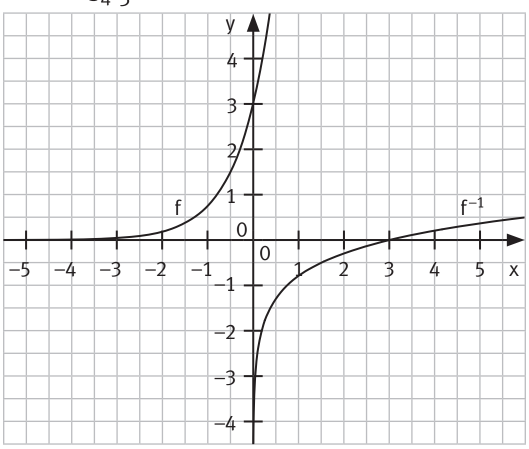
$\Rightarrow$ B (4,5 | 2) und A (9 | 2)

KX **7** Die Eigenschaften der Funktionen bzw. ihrer Graphen können den Darstellungen entnommen werden.

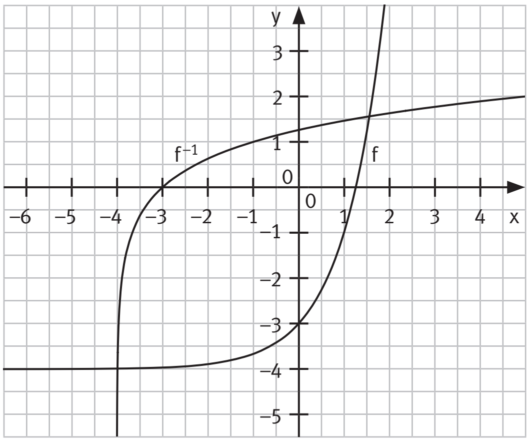
a) ① $f^{-1} = \log_{0,5} x$



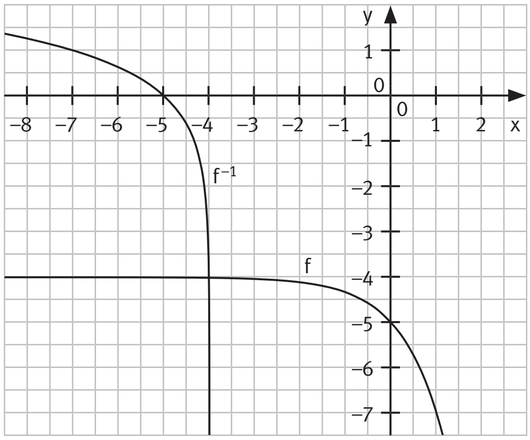
② $f^{-1} = \log_4 \frac{x}{3}$



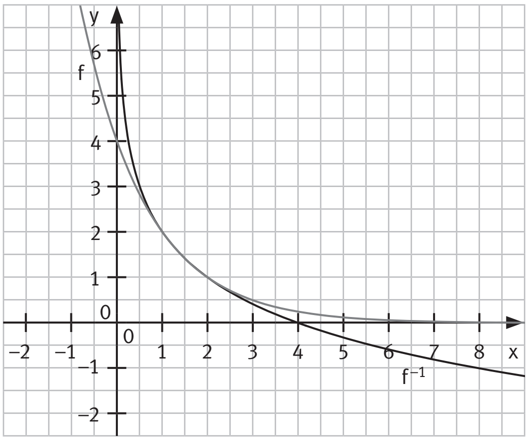
3 $f^{-1} = \log_3(x + 4)$



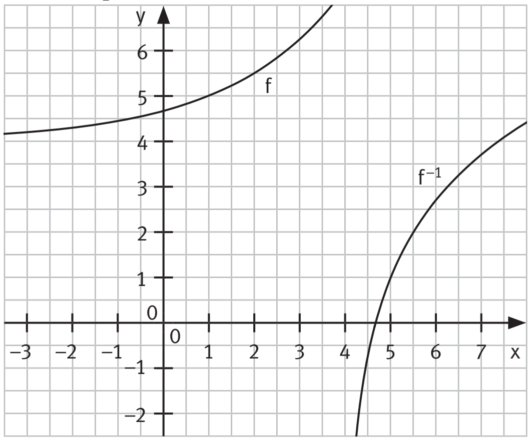
4 $f^{-1} = \log_3(-x - 4)$



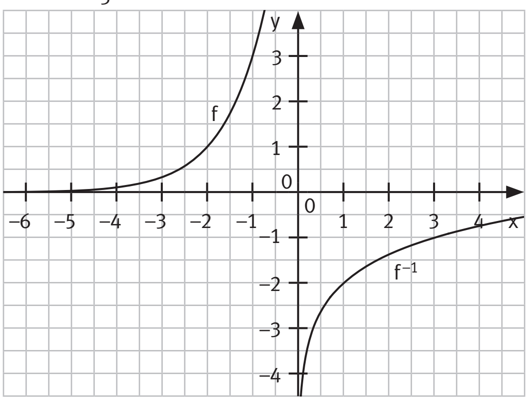
5 $f^{-1} = \log_{0,5}\left(\frac{x}{2}\right) + 1$



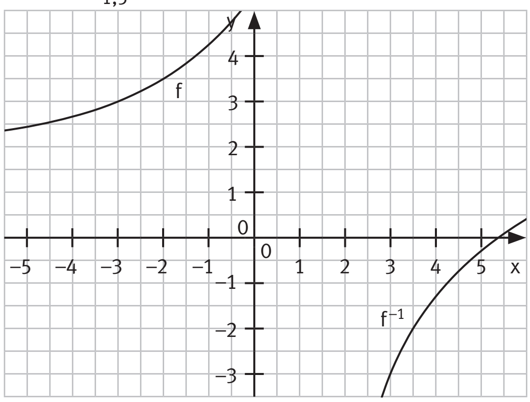
6 $f^{-1} = \log_{\frac{3}{2}}(x - 4) + 1$



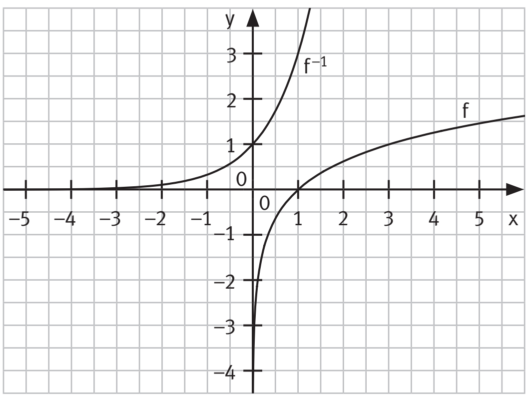
7 $f^{-1} = \log_3(x) - 2$



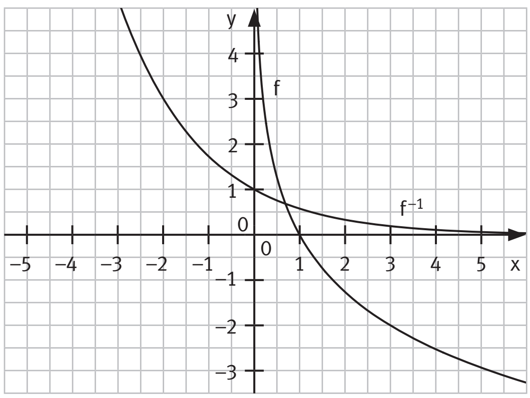
8 $f^{-1} = \log_{1,5}(x - 2) - 3$



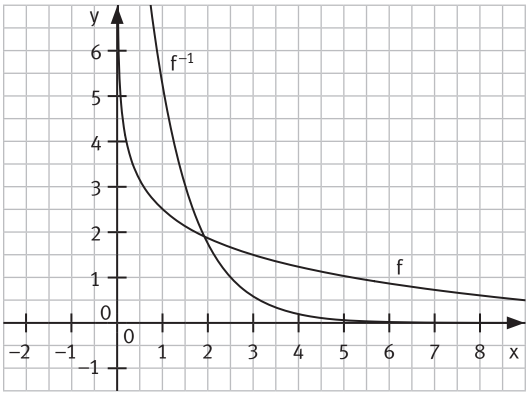
b) 1 $f^{-1} = 3^x$



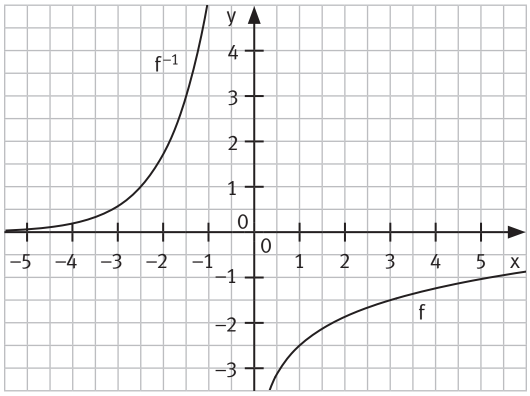
2 $f^{-1} = 3^{-\frac{x}{2}}$



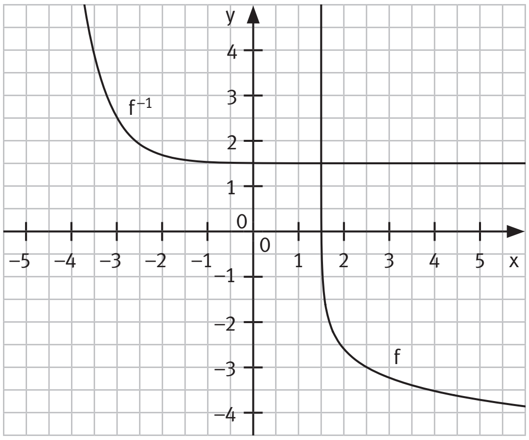
3 $f^{-1} = 3^{2,5-x}$



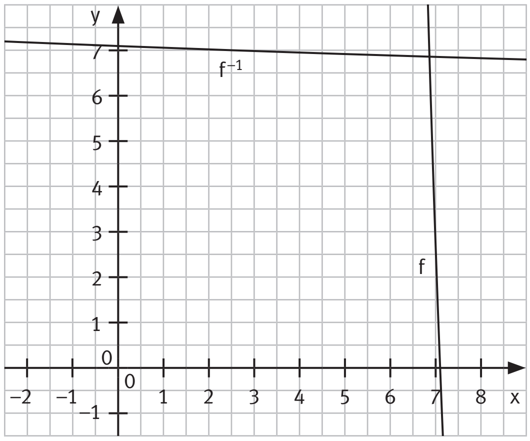
4 $f^{-1} = 3^{x+2,5}$



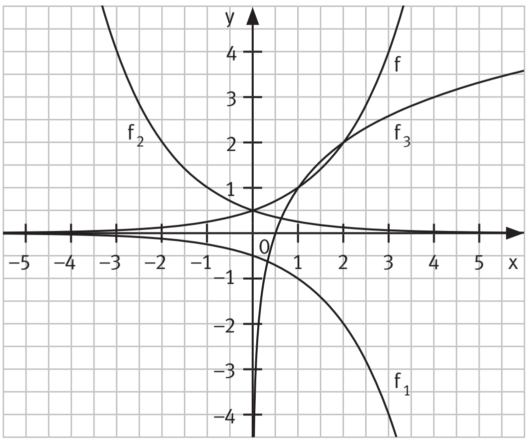
5 $f^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+3}{0,4}} + 1{,}5$



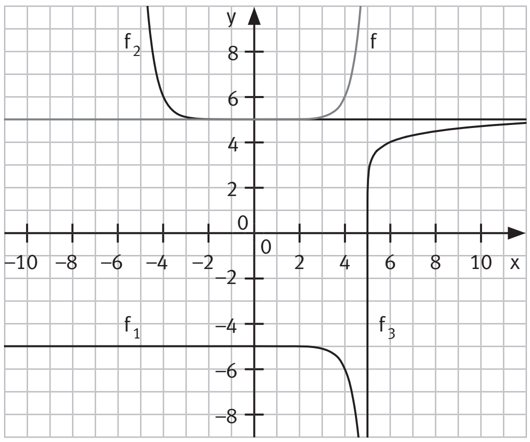
6 $f^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x-2}{8}} + 6$



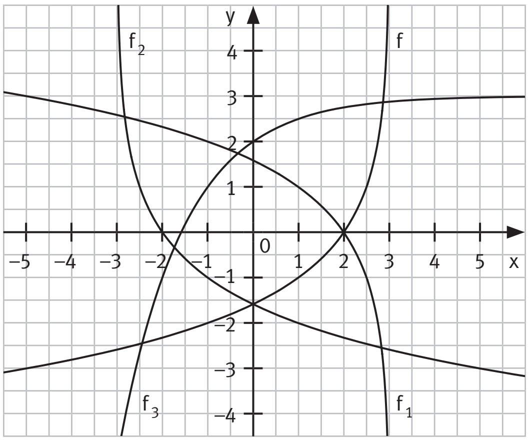
KX **8** **a)** $f_1(x) = -2^{x-1}$
$f_2(x) = 2^{-x-1}$
$f_3(x) = \log_2(x) + 1$



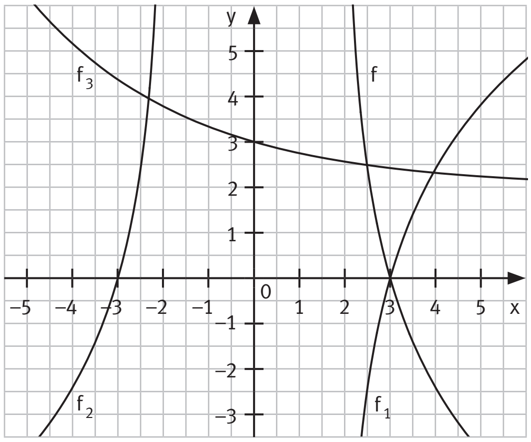
b) $f_1(x) = -10^{x-4} - 5$
$f_2(x) = 10^{-x-4} + 5$
$f_3(x) = \log_{10}(x-5) + 4$



c) $f_1(x) = -\log_{0,5}(3 - x)$
$f_2(x) = \log_{0,5}(3 + x)$
$f_3(x) = 3 - 0{,}5^x$



d) $f_1(x) = -\log_{0,75}(x - 2)$
$f_2(x) = \log_{0,75}(-x - 2)$
$f_3(x) = 0{,}75^x + 2$

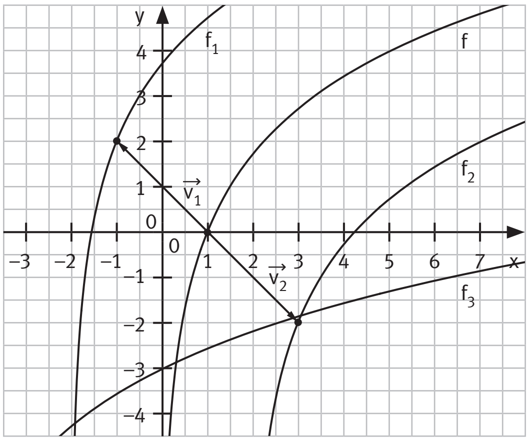


KX **9** **a)**

	Nullstelle	Definitionsmenge	Wertemenge	Asymptote
f_1	$N\left(-\frac{14}{9}\middle\vert 0\right)$	$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{14}{9}\right\}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$	$x = -2$
f_2	$N\left(\frac{17}{4}\middle\vert 0\right)$	$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{17}{4}\right\}$	$\mathbb{W} = \mathbb{R}$	$x = 2$

b) Lösungsmöglichkeit: f: $y = \log_{1,5} x$
f_1 ist durch Parallelverschiebung von f mit dem Vektor $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und f_2 durch Parallelverschiebung von f mit $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ entstanden.

c) Geometrische Argumentation: Die beiden Funktionsgraphen wurden entlang der Geraden mit der Gleichung $y = -x$ verschoben, und zwar in unterschiedliche Richtungen. Sie rücken deshalb voneinander weg und schneiden sich nie, da beide Graphen streng monoton steigend sind.



$f_1(x) = f_2(x)$
$\Leftrightarrow \quad \log_{1,5}(x + 2) + 2 = \log_{1,5}(x - 2) - 2$
$\Leftrightarrow \log_{1,5}(x + 2) - \log_{1,5}(x - 2) = -4$
$\Leftrightarrow \quad \log_{1,5}\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = -4$
$\Leftrightarrow \quad 1{,}5^{-4} = \frac{x+2}{x-2}$
$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{194}{65} \approx -2{,}98$

Da der Wert weder zur Definitionsmenge von f_1 noch zu der von f_2 gehört, liegt kein Schnittpunkt der beiden Graphen vor.

d) $S_1(-1{,}92 \mid -4{,}23)$ $\quad S_2(3{,}06 \mid -1{,}85)$

KX

10 a) f_2 entstand durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) f_2 entstand durch eine Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) f_2 entstand durch eine orthogonale Affinität mit k = 2 und eine anschließende Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2\lg 3 + 3 \end{pmatrix}$.

d) f_2 entstand durch eine Parallelverschiebung von f_1 um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und einer Spiegelung an der y-Achse.

Alltag

KX

- ① $\log_{10}\left(\frac{1000\, I_0}{I_0}\right) = \log_{10} 1000 = 3$ ② $\log_{10}\left(\frac{10\,000\, I_0}{I_0}\right) = \log_{10} 10\,000 = 4$

  ③ $\log_{10}\left(\frac{100\,000\, I_0}{I_0}\right) = \log_{10} 100\,000 = 5$ ④ $\log_{10}\left(\frac{1\,000\,000\, I_0}{I_0}\right) = \log_{10} 1\,000\,000 = 6$
- Ein Beben der Stärke 5 ist 10-mal stärker als eines der Stärke 4.
- $I = 10^{7,4}\, I_0 \approx 25\,119\,000\, I_0$

  $I = 10^{8,5}\, I_0 \approx 316\,228\,000\, I_0$

  $I = 10^{9}\, I_0$
- Es sind individuelle Lösungen möglich.

Verständnis

KX ■ Die Aussage ist aufgrund der Potenzgesetze richtig.
KX ■ Diese Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$2^{x+5} = 4 \quad | \log_2$
$x + 5 = 2 \quad | -5$
$x = -3$

KX **1** Die Grafiken sind hier nicht angegeben.
a) $x = 6$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = 4$ **d)** $x = 2$
e) $x = 1$ **f)** $x = -1$ **g)** $x = 2{,}5$ **h)** $x = -0{,}5$

KX **2** **a)** $2^{x+1} = 2^2 \Leftrightarrow x = 5$ **b)** $3^{x-5} = 3^4 \Leftrightarrow x = 9$
c) $2^{2x+3} = 2^{-5} \Leftrightarrow x = -4$ **d)** $3^{5x-1,5} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow x = 0{,}45$

KX **3** $10 = 2^x \Leftrightarrow x \approx 3{,}322$
$20 = 2^x \Leftrightarrow x \approx 4{,}322$

KX **4** **a)** $L = \{0{,}631\}$ **b)** $L = \{-0{,}161\}$ **c)** $L = \{0{,}568\}$ **d)** $L = \{0{,}203\}$
e) $L = \{-0{,}5\}$ **f)** $L = \{-1\}$ **g)** $L = \{1\}$

KX **5** **a)** $x \approx 2{,}096$ **b)** $x \approx 0{,}848$ **c)** $x \approx 0{,}047$ **d)** $x \approx -3{,}071$
e) $x \approx 2{,}678$ **f)** $x = -0{,}022$ **g)** $x = 2$ **h)** $x \approx 4{,}302$
i) $x \approx -8{,}14$ **j)** $L = \{\,\}$ **k)** $x = \frac{1}{3}$ **l)** $x = -1$

KX **6** Von der letzten in die vorletzte Zeile wird vermeintlich die (x + 5)-te Wurzel gezogen, was allerdings für $x = -5$ nicht zulässig ist. Um die Gleichung zu lösen, kann man durch 3^{x+5} teilen, sodass man $1 = \left(\frac{3}{4}\right)^{x+5}$ erhält, also $x = -5$. Dies kann man allerdings auch schon in der ersten Zeile ablesen.

KX **7** **a)** 1 $S(0|2)$ 2 $S\left(0\middle|-3\frac{1}{3}\right)$; $N(-1{,}63|0)$
3 $S\left(0\middle|-\frac{5}{9}\right)$; $N(0{,}74|0)$ 4 $S(0|60{,}5)$; $N(2{,}14|0)$
b) 1 $H(0{,}81|3{,}5)$ 2 $H(-1{,}2|-1{,}5)$
3 $H(9|8747)$ 4 $H(5|-1{,}98)$

KX **8** **a)** $x < 11{,}189$ **b)** $x < 4{,}683$

KX **1** **a)** 0 **b)** 0,43 **c)** 1,43 **d)** 3 **e)** –1,43
f) –0,86 **g)** –0,57 **h)** –0,43 **i)** 1 **j)** 1,09

KX **2** Die Werte sind auf drei Nachkommastellen gerundet.
a) x = 6,548 **b)** x = 2,305 **c)** x = 0,324 **d)** x = –0,631
e) x = 0,956 **f)** x = 4,287 **g)** x = 3,684 **h)** x = 0,415

KX **3** **a)** x = 1,387 **b)** x = 0,455 **c)** x = 2,024
d) x = –4,326 **e)** x = 0,343 **f)** x = 0,826

KX **4** **a)**

	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -3\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -5\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 7\}$
Asymptote	y = 0	y = 0	y = 5,5	y = –3	y = –5	y = 7
Nullstellen	keine	keine	keine	S (2,71 | 0)	S (0,84 | 0)	keine

b)

	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1,5\}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Asymptote	x = 0	x = 0	x = 2	x = 5	x = –4	x = 1,5
Nullstellen	S (1 | 0)	S (243 | 0)	S (3 | 0)	S (6 | 0)	S (–4 | 0)	S (2,04 | 0)

KX **5** **a)** 1 $f'(x) = 0{,}7^{x+5} + 3$ 2 $f'(x) = 2^{x+3} + 2$ 3 $f'(x) = 0{,}7^{x-7} - 0{,}5$
4 $f'(x) = 0{,}5 \cdot 4^{x+2{,}5} - 6$ 5 $f'(x) = 1{,}5 \cdot 0{,}8^{x-7} + 8$ 6 $f'(x) = 9 \cdot 3^{x+2} - 2$
7 $f'(x) = \log_{0{,}5}(x-4) - 3$ 8 $f'(x) = \log_2(x-2{,}5) - 2$ 9 $f'(x) = \log_{\frac{3}{4}}(x+7) + 6$
10 $f'(x) = \log_{\frac{3}{4}}(x-5) + 4{,}5$ 11 $f'(x) = \log_{1{,}5}(x+9) - 10$ 12 $f'(x) = \log_3(x-9) + 1{,}5$

b) bis **d)**

	1		2		3	
Funktion	f	f'	f	f'	f	f'
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}^+$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 3\}$	$\mathbb{R}^+$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 1,5\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -0,5\}$
Asymptote	y = 0	y = 3	y = 0	y = 2	y = 1,5	y = –0,5
Nullstelle	–	–	–	–	–	N (8,94 | 0)
Schnittpunkt y-Achse	T (0 | 1)	T (0 | 3,17)	T (0 | 1)	T (0 | 10)	T (0 | 4,42)	T (0 | 11,64)
Schnittpunkt von f und f'	S (–3,6 | 3,61)		–		S (4,29 | 2,13)	

	4		5		6	
Funktion	f	f'	f	f'	f	f'
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{W}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -6\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 3\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 8\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$
Asymptote	y = –2	y = –6	y = 3	y = 8	y = 2	y = –2
Nullstelle	N (1 | 0)	N (–0,71 | 0)	–	–	–	N (–3,37 | 0)
Schnittpunkt y-Achse	T (0 | –1,5)	T (0 | 10)	T (0 | 5,34)	T (0 | 15,15)	T (0 | 5)	T (0 | 79)
Schnittpunkt von f und f'	S (–0,98 | –1,87)		–		S (–2,7 | 2,15)	

	7		8		9	
Funktion	f	f'	f	f'	f	f'
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$	$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2{,}5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -7\}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Asymptote	$x = 0$	$x = 4$	$x = 0$	$x = 2{,}5$	$x = -3$	$x = -7$
Nullstelle	N (1 | 0)	N (4,13 | 0)	N (1 | 0)	N (6,5 | 0)	N (–2 | 0)	N (–1,38 | 0)
Schnittpunkt y-Achse	–	–	–	–	T (0 | –3,82)	T (0 | –0,76)
Schnittpunkt von f und f'	S (4,57 | –2,19)		–		S (–2,13 | 0,5)	

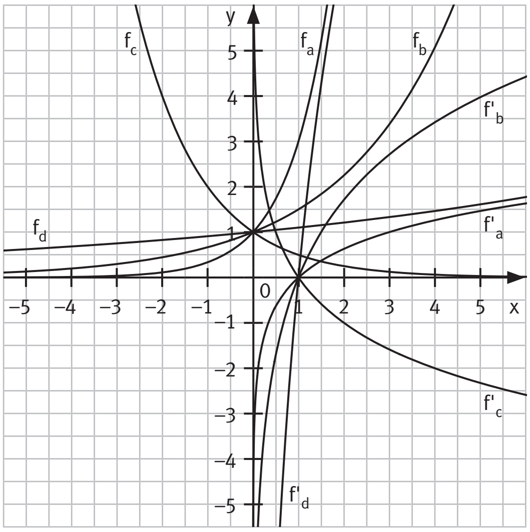
	10		11		12	
Funktion	f	f'	f	f'	f	f'
$\mathbb{D}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -7\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -9\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 9\}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Asymptote	$x = 5$	$x = 5$	$x = -7$	$x = -9$	$x = 1$	$x = 9$
Nullstelle	N (7,05 | 0)	N (8,65 | 0)	N (–1,94 | 0)	N (48,67 | 0)	N (1,19 | 0)	N (9,19 | 0)
Schnittpunkt y-Achse	–	–	T (0 | 0,8)	T (0 | 4,58)	–	–
Schnittpunkt von f und f'	–		S (–6,81 | –8,06)		–	

KX **6** **a)** $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Asymptote: $x = -3$
Nullstelle:
$\Leftrightarrow \; 0 = \log_5 (x + 3) - 5$
$\Leftrightarrow \; 5 = \log_5 (x + 3)$
$\Leftrightarrow 5^5 = x + 3$
$\Leftrightarrow \; x = 3122 \quad \Rightarrow N (3122 \mid 0)$

b) $f^{-1} = 5^{x+5} - 3$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -3\}$
Asymptote: $y = -3$

c) $f_1 = f_2$
$\Leftrightarrow \quad \log_5 (x + 3) - 5 = \log_5 (x - 4) - 3$
$\Leftrightarrow \log_5 (x + 3) - \log_5 (x - 4) = 2$
$\Leftrightarrow \quad \log_5 \left(\frac{x+3}{x-4}\right) = 2$
$\Leftrightarrow \quad 5^2 = \frac{x+3}{x-4}$
$\Leftrightarrow \quad 25x - 100 = x + 3$
$\Leftrightarrow \quad x = 4{,}29 \quad \Rightarrow S (4{,}29 \mid -3{,}77)$

KX **7**



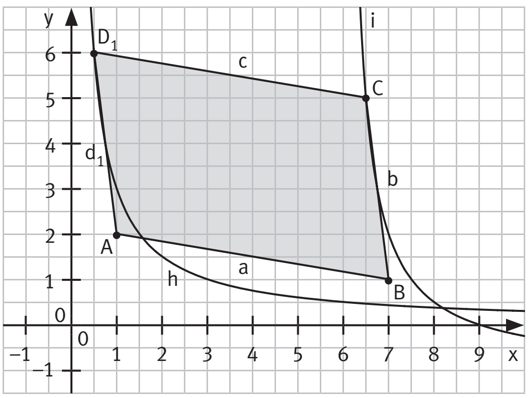
a) $f^{-1} = \log_3 x$
b) $f^{-1} = \log_{1,5} x$
c) $f^{-1} = \log_{0,5} x$
d) $f^{-1} = \log_{1,1} x$

KX **8** **a)** 1 $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 3^{x+2} + 5$ 2 $f'(x) = -0,4 \cdot 0,7^{3-x} - 1$
b) 1 $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (3^{x+3} - 5)$ 2 $f'(x) = 4 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 2\right]$

KX **9** $f(x_1 + x_2 - x_3) = a^{x_1 + x_2 - x_3}$
$= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot a^{-x_3}$
$= \frac{a^{x_1} \cdot a^{x_2}}{a^{x_3}} = \frac{f(x_1) \cdot f(x_2)}{f(x_3)}$

KX **10** **a)** $f_1(-x) = a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$f_2(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$
b) Die beiden Funktionsgraphen liegen symmetrisch zur y-Achse.

KX **11** **a)**



Für $0 < x < 1{,}58$ existieren die Parallelogramme ABC_nD_n.
b) Die Funktion i entsteht durch die Parallelverschiebung der Funktion h um den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$:
i: $y = \frac{3}{x-6} - 1$

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD_n} = \begin{pmatrix} x-1 \\ \frac{3}{x}-2 \end{pmatrix}$

$A(x) = \begin{vmatrix} 6 & x-1 \\ -1 & \frac{3}{x}-2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \left(\frac{3}{x}-2\right) - (-1) \cdot (x-1)$

$A(x) = \frac{18}{x} - 12 + x - 1$

$A(x) = x + \frac{18}{x} - 13$

$A(x) = 23{,}5$

$x + \frac{18}{x} - 13 = 23{,}5 \quad | -23{,}5$

$x + \frac{18}{x} - 36{,}5 = 0 \quad | \cdot \frac{x}{x}$

$x^2 - 36{,}5x + 18 = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = 36$ (entfällt wegen Umlaufxxxxxx der Parallelogramme ABC_nD_n)

Für $x = \frac{1}{2}$ erhält man ein Parallelogramm mit Flächeninhalt 23,5 FE.

PDF S.28 unten: nicht lesbar ((2x))

d) Das Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn das Produkt der Steigungen der Geraden AB und AD_n -1 ergibt:

$m_{AB} = -\frac{1}{6}$

$\Rightarrow m_{AD_n} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-\frac{3}{x}}{1-x}$

$\frac{2-\frac{3}{x}}{1-x} = 6$

$2 - \frac{3}{x} = 6 - 6x$

$6x - 4 - \frac{3}{x} = 0$

$6x^2 - 4x - 3 = 0$

$x_1 = \frac{-\sqrt{22}+2}{6}; \quad x_2 = \frac{\sqrt{22}+2}{6}$

$x_1 < 0$; entfällt

Für $x = \frac{\sqrt{22}+2}{6} \approx 1{,}12$ erhält man ein Rechteck ABCD.

KX **12 a)** f: $y = k \cdot a^x$, wobei k der Anfangsbestand im Jahr 1960 ist und x die Zeit in Jahren, die seit 1960 vergangen ist.

$y = 3{,}00 \cdot a^x$

$6{,}90 = 3{,}00 \cdot a^{50}$

$a \approx 1{,}017$

$y = 3{,}00 \cdot 1{,}017^x$

b) Bevölkerung im Jahr 2015: $3{,}00 \cdot 1{,}017^{55} \approx 7{,}58$

Die Abweichung beträgt 2,88 %.

c) 2020: $3{,}00 \cdot 1{,}017^{60} \approx 8{,}25$

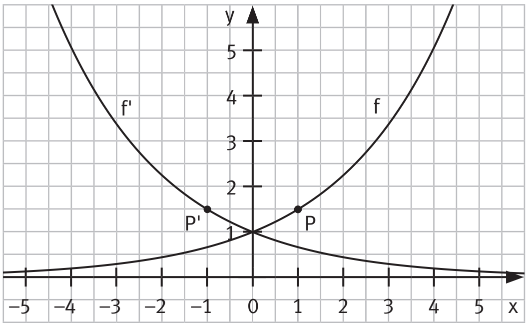
2030: $3{,}00 \cdot 1{,}017^{70} \approx 9{,}76$

2100: $3{,}00 \cdot 1{,}017^{140} \approx 31{,}77$

Stand heute ist es schwer vorstellbar, dass die Weltbevölkerung im gleichen Maße wächst. Wahrscheinlicher ist, dass das Wachstum schwächer wird, vielleicht sogar stagniert, weil bedingt durch den Klimawandel und Naturkatastrophen beispielsweise die Ernährungssituation für die Weltbevölkerung schwieriger wird.

K5 **13 a)** Zeichnung siehe **b)**

b)



c) Da P auf f und P' auf f' liegt, gilt:

$P(1|1{,}5) \xmapsto{\text{y-Achse}} P'(-1|1{,}5)$

Einsetzen von P' in die allgemeine Funktionsgleichung $y = a^x$ der Exponentialfunktion ergibt:

$1{,}5 = a^{-1} \Leftrightarrow 1{,}5 = \frac{1}{a} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$

Die Funktionsgleichung von f' lautet: $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

d)

	$\mathbb{D}$	$\mathbb{W}$	Asymptote
f	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	$y = 0$
f'	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$	$y = 0$

K6 **14 a)**

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f_1: $y = 0{,}25 \cdot 0{,}5^x$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13	0,06	0,03	0,02	0,01
f_2: $y = 0{,}5 \cdot 0{,}5^x$	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13	0,06	0,03	0,02
f_3: $y = 1 \cdot 0{,}5^x$	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13	0,06	0,03
f_4: $y = 2 \cdot 0{,}5^x$	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13	0,06
f_5: $y = 4 \cdot 0{,}5^x$	128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,13

b) Bei den Funktionen f_1 bis f_5 handelt es sich um Funktionen vom Typ $y = k \cdot 0{,}5^x$.
Da sich k immer verdoppelt, verdoppeln sich auch die Funktionswerte.
Die Graphen von f_1 und f_2 sind gegenüber dem von f_3 gestaucht, diejenigen von f_4 und f_5 gestreckt.

K5 **15** A und B werden jeweils in die Funktionsgleichung $y = k \cdot a^x$ eingesetzt, um den Wert des Parameters k und somit die Funktionsgleichung zu ermitteln.

a) I $3 = k \cdot a^0 \Leftrightarrow k = 3$
II $1{,}2 = 3 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 0{,}4$
$\Rightarrow y = 3 \cdot 0{,}4^x$

b) I $0{,}5 = k \cdot a^0 \Leftrightarrow k = 0{,}5$
II $2 = 0{,}5 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 4$
$\Rightarrow y = 0{,}5 \cdot 4^x$

c) I $12 = k \cdot a^2 \Leftrightarrow k = \frac{12}{a^2}$
II $96 = \frac{12}{a^2} \cdot a^5 \Leftrightarrow 8 = a^3 \Leftrightarrow a = 2;\ k = 3$
$\Rightarrow y = 3 \cdot 2^x$

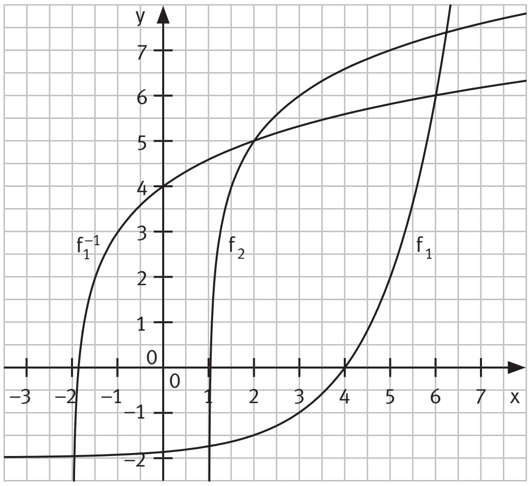
d) I $6 = k \cdot a^1 \Leftrightarrow k = \frac{6}{a}$
II $24 = \frac{6}{a} \cdot a^3 \Leftrightarrow 4 = a^2 \Rightarrow a = 2;\ k = 3$
$\Rightarrow y = 3 \cdot 2^x$
(Die Lösung $a = -2$ entfällt.)

K6 **16** Für die Achsen gilt: $x \in [0;\ 80]$ und $y \in [0;\ 1000]$.
Das Wertepaar mit dem größten y-Wert lautet für die jeweilige Funktion (Werte teils auf zwei Dezimalen gerundet):

f_1: $(0|1)$ f_2: $(4{,}59|1000)$
f_3: $(11{,}36|1000)$ f_4: $(0|0{,}2)$ f_5: $(3|1000)$

Erstaunlich ist für die Schüler wohl, dass man die Breite der Tapetenrolle mit 80 cm mitnichten ausnützt. Der maximale y-Wert von 1000 ist (falls er überhaupt erreicht wird) bei den gegebenen Funktionen „spätestens“ bei 11,36 erreicht. Theoretisch würde also eine Tapetenbahn von 12 cm Breite und 1000 cm Länge genügen.

KX **17 a)**



$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$
Asymptote: $y = -2$
Nullstelle:

$0 = 2^{x-3} - 2$
$\Leftrightarrow \quad 2 = 2^{x-3}$
$\Leftrightarrow x - 3 = 1$

Nullstelle bei N (4|0)

b) $f^{-1} = \log_2 (x + 2) + 3$
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}$
Senkrechte Asymptote: $x = -2$

c) f^1: Schnittpunkt mit der x-Achse bei N (4|0), also schneidet f_1^{-1} die y-Achse bei (0|4).
f^{-1}: Nullstelle:

$0 = \log_2 (x + 2) + 3$
$\Leftrightarrow \; -3 = \log_2 (x + 2)$
$\Leftrightarrow 2^{-3} = x + 2$
$\Leftrightarrow \quad x = -1{,}875$

Nullstelle bei (–1,875|0), also schneidet f_1 die y-Achse in (0|–1,875).

d) $f^{-1} = f_2$

$\log_2 (x + 2) + 3 = \log_2 (x - 1) + 5$
$\Leftrightarrow \log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 1) = 2$
$\Leftrightarrow \quad \log_2 \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right) = 2$
$\Leftrightarrow \quad \frac{x + 2}{x - 1} = 2^2$
$\Leftrightarrow \quad x = 2$

$x = 2$ in f^{-1} einsetzen: $\log_2 (4) + 3 = 5$
Die Graphen schneiden sich in (2|5).

KX **18 a)** Zu Beginn bedecken die Seerosen eine Fläche von 0,5 m² des Teichs. Dies entspricht dem Zeitpunkt x = 0. Setzte man nun x = 0 in die Gleichung ein, erhält man den Startwert 0,5 m². Nach einer Zeiteinheit (14 Tage) nehmen die Teichseerosen die doppelte Fläche ein, das entspricht 1 m². Dies erhält man, indem x = 1 für eine Zeiteinheit in die Gleichung eingesetzt wird. Also kann das Wachstum durch die gegebene Gleichung beschrieben werden.

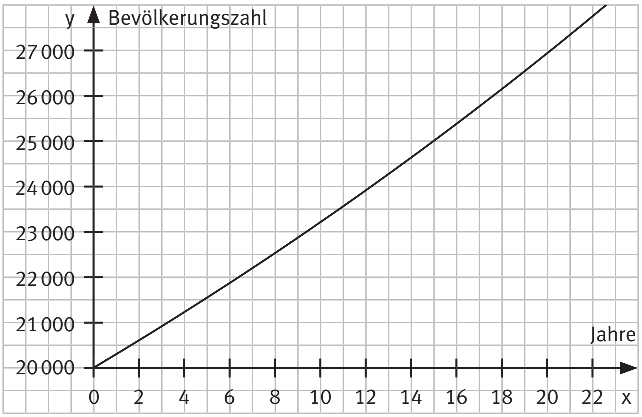
b) 35 Tage entspricht 2,5 Zeiteinheiten von je 14 Tagen.
$f(2{,}5) = 2{,}83\,m^2$ Die Seerosenblätter bedecken nach 35 Tagen eine Fläche von 2,83 m².

c) $10 = 0{,}5 \cdot 2^x$
$\Leftrightarrow 20 = 2^x$
$\Leftrightarrow \quad x = \log_2 20$
$\Leftrightarrow \quad x = 4{,}32$ Nach 4,32 Zeiteinheiten, also nach gut 60 Tagen, ist der Teich völlig zugewachsen.

KX **19 a)** Die Funktionsgleichung für die Größe y der Bevölkerung nach x Jahren lautet: $y = 20\,000 \cdot 1{,}015^x$.

b)

Beschriftung der Achsen? PDF S.32



c) $f(50) = 20\,000 \cdot 1{,}015^{50} \approx 42\,000$

d) $25\,000 = 20\,000 \cdot 1{,}015^x$

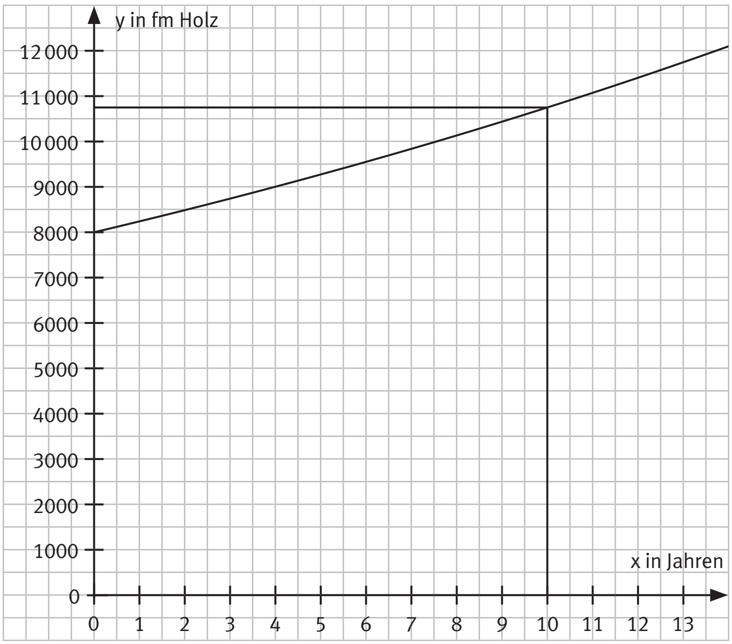
$1{,}25 = 1{,}015^x$

$x = \log_{1{,}015} 1{,}25$

$x \approx 15$

Nach ungefähr 15 Jahren ist die Bevölkerungszahl auf 25 000 gestiegen.

K3 **20 a)** Die Funktionsgleichung für den Holzbestand y in fm nach x Jahren lautet: $y = 8000 \cdot 1{,}03^x$.



Nach 10 Jahren sind etwa 10 750 fm Holz vorhanden.

Rechnerische Lösung:

Für x = 10 ergibt sich: $y = 8000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 10\,750$

b) $10\,000 = 8000 \cdot 1{,}03^x$

$\Leftrightarrow 1{,}25 = 1{,}03^x$

$\Leftrightarrow x = \log_{1{,}03} 1{,}25$

$\Leftrightarrow x \approx 7{,}5$

Nach ungefähr 7,5 Jahren wäre der Holzbestand auf 10 000 fm angewachsen.

c) Nach der Fällung sind noch 8750 fm Holz da.

$\Leftrightarrow 10\,750 = 8750 \cdot 1{,}03^x$

$\Leftrightarrow 1{,}23 = 1{,}03^x$

$\Leftrightarrow x = \log_{1{,}03} 1{,}23$

$\Leftrightarrow x \approx 7$

Sieben Jahre später hat der Holzbestand des Waldes wieder den ursprünglichen Zustand erreicht.

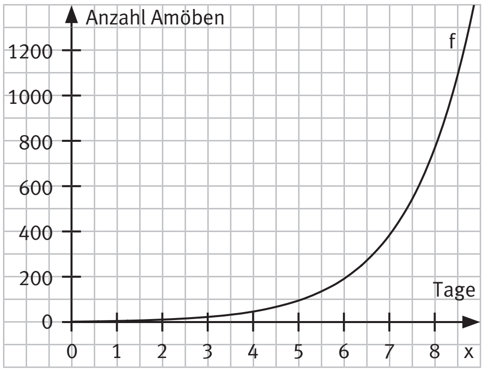
KX **21 a)** Funktionsgleichung: $y = 2^x$

$f(5) = 32$ (Zellen)

$f(30) = 1\,073\,741\,824$ Zellen

b) f: $y = 3 \cdot 2^x$

c)



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl Amöben	3	6	12	24	48	96	192	256	768	1536

d) $1000 = 3 \cdot 2^x$

$\Leftrightarrow 333\frac{1}{3} = 2^x$

$\Leftrightarrow \quad x = \log_2 333\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \quad x \approx 8{,}38$

Nach gut 8 Tagen sind über 1000 Amöben entstanden.

$f(14) = 49\,152$ (Amöben)

KX **22 a)** Es ist darauf zu achten, dass bei 1 – 4 alle Angaben in km umgewandelt werden.

1 $p(1456) = 0{,}85$ bar 2 $p(2{,}962) = 0{,}70$ bar 3 $p(8{,}884) = 0{,}34$ bar 4 $p(-0{,}428) = 1{,}07$ bar

b) $p(12) = 0{,}23$ bar $p(2{,}2) = 0{,}77$ bar

Druckdifferenz: $(0{,}77 - 0{,}23)$ bar $= 0{,}54$ bar

$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A$

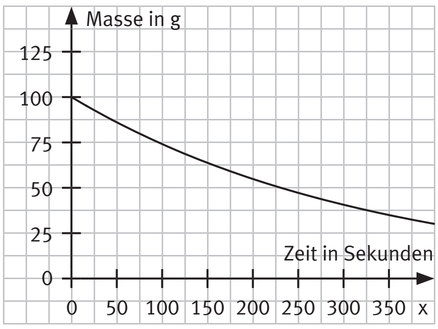
$F = 0{,}54\,\text{bar} \cdot 1\,\text{m}^2$

$F = 0{,}54 \cdot 10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1\,\text{m}^2$

$F = 54\,000\,\text{N}$

KX **23 a)** Bei 100 g Ausgangsmasse ergibt sich nach einer Sekunde Zerfall 100 g – 0,3 g = 99,7 g. Setzt man in die Gleichung m (x) für $m_0 = 100$ g und für $x = 1$ ein, so erhält man auch 99,7 g.

b)



x in s	0	50	100	150	200
Masse in g	100	86,05	74,05	63,72	54,83

c) $50 = 100 \cdot 0{,}997^x$

$\Leftrightarrow 0{,}5 = 0{,}997^x$

$\Leftrightarrow \quad x = \log_{0{,}997} 0{,}5$

$\Leftrightarrow \quad x = 230{,}7$

Die Halbwertszeit beträgt knapp 231 Sekunden.

d) Wenn bei einem Startwert von 100 g mehr als 95 % des radioaktiven Materials zerfallen sind, dann sind weniger als 5 g vorhanden.

$5 = 100 \cdot 0{,}997^x$

$\Leftrightarrow 0{,}05 = 0{,}997^x$

$\Leftrightarrow \quad x = \log_{0{,}997} 0{,}05$

$\Leftrightarrow \quad x = 997$

Nach mehr als 997 s sind weniger als 5 % des Radiums noch vorhanden.

K2 **Backe, backe Kuchen**

a) Im Laufe von 10 Tagen verdreifacht sich etwa das Volumen von „Hermann“. Die zugehörige Funktionsgleichung (y: Anzahl der 3-Tassen-Portionen; x: Anzahl der Tage) lautet also: f: $y = 3^{\frac{x}{10}}$.
Nach 0 Tagen: $f(0) = 3^{\frac{0}{10}} = 3^0 = 1$ Portion (≙ 3 Tassen)
Nach 10 Tagen: $f(10) = 3^{\frac{10}{10}} = 3^1 = 3$ Portionen (≙ 9 Tassen)
Nach 20 Tagen: $f(20) = 3^{\frac{20}{10}} = 3^2 = 9$ Portionen (≙ 27 Tassen)
Nach 1 Monat (= 30 Tage): $f(30) = 3^{\frac{30}{10}} = 3^3 = 27$ Portionen (≙ 81 Tassen)
Nach 1 Jahr: $f(365) \approx 2{,}60 \cdot 10^{17}$ Portionen
Nach einem Monat hätte man 27 und nach einem Jahr etwa 260 Billiarden Portionen „Hermänner“ (jeweils Portionen zu 3 Tassen).

b) In einem Jahr kann man 108 Tassen Hermann verschenken.

c) Anzahl der Neubeschenkten nach …
10 Tagen: 1 = 1
20 Tagen: 1 + 1 = 2
30 Tagen: 2 + 2 = 4
40 Tagen: 4 + 4 = 8
50 Tagen: 8 + 8 = 16
Allgemein beträgt die Anzahl y der Neubeschenkten nach x Tagen:
$y = 2^{\frac{x}{10} - 1}$
Nach einem Jahr (x = 365) kann es somit etwa $4{,}86 \cdot 10^{10}$ Neubeschenkte geben.

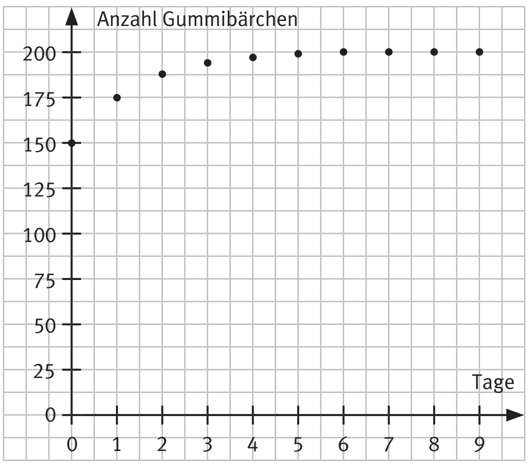
K3 **Lauter Gummibärchen**

a) Da man üblicherweise nicht mit halben Gummibärchen rechnet, sind neben folgenden Werten teils auch andere möglich.

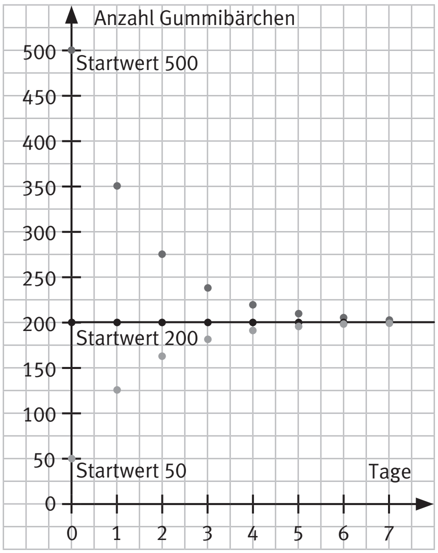
Tage	0	1	2	3
Anzahl Gummibärchen am Ende des Tages	150	$\frac{150}{2} + 100 = 175$	$\frac{175}{2} + 100 \approx 188$	$\frac{188}{2} + 100 = 194$

Tage	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl Gummibärchen am Ende des Tages	197	199	200	200	200	200	200

Die Anzahl der Gummibärchen steigt jeden Tag, bis sie den Wert 200 erreicht; ab da bleibt die Anzahl konstant 200. Die entnommene Menge entspricht dann stets der wieder zugeführten Menge.

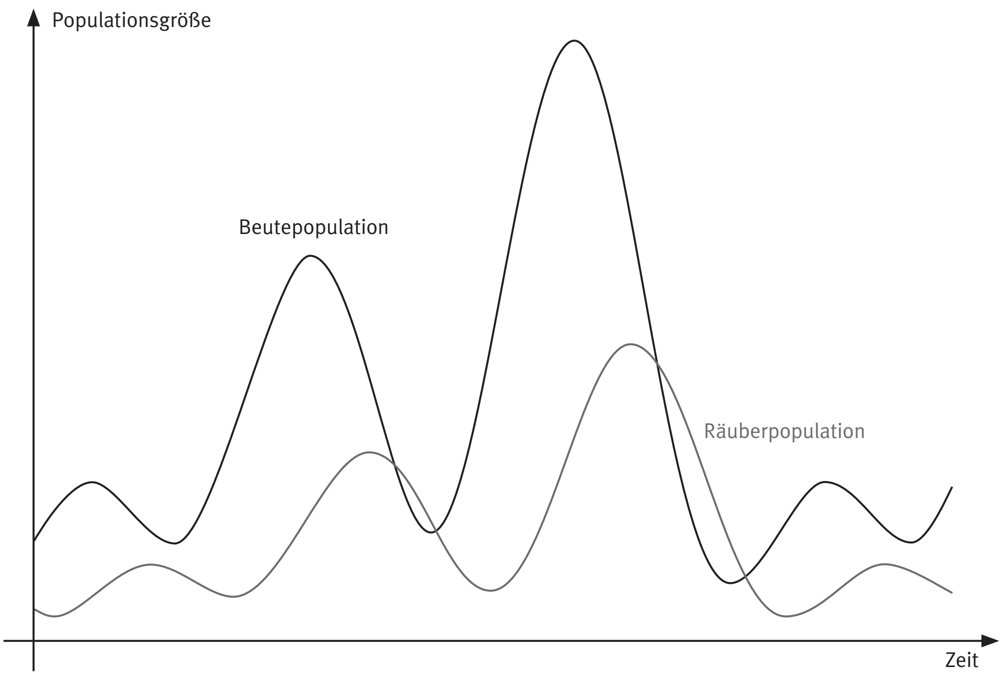
b)


c) Egal wie groß die Anzahl der Gummibärchen am Anfang ist, der Graph nimmt nach einer gewissen Zeit den Wert 200 an und verläuft ab da konstant.
Bei anfänglich 200 Gummibärchen verläuft der Graph sofort konstant bei 200.
Bei anfänglich 500 Gummibärchen fällt der Graph, bis er den Wert 200 erreicht.
Grund: Die entnommene Menge ist zu Beginn größer als die zugeführte Menge, bis sie bei 200 ausgeglichen ist.
Bei anfänglich 50 Gummibärchen steigt der Graph an, bis er den Wert 200 erreicht.
Grund: Die entnommene Menge ist zu Beginn kleiner als die zugeführte Menge, bis sie bei 200 ausgeglichen ist.



d) Lösungsmöglichkeit:

1 Räuber-Beute-Beziehung: In diesem Modell zeigen Räuber- und Beutearten gekoppelte Häufigkeitsschwankungen. Vereinfacht und ohne Beachtung von Störvariablen heißt das: Gibt es viel Beute, nimmt die Population des Räubers zu, danach wird die Beute seltener, somit finden die Räuber nicht mehr ausreichend Nahrung und werden ebenfalls seltener. Dann kann sich die Beutepopulation erholen und der Kreislauf beginnt von Neuem.



2 Beschränktes Wachstum:
- Erwärmung eines Kaltgetränks:
  Liegt die Temperatur eines Kaltgetränks unterhalb der Umgebungstemperatur, erwärmt sich das Getränk bis auf die Umgebungstemperatur, welche die obere Grenze bildet.
- Abkühlung eines Heißgetränks:
  Liegt die Temperatur eines Heißgetränks oberhalb der Umgebungstemperatur, kühlt sich das Getränk bis auf die Umgebungstemperatur ab, welche die untere Grenze bildet.
- Verkauf von Telefonanschlüssen in einen festen Ort:
  Wenn alle Einwohner des Ortes einen Telefonanschluss besitzen, bildet die Grenze die Einwohnerzahl.
- Ausbreitung einer Population in einem begrenzten Raum:
  Eine Population, z. B. Fische, breitet sich nicht immer weiter aus, sondern es existiert aufgrund von begrenzten Ressourcen (wie Futter, Sauerstoff, Platz) eine natürlich Grenze.

K3 **Aufgepasst**

a)

Zeit in min	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Anzahl der 20-min-Intervalle	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120

b) Sei x die Anzahl der 20-min-Intervalle, dann ergibt sich für die Anzahl der Salmonellen folgende Funktionsgleichung: $y = 10 \cdot 2^x$.

c) 8 Stunden entsprechen 24 20-min Intervallen: $y = 10 \cdot 2^{24} = 167\,772\,160$
Nach 8 Stunden kann mit ungefähr 168 Millionen Salmonellen gerechnet werden.

K3 **It's teatime**

a) Es sind individuelle Lösungen möglich.
b) Es sind individuelle Lösungen möglich.
c) Aller Erfahrung nach ist eine Exponentialfunktion der Form $y = b \cdot a^x$ mit $0 < a < 1$ am besten geeignet.
d) Auch hier wird aller Erfahrung nach wieder eine Exponentialfunktion vorliegen, wobei der Faktor a kleiner sein dürfte als bei der Messung in Teilaufgabe c): Das Wasser kühlt schneller ab.

K3 **Dicke Luft**

a) Lösungsmöglichkeit:

Temperatur in °C	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
Wasserdampfgehalt der Luft in g/m^3	6	7,5	9,5	13	18	23,5	30,5	40	51,5	66

b) $P(0|6)$ und $Q(35|40)$ in $y = b \cdot a^x$ eingesetzt, liefert die Funktionsgleichung $y = 6 \cdot 1{,}0557^x$.
c) Die heiße, aus dem Backofen ausströmende Luft enthält sehr viel Wasserdampf. Beim Abkühlen dieser Luft kann diese immer weniger Wasserdampf speichern. Der Rest kondensiert, insbesondere an den kühlen Wänden oder dem Fenster. Lüften schafft Abhilfe.

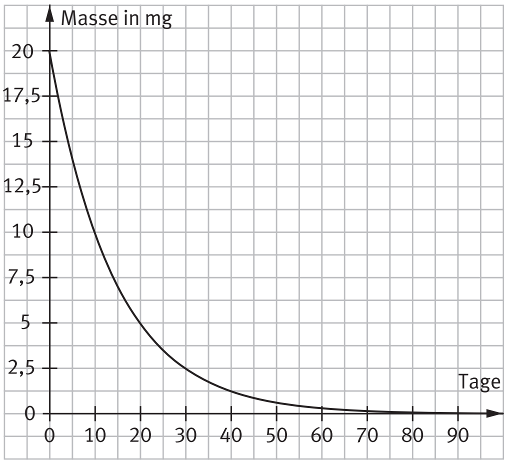
K5 **1** **a)** $y = 200 \cdot 1{,}12^x$ **b)** $y = 5000 \cdot 1{,}035^x$ **c)** $y = 20 \cdot 1{,}015^x$ **d)** $y = 3 \cdot 1{,}2^x$

K5 **2** **a)** $y = 5600 \cdot 0{,}955^x$ **b)** $y = 35\,000 \cdot 0{,}845^x$ **c)** $y = 150 \cdot 0{,}965^x$ **d)** $y = 3000 \cdot 0{,}87^x$

K3 **3** **a)**

Tage	0	10	20	30	40	50
Masse	20 mg	10 mg	5 mg	2,5 mg	1,25 mg	0,625 mg

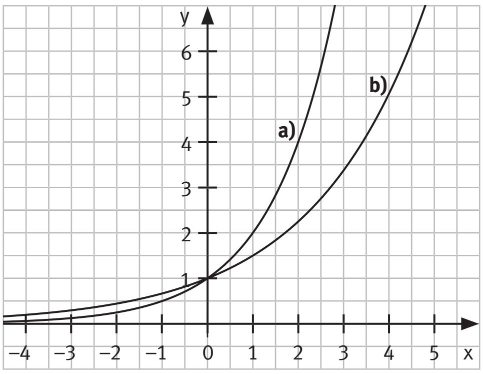
b)

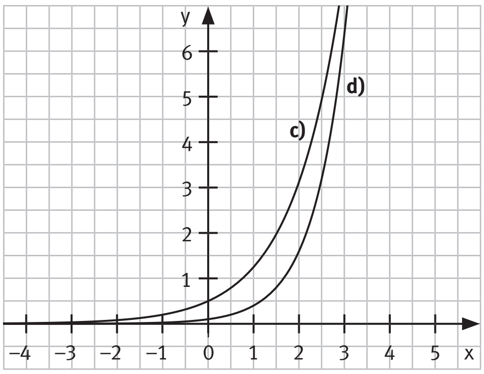


c) Beispielsweise durch Probieren erhält man: $p \approx 6{,}7$.

K5 **4**

	x	−3	−2	−1	0	1	2	3
a)	$y = 2^x$	0,13	0,25	0,5	1	2	4	8
b)	$y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	0,30	0,44	0,67	1	1,5	2,25	3,38
c)	$y = \frac{2{,}5^x}{2}$	0,03	0,08	0,20	0,50	1,25	3,13	7,81
d)	$y = 0{,}1 \cdot 4^x$	0,002	0,01	0,03	0,1	0,4	1,6	6,4





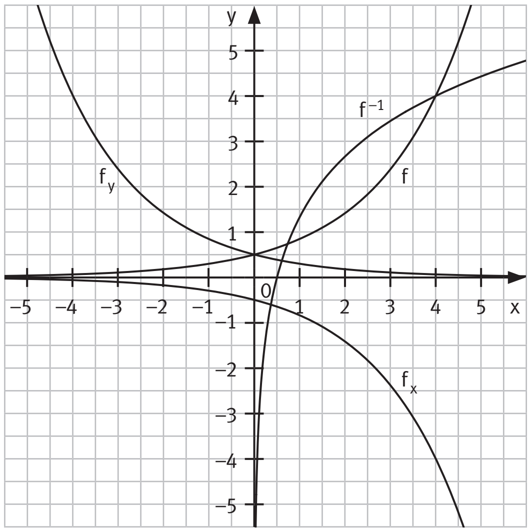
K5 **5** **a)** P in $y = a^x$ eingesetzt liefert $a = 2$; die Funktionsgleichung lautet: $y = 2^x$.
b) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a = 0{,}7$. Die Funktionsgleichung lautet: $y = 0{,}7^x$.
c) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a = 0{,}5$. Die Funktionsgleichung lautet: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
d) P in $y = a^x$ eingesetzt ergibt $a^0 = 1$, somit besteht die Lösung aus allen Funktionen des Typs $y = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

KX **6** Für $x = 0$ erhält man den jeweiligen Schnittpunkt mit der y-Achse.
a) $(0|0{,}3)$ **b)** $(0|12)$ **c)** $\left(0|\frac{1}{3}\right)$ **d)** $(0|5)$ **e)** $(0|0{,}3)$ **f)** $\left(0|3\frac{3}{5}\right)$

KX **7** **a)** f: $y = 0{,}5 \cdot 8^{0{,}25x}$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
Asymptote: $y = 0$

c)

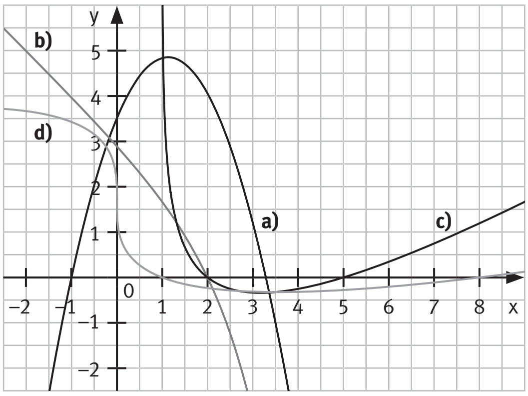


d) ① f_x: $y = -0{,}5 \cdot 8^{0{,}25x}$
② f_y: $y = 0{,}5 \cdot 8^{-0{,}25x}$
③ f^{-1}: $4 \cdot \log_8 (2x)$

KX **8** **a)** $x = 6$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = 3$ **d)** $x = 3$ **e)** $x = 3$ **f)** $x = 5$

KX **9** **a)** $y = 2^x - 2$ **b)** $y = -0{,}5 \cdot 2^x$

KX **10** Man kann entweder die Graphen von Links- und Rechtsterm der Gleichungen zeichnen. Alternativ und etwas weniger zeichenaufwändig kann man die Gleichungen auf eine Nullstellenbestimmung zurückführen. Das ist hier geschehen.



a) $x_1 = -1$ $x_2 = 3{,}29$
b) $x = 2$
c) $x_1 = 2$ $x_2 = 5$
a) $x_1 = 1$ $x_2 = 8$

KX **11**

((Ergänzung 3 mal „y" – richtig?))

	a)	b)	c)
Bildgraph	f': $y = 1{,}5^{x-7} + 4$	f': $y = \frac{3^{x+3}}{4} + 2$	f': $y = 3^{x-9} - 4$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{W}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 4\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y > -4\}$
Asymptote	$y = 4$	$y = 2$	$y = -4$
Schnittpunkt x-Achse	–	–	N (10,26 | 0)
Schnittpunkt y-Achse	T (0 | 4,06)	T (0 | 8,75)	T (0 | –4)

	d)	e)	f)
Bildgraph	f': $y = 25 \cdot 0{,}2^x$	f': $y = \log_3 (x-3) - 2$	f': $y = \log_{\frac{1}{4}} (x-5) + 5$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Asymptote	$y = 0$	$x = 3$	$x = 5$
Schnittpunkt x-Achse	–	N (12 | 0)	N (10,29 | 0)
Schnittpunkt y-Achse	T (0 | 25)	–	–

KX **12** **a)** 1 $f': y = -\frac{1}{2} \cdot 3^{x+2} + 5$ 2 $f': y = -0{,}4 \cdot 0{,}7^{-x-3} - 1$

b) 1 $f': y = -\frac{1}{2} \cdot (3^{x-3} - 5)$ 2 $f': y = 4 \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 2\right)$

K3 **13** **a)** $50 \cdot 2^x = 1\,000\,000 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 20\,000 \approx 14{,}29$

$14{,}29 \cdot 12$ Stunden $= 171{,}48$ Stunden ≈ 7 Tage 4 h

b) $f(x) = 50 \cdot 2^x$

Eine Zeiteinheit x entspricht 12 Stunden.

c) Die Fläche des Teichs ist endlich, weshalb auch die Ressourcen endlich sind. Dadurch wird das Wachstum ab einem bestimmten Punkt gehemmt und ist somit nicht durchgängig exponentiell.

K3 **14** Grafische Lösung:

Nigeria: $n(x) = 177{,}5 \cdot 1{,}025^x$

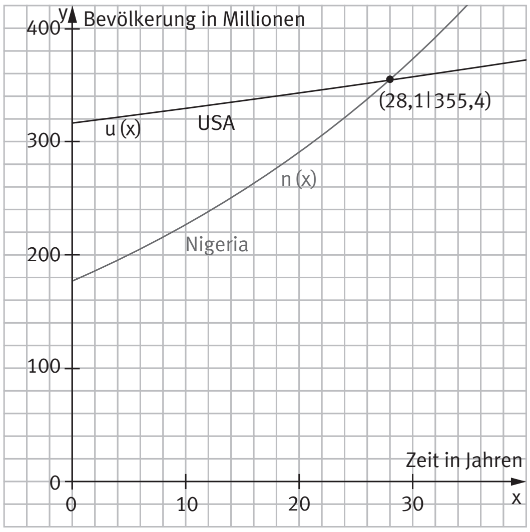
USA: $u(x) = 317{,}7 \cdot 1{,}004^x$

Rechnerische Lösung:

$177{,}5 \cdot 1{,}025^x = 317{,}7 \cdot 1{,}004^x$

$\Leftrightarrow \; x \approx 28{,}1$

Nach gut 28 Jahren leben in beiden Staaten mit ca. 355 Millionen gleich viele Menschen.



KX **15** Die Aussage ist falsch. Beispielsweise haben alle Exponentialfunktionen der Form $y = k \cdot a^x$ keine Nullstellen, sondern die x-Achse als Asymptote.

K 1/6 **16** Die Aussage ist falsch, da nach der Definition der Exponentialfunktion $a = 1$ nicht in der Definitionsmenge von $y = k \cdot a^x$ enthalten ist. Für $a = 1$ ergibt sich somit keine Exponentialfunktion, sondern eine Gerade mit der Gleichung $y = 2$.

Theoretisch könnte man allerdings auch $a = 1$ zulassen, sodass die Aussage richtig wäre. Allerdings entspräche die Funktion dann nicht mehr dem, was man im eigentlichen Sinne unter einer Exponentialfunktion versteht.

KX **17** Die Aussage ist falsch. Um aus dem Graphen der gegebenen Funktion den einer Logarithmusfunktion zu erhalten, muss man ihn an der Winkelhalbierenden des I. bzw. III. Quadranten spiegeln.

KX **18** Die Aussage ist richtig, denn $a^0 = 1$ für $a > 0$.

KX **19** Die Aussage ist richtig.

KX **20** Die Aussage ist richtig.

KX **21** Die Aussage ist falsch, denn $y = 9^x = 3^{2x}$ und $y = 9 \cdot 3^x = 3^{x+2}$.

KX **22** Die Aussage ist richtig.

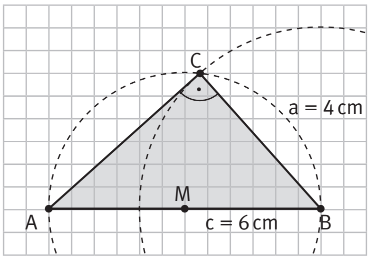
K6 **1** Es lassen sich allgemeine Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke und gleichseitige Dreiecke unterscheiden.

K5 **2** **a)** $\beta = 180° - 70° = 110°$ $\alpha = \gamma = \frac{70°}{2} = 35°$ $\delta = 180° - 70° - 60° = 50°$

b) $\beta = 180° - 90° - 44° = 46°$ $\gamma = \frac{180° - 44°}{2} = 68°$ $\alpha = \gamma - \beta = 68° - 46° = 22°$

K1 **3** **a)** wahr **b)** wahr **c)** wahr **d)** wahr **e)** falsch

K5 **4**



Zeichne [AB] mit c = 6 cm und Mittelpunkt M.
$k(M; r = \overline{AM} = 3\,cm) \cap k(B; r = a = 4\,cm) = \{C\}$

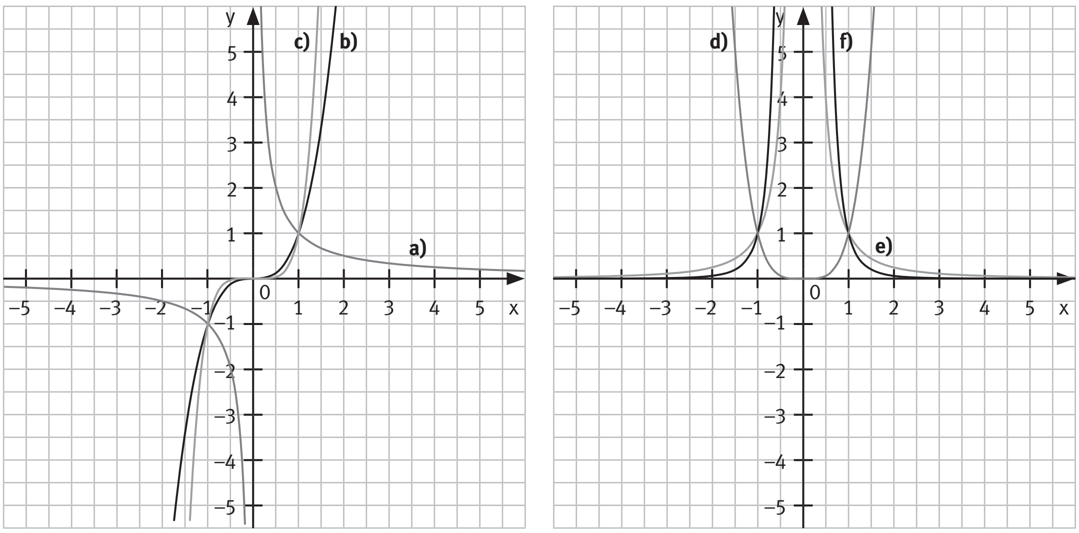
K5 **5** **a)** [AB] ist die Hypotenuse und damit die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks ABC. Die Kathete [AC] ist kürzer als die Hypotenuse, d. h.: $0 < x < 8$.

b) $A(x) = 0{,}5 \cdot x\,cm \cdot \sqrt{8^2 - x^2}\,cm = 0{,}5 \cdot x \cdot \sqrt{8^2 - x^2}\,cm^2$

c) $A(5) = 0{,}5 \cdot 5 \cdot \sqrt{39}\,cm^2 \approx 15{,}61\,cm^2$

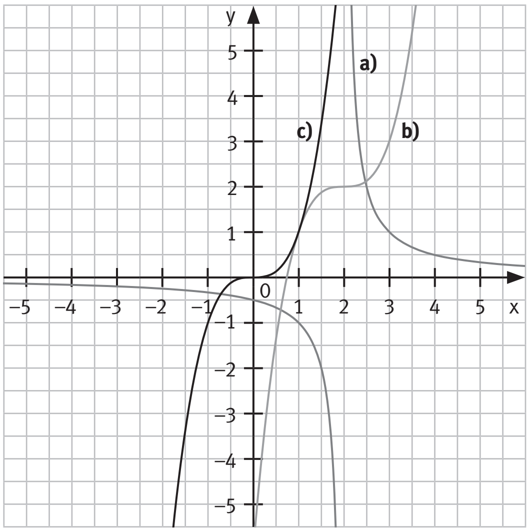
K1 **6** Aussage:
Die Summe der Flächeninhalte der Dreiecke BDC und CEA ist gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks AFB.
Begründung:
Für die Seitenlängen a, b und c des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.
Die Dreiecke AFB, BDC und CEA sind gleichseitig mit den Seitenlängen a, b bzw. c. Es gilt:
$A_{BDC} = 0{,}5ah_a = 0{,}25a^2\sqrt{3}$ $A_{CEA} = 0{,}5bh_b = 0{,}25b^2\sqrt{3}$ $A_{AFB} = 0{,}5ch_c = 0{,}25c^2\sqrt{3}$
$\Rightarrow A_{BDC} + A_{CEA} = 0{,}25(a^2 + b^2)\sqrt{3} = 0{,}25c^2\sqrt{3} = A_{AFB}$

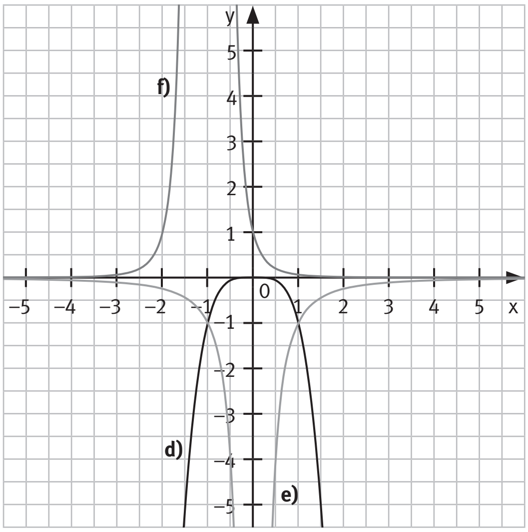
KX **7**



Bei der Beschreibung des Verlaufs der Funktionsgraphen sind unterschiedliche Lösungen möglich.

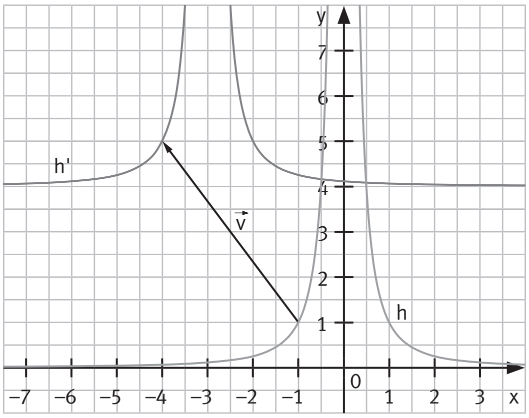
KX **8**



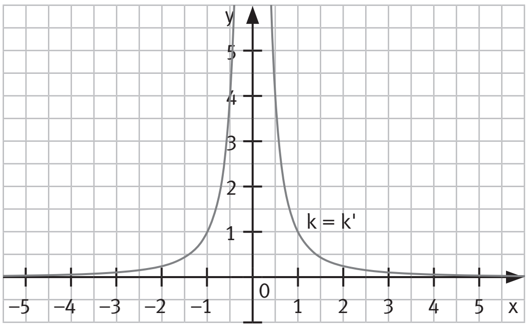


Bei der Beschreibung des Verlaufs der Funktionsgraphen sind unterschiedliche Lösungen möglich.

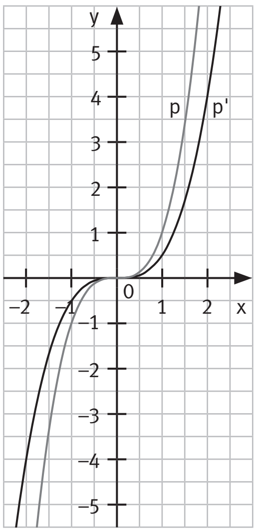
KX **9** **a)** h': $y = (x + 3)^{-2} + 4$



b) k': $y = (-x)^{-2} = x^{-2}$

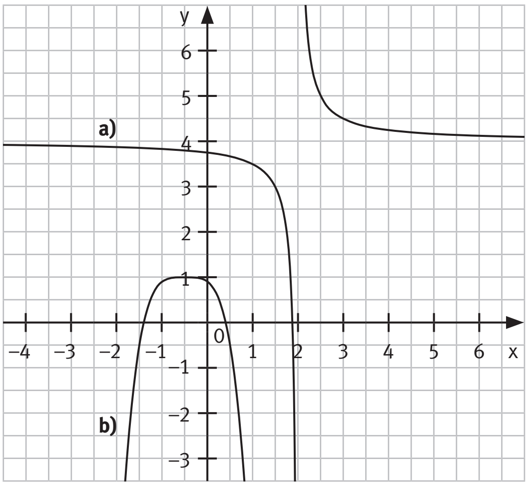


c) p': $y = 0{,}5x^3$

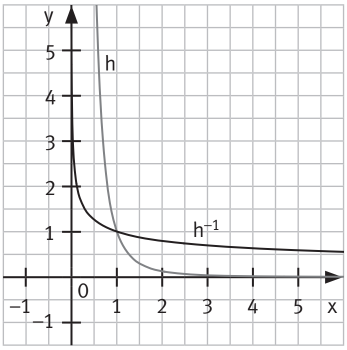


KX **10 a)** Der Graph der Funktion ist eine um 2 Einheiten in x-Richtung verschobene Hyperbel, die mit dem Faktor 0,5 gestaucht und anschließend um 4 Einheiten in y-Richtung verschoben wird.

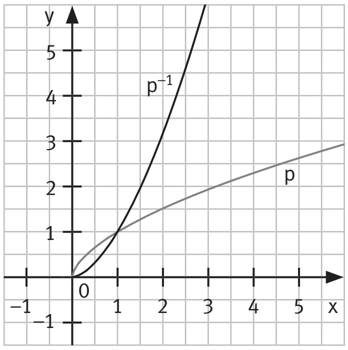
b) Der Graph der Funktion ist eine Potenzfunktion 4. Grades, die um –0,5 in x-Richtung verschoben ist, anschließend an der x-Achse gespiegelt und mit dem Faktor 1,5 gestreckt wird, bevor sie noch um 1 Einheit in y-Richtung verschoben wird.



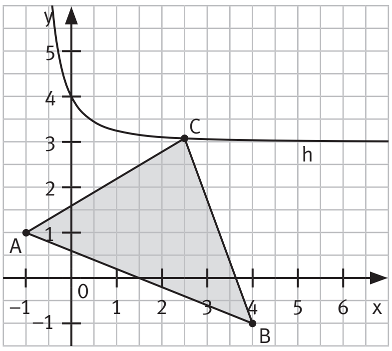
KX **11 a)** h^{-1}: $y = x^{-\frac{1}{3}}$ mit $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$



b) p^{-1}: $y = x^{\frac{5}{3}}$ mit $G = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$



KX **12 a)**



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x - (-1) \\ (x+1)^{-2} + 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 \\ (x+1)^{-2} + 2 \end{pmatrix}$

$A_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & x+1 \\ -2 & (x+1)^{-2} + 2 \end{vmatrix}$ FE

$= \frac{1}{2} \cdot \left| 5 \cdot ((x+1)^{-2} + 2) - (-2) \cdot (x+1) \right|$ FE

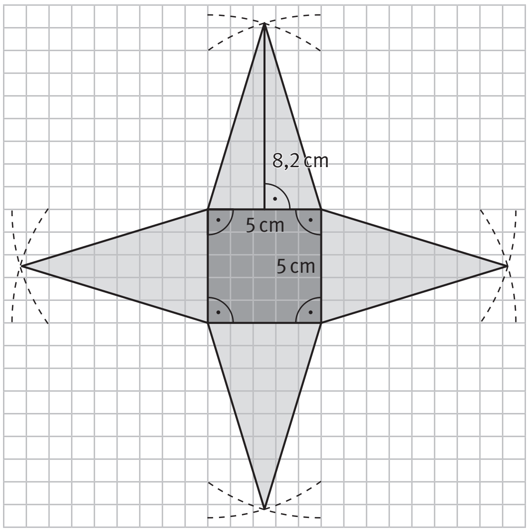
$= \frac{1}{2} \cdot \left| 5 \cdot (x+1)^{-2} + 10 + 2x + 2 \right|$ FE

$= (2{,}5\,(x+1)^{-2} + x + 6)$ FE

c) Durch Probieren oder mit einem dynamischen Geometicprogramm erhält man: $x_0 \approx 0{,}71$, der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt dann $A_{ABC} = 7{,}56$ FE.
Der genaue Wert für x_0 ist $x_0 = \sqrt[3]{5} - 1$.

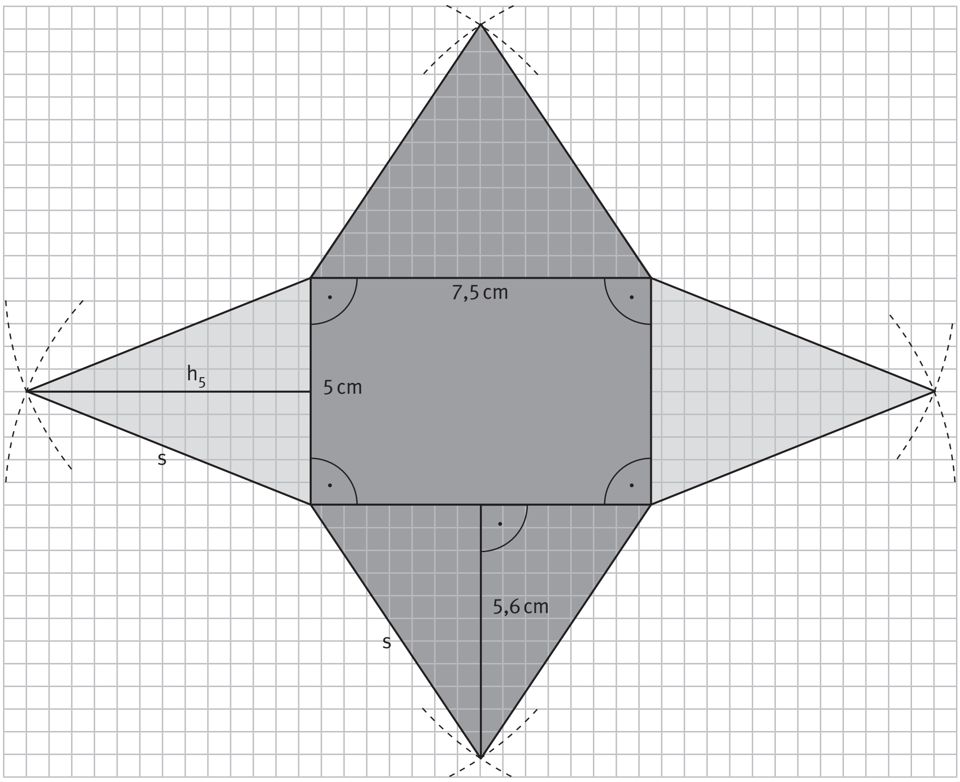
K5 **13** Mit a als Maßzahl der Kantenlänge der Grundfläche und h als Maßzahl der Höhe gilt: $O = 2a^2 + 4ah$.
$h = 7$ und $O = 64$ eingesetzt:
$2a^2 + 28a = 64$
$\Leftrightarrow a^2 + 14a - 32 = 0$
$\Rightarrow a_1 = 2$ ($a_2 = -16$ entfällt, da Kantenlängen immer positiv)
Die Kantenlänge der Grundfläche beträgt 2 dm. Für das Volumen des Quaders gilt: $V = a^2h = 28\,(\text{dm}^3)$.

K4 **14** **a)**



$O = (5\,\text{cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot 8{,}2\,\text{cm} = 107\,\text{cm}^2$

b)



$O = 5\,\text{cm} \cdot 7{,}5\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7{,}5\,\text{cm} \cdot 5{,}6\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5\,\text{cm} \cdot h_5$

$s^2 = \left(\frac{7{,}5\,\text{cm}}{2}\right)^2 + (5{,}6\,\text{cm})^2 \approx 45\,\text{cm}^2$

$h_5{}^2 = s^2 - (2{,}5\,\text{cm})^2 \approx 39\,\text{cm}^2$

$O = 79{,}5\,\text{cm}^2 + 5\,\text{cm} \cdot 6{,}2\,\text{cm}$

$O = 37{,}5\,\text{cm}^2 + 42\,\text{cm}^2 + 5\,\text{cm} \cdot h_5$

$s \approx 6{,}7\,\text{cm}$

$h_5 \approx 6{,}2\,\text{cm}$

$O = 110{,}5\,\text{cm}^2$

K5 **15 a)** $O = 2 \cdot (3{,}5\,\text{cm})^2\,\pi + (2\pi \cdot 1\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}) + (2\pi \cdot 1\,\text{cm} \cdot 5{,}2\,\text{cm}) + (2\pi \cdot 3{,}5\,\text{cm} \cdot 3\,\text{cm}) \approx 200{,}7\,\text{cm}^2$

b) $O = 2 \cdot 60\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} + 2 \cdot 50\,\text{cm} \cdot 30\,\text{cm} + 20\,\text{cm} \cdot 2 \cdot (80\,\text{cm} + 60\,\text{cm}) = 12\,200\,\text{cm}^2 = 122\,\text{dm}^2$

c) Der Körper ist ein Prisma mit einer Grundfläche in Form eines regelmäßigen Sechsecks, das aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht. In einem dieser Dreiecke ergibt sich für die Höhe h:

$h = \sqrt{(20\,\text{cm})^2 - (10\,\text{cm})^2} = 10 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm} \approx 17{,}3\,\text{cm}$

$A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20\,\text{cm} \cdot 17{,}3\,\text{cm} = 1038\,\text{cm}^2$

Es gilt somit für den Oberflächeninhalt des Prismas:

$O = 2 \cdot 1038\,\text{cm}^2 + 6 \cdot 20\,\text{cm} \cdot 100\,\text{cm} = 14\,076\,\text{cm}^2 \approx 1{,}41\,\text{m}^2$

d) Der Körper besteht aus einem Quader und einer aufgesetzten Pyramide. Für die beiden Höhen der Seitenflächen der Pyramide gilt:

$h_1 = \sqrt{(80\,\text{cm})^2 + (30\,\text{cm})^2} \approx 85{,}4\,\text{cm}$ $\qquad$ $h_2 = \sqrt{(80\,\text{cm})^2 + (20\,\text{cm})^2} \approx 82{,}5\,\text{cm}$

Für den Oberflächeninhalt des Körpers ergibt sich:

$O = 40\,\text{cm} \cdot 60\,\text{cm} + 2 \cdot 15\,\text{cm} \cdot (60\,\text{cm} + 40\,\text{cm}) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40\,\text{cm} \cdot 85{,}4\,\text{cm} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 60\,\text{cm} \cdot 82{,}5\,\text{cm}$

$O = 13\,766\,\text{cm}^2 \approx 137{,}7\,\text{dm}^2$

K6 **16** Für den Oberflächeninhalt O einer Kugel gilt: $O = 4\pi \cdot r^2$

Für r = 4 cm ergibt sich: $O_4 = 4\pi \cdot (4\,\text{cm})^2 = 4\pi \cdot 16\,\text{cm}^2$

Für r = 8 cm ergibt sich: $O_8 = 4\pi \cdot (8\,\text{cm})^2 = 4\pi \cdot 64\,\text{cm}^2 = 4\pi \cdot 4 \cdot 16\,\text{cm}^2 = 4 \cdot O_4$

Die Aussage ist falsch. Der Oberflächeninhalt der ersten Kugel beträgt nur ein Viertel von dem der zweiten Kugel.

K5 **17 a)** $x_1 = -2{,}2 \quad x_2 = 1{,}2$ **b)** $x_1 = 0 \quad x_2 = -4$ **c)** $x_1 = -6 \quad x_2 = 5$ **d)** $x_1 = -1{,}8 \quad x_2 = 4{,}8$

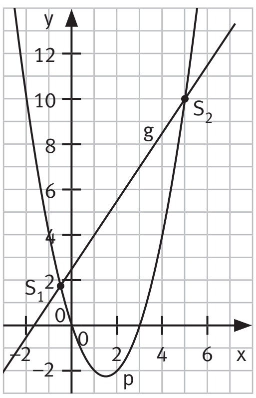
K3 **18 a)** y = 0 bei x = 0 und x = 50.

Der Körper hat eine horizontale Entfernung von 50 m zurückgelegt.

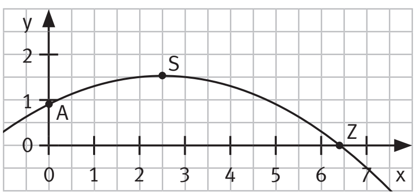
b) $-0{,}02x\,(x - 50) = 8 \quad \Leftrightarrow 0 = x^2 - 50x + 400 \quad \Rightarrow x_1 = 10;\ x_2 = 40$

Nach 10 m und nach 40 m Entfernung vom Startpunkt hat der Körper eine Flughöhe von 8 m über dem Boden.

K5 **19**



K3 **20**



A (0|0,9); S (2,5|1,525); Z (6,4|0)

Die Gartenschlauchdüse liegt 0,9 m über dem Boden. Der Wasserstrahl erreicht nach 2,5 m mit 1,525 m seinen höchsten Punkt über dem Boden und trifft nach 6,4 m auf dem Boden auf.