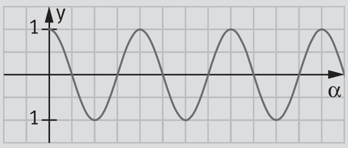
4 Trigonometrische Terme und Funktionen

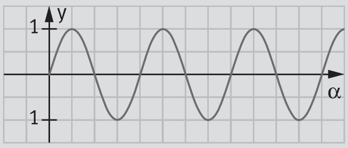
Einstieg

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente:
Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

Auf einer Kreisscheibe mit Radius 1 dm, die sich gleichmäßig dreht, ist am Rand ein Holzstift befestigt. Die Bewegung des Holzstiftes wird einmal senkrecht auf den Boden und einmal waagrecht an die Wand projiziert.

K6
- **Beschreibe die Bewegung des Schattens auf dem Boden und an der Wand.**
  Der Schatten des Stiftes auf dem Boden bzw. an der Wand beschreibt jeweils eine Strecke der Länge 2 dm.

K1
- **Zum Zeitpunkt t = 0 ist der Holzstift „ganz oben". Begründe, mit welchen der Graphen 1 bis 4 die Schattenbewegungen an der Wand bzw. am Boden beschrieben werden können. Stell dir dabei vor, dass unter dem Schatten ein Papier mit gleichbleibender Geschwindigkeit gezogen wird.**
  Wand: Der Schatten startet bei y = 1.
  2
  

  Boden: Der Schatten befindet sich zunächst bei y = 0. Außerdem bewegt er sich bei y ≈ 0 schneller als bei y ≈ ±1.
  3
  

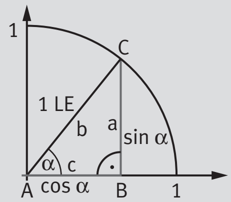
  Die Kurven mit „Knicken" kommen nicht in Frage, weil die Schattenbewegung einer Sinus- bzw. Kosinuskurve folgen muss.

Ausblick

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen.
Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

Verständnis

KX
- Felix hat nicht Recht.
  Der Zusammenhang $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ kann unter Verwedung des Satzes des Pythagoras im Dreieck ABC zwar nur mithilfe des Einheitskreises gezeigt werden, denn nur im Einheitskreis sind die Maßzahlen der Längen der Katheten gleich dem Sinus- bzw. Kosinuswert des zugehörigen Winkels α.
  Die Gleichung hat jedoch allgemeine Gültigkeit für jeden beliebigen Winkel α.



KX
- Die Behauptung ist richtig, denn:
  $\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ = \sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

KX **1** **a)** $\underbrace{\sin(45^\circ + 30^\circ)}_{\approx 0{,}97} = \underbrace{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}_{\approx 0{,}97}$

b) $\underbrace{\cos(180^\circ + 45^\circ)}_{\approx -0{,}71} = \underbrace{\cos 180^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 180^\circ \cdot \sin 45^\circ}_{\approx -0{,}71}$

c) $\underbrace{\sin(15^\circ + 15^\circ)}_{= 0{,}5} = \underbrace{\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ}_{= 0{,}5}$

d) $\underbrace{\cos(180^\circ - 60^\circ)}_{= -0{,}5} = \underbrace{\cos 180^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 180^\circ \cdot \sin 60^\circ}_{= -0{,}5}$

e) $\underbrace{\sin(45^\circ - 15^\circ)}_{= 0{,}5} = \underbrace{\sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 15^\circ}_{= 0{,}5}$

f) $\underbrace{\cos(30^\circ + 45^\circ)}_{\approx 0{,}26} = \underbrace{\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ}_{\approx 0{,}26}$

K1 **2** Mithilfe der Formel $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ergibt sich insgesamt:

$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ $\quad\cos\beta = \frac{12}{13}$ $\quad\cos\alpha = \frac{12}{13}$ $\quad\sin\beta = \frac{5}{13}$

1 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{120}{169} \approx 0{,}71$

2 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{119}{169} \approx 0{,}70$

3 $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} - \frac{12}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{0}{169} = 0$

4 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{169}{169} = 1$

KX **3** **a)** $\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

b) $\sin 15^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 75^\circ \overset{\text{siehe a)}}{=} \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

Alternativ:
$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

c) $\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ = 1$
mit Teil a) gilt: $\sin^2 75^\circ + \left(\frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2 = 1$

$\sin(75^\circ) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})\right)^2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Alternativ unter Verwendung der Additionstheoreme. Zerlegung bspw. in $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$.

d) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{6} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

Alternativ über Ansatz $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ und Teilaufgabe a).

e) $\sin(150°) = \sin(180° - 30°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$

f) $\sin(105°) = \sin(180° - 75°) = \sin(75°) \overbrace{=}^{\text{siehe c)}}$

g) $\cos(150°) = \cos(180° - 30°) = -\cos(30°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

h) $\sin(135°) = \sin(180° - 135°) = \sin(45°) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

i) $\cos(135°) = \cos(180° - 135°) = -\cos(45°) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

j) $\cos(180°) = -\cos(0°) = -1$

KX **4** **a)** $\cos(90° + \varepsilon) = \cos 90° \cdot \cos \varepsilon - \sin 90° \cdot \sin \varepsilon = 0 - 1 \cdot \sin \varepsilon = -\sin \varepsilon$

b) $\sin(90° + \varepsilon) = \sin 90° \cdot \cos \varepsilon + \cos 90° \cdot \sin \varepsilon = 1 \cdot \cos \varepsilon - 0 = \cos \varepsilon$

c) $\cos(60° - \varepsilon) - 0{,}5 \cdot \cos \varepsilon = \cos 60° \cdot \cos \varepsilon + \sin 60° \cdot \sin \varepsilon - 0{,}5 \cdot \cos \varepsilon$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cos \varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin \varepsilon - 0{,}5 \cdot \cos \varepsilon$$

$$= 0{,}5 \cdot \cos \varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sin \varepsilon = \frac{1}{2}(\cos \varepsilon + \sqrt{3} \cdot \sin \varepsilon)$$

d) $\sin(\varepsilon + 180°) = \sin \varepsilon \cdot \cos 180° + \cos \varepsilon \cdot \sin 180° = \sin \varepsilon \cdot (-1) + \cos \varepsilon \cdot 0 = -\sin \varepsilon$

e) $\sin(360° + \varepsilon) = \sin(\varepsilon)$

f) $\cos(150° + \varepsilon) - 0{,}5 \cdot \sin \varepsilon = \cos 150° \cdot \cos \varepsilon - \sin 150° \cdot \sin \varepsilon - 0{,}5 \cdot \sin \varepsilon$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos \varepsilon - \frac{1}{2} \cdot \sin \varepsilon - 0{,}5 \cdot \sin \varepsilon = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \cos \varepsilon - \sin \varepsilon$$

KX **5** **a)** Tony nummeriert die charakteristischen Winkel $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°$ und $90°$ mit den Ziffern $x = 0, 1, 2, 3$ und 4. Um $\sin \alpha$ zu berechnen, kann er einfach den jeweiligen Wert von x in die Formel $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ einsetzen.
Zudem weiß er, dass $\sin(90° - \alpha) = \cos \alpha$ gilt, sodass er sich die jeweiligen Kosinuswerte erschließen kann.

b) Mithilfe der Additionstheoreme lässt sich nun aus diesen Sinus- bzw. Kosinuswerten $\sin 75°$ und $\cos 75°$ berechnen (siehe Aufgabe 3). Für den Tangens gilt:
$\tan(75°) = \frac{\sin(75°)}{\cos(75°)}$

c) Es gilt: $180° + 75° = 255°$. Wendet man auf $\sin(180° + 75°)$ bzw. $\cos(180° + 75°)$ die Additionstheoreme (wie in Aufgabe 1 bzw. 3) an, so lässt sich $\tan 255° = \frac{\sin 255°}{\cos 255°}$ bestimmen.

KX **6** $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta}$

$$= \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot \left(\cos \alpha + \sin \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \beta \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \beta)}$$

$$= \frac{\cos \beta \cdot \left(\sin \alpha - \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right)}{\cos \beta \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \beta)} = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \tan \beta}{\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\cos \alpha \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \tan \beta\right)}{\cos \alpha \cdot \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \tan \beta\right)}$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \tan \beta}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \tan \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

KX **7** **a)** Für die Steigung der Geraden g_1 bzw. g_2 gilt bekanntlich $\tan 255° = m_1$ bzw. $\tan \beta = m_2$.
Für den Schnittwinkel der Geraden gilt: $\varphi = \alpha - \beta$.
Einsetzen in die Formel aus Aufgabe 6 ergibt den gesuchten Term.

b) Um die Formel aus a) korrekt anzuwenden, muss darauf geachtet werden, welche Gerade die größere Steigung hat. Um die Steigung korrekt ablesen zu können, müssen ggf. die Funktionsgleichungen auf die Form $y = m \cdot x + t$ gebracht werden.

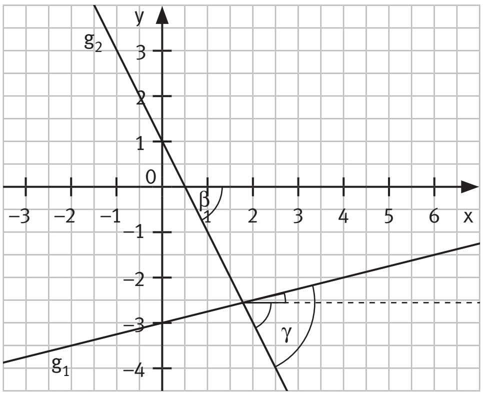
1 $m_1 = 3 > m_2 = 1 \Rightarrow \tan \varphi = \frac{3-1}{1+3\cdot 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 26{,}6°$

2 g_1: $4x - y = 8 \Leftrightarrow y = 4x - 8$
$\Rightarrow m_1 = 4 > m_2 = 0{,}6 \Rightarrow \tan \varphi = \frac{4-0{,}6}{1+4\cdot 0{,}6} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$

3 g_1: $10x - y = 25 \Leftrightarrow y = 10x - 25$
g_2: $9x - 11y = 0 \Leftrightarrow 11y = 9x \Leftrightarrow y = \frac{9}{11}x$
$\Rightarrow m_1 = 10 > m_2 = \frac{9}{11} \Rightarrow \tan \varphi = \dfrac{10 - \frac{9}{11}}{1 + 10\frac{9}{11}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$

4 g_1: $0{,}25x - y = 3 \Leftrightarrow y = 0{,}25x - 3 \Rightarrow m_1 = 0{,}25$
g_2: $y + 2x = 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1 \Rightarrow m_2 = -2$

Der Graph von g_2 fällt. Skizze:



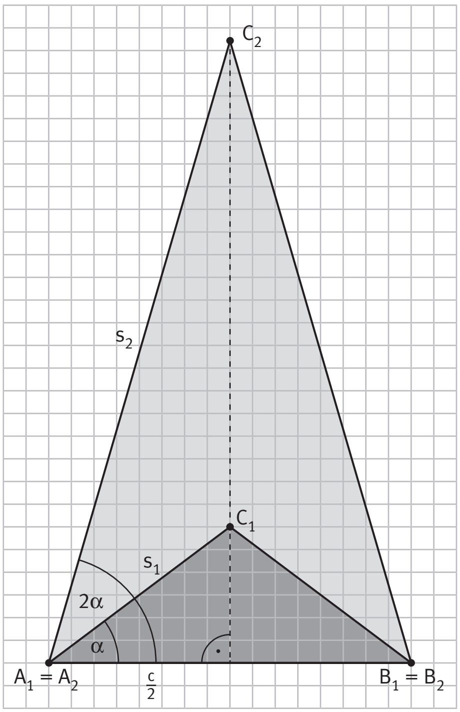
Laut der Angabe von Teil a) gilt die Formel nur für positive Steigungen. Berechnung der Steigungswinkel von g_1 bzw. g_2:
$\tan \alpha = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = 14{,}0°$
$\tan \beta = -2 \Rightarrow \beta = -63{,}4°$
Anhand der Skizze erkennt man: $\varphi = 14{,}0° + 63{,}4° = 77{,}4°$.
Hinweis: Die Formel aus Teil a) lässt sich durch Betragsstriche auf der rechten Seite modifizieren, um mit beliebigen Winkeln rechnen zu können.

K1 **8** **a)** $\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

b) Es gilt: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
eingesetzt ergibt sich:
$\Rightarrow \sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos(2\alpha) + \cos\alpha \cdot \sin(2\alpha)$
$= \sin\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$= \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$
$= 3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 3 \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$
$= 3 \cdot \sin\alpha - 3 \cdot \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$
$= 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^2\alpha$

c) $\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha\cdot\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)} = \frac{2\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot(1-\tan^2\alpha)} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

K1 **9**



$A_1 = \frac{1}{2}\,c \cdot h_c$

$\tan\alpha = \frac{h_c}{\frac{c}{2}} \Rightarrow h_c = \frac{c}{2} \cdot \tan\alpha$

$A_1 = \frac{1}{2}\,c \cdot \frac{c}{2} \cdot \tan\alpha = \frac{c^2}{4}\tan\alpha$

$A_2 = \frac{c^2}{4}\tan(2\alpha)$

Das Verhältnis von $A_1 : A_2$ ist wie $\frac{\tan\alpha}{\tan(2\alpha)}$.

Hier (mit $\alpha \approx 36{,}9°$)

$A_1 = 12\,\text{cm}^2$; $A_2 \approx 55{,}0\,\text{cm}^2$

$u_1 = 18\,\text{cm}$; $u_2 \approx 36{,}6\,\text{cm}$ (durch ähnliche Überlegungen)

KX **10** **a)** $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\overset{\text{Trick}}{=} \underbrace{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{1} - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

b) $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\overset{\text{Trick}}{=} 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \underbrace{- \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}_{1} = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

$\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

KX **11** $1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

KX **12** Mithilfe des Tipps erhält man:

$\sin^2(50°) = \sin^2(90° - 40°) = (\sin(90° - 40°))^2 = (\cos 40°)^2 = \cos^2(40°)$

Analog: $\sin^2(60°) = \cos^2(30°)$

$\sin^2(70°) = \cos^2(20°)$

$\sin^2(80°) = \cos^2(10°)$

$\Rightarrow \sin^2(10°) + \sin^2(20°) + \sin^2(30°) + \ldots + \sin^2(80°) + \sin^2(90°) =$

$\sin^2(10°) + \sin^2(20°) + \sin^2(30°) + \sin^2(40°) + \cos^2(40°) + \cos^2(30°) + \cos^2(20°) + \cos^2(10°) +$

$\underbrace{\sin^2 90°}_{=1} \overset{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}{\overbrace{\quad = \quad}} 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1$

KX **13** **a)** $\tan\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \overset{\text{Aufgabe 10 b)}}{\overbrace{\quad = \quad}} \tan\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Zur Definitionsmenge betrachtet Aufgabe 10 a). Außerdem muss der Nenner $\neq 0$ sein.

$\Rightarrow \mathbb{D} = [0;360°[\setminus \{180°\}$

b) $-\frac{\cos\alpha}{\tan\alpha} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \overset{\text{Aufgabe 10 a)}}{\overbrace{\quad = \quad}} -\frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} + 2 \cdot \sin\left(\frac{2\alpha}{2}\right) = -\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} + 2\sin\alpha = \frac{-\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$= \frac{-\cos^2\alpha + 2(1-\cos^2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{-3\cos^2\alpha + 2}{\sin\alpha}$

Zur Definitionsmenge betrachtet Aufgabe 10 a) (Achtung: Winkel ist hier 2α). Außerdem muss der Nenner $\neq 0$ sein.

$\Rightarrow \mathbb{D} =]0;180°[$

c) $\frac{3}{3-3\tan\lambda} - \frac{1}{1+\tan\lambda} = \frac{1}{1-\tan\lambda} - \frac{1}{1+\tan\lambda} \overset{\text{Erweitern der Nenner mit 3. binomischer Formel}}{\overbrace{\quad = \quad}} \frac{1+\tan\lambda - (1-1\tan\lambda)}{(1-\tan\lambda)(1+\tan\lambda)}$

$= \frac{2\tan\lambda}{1-\tan^2\lambda} \overset{\text{Aufgabe 8 c)}}{\overbrace{\quad = \quad}} \tan 2\lambda$

$\Rightarrow \mathbb{D} =]0;180°[$ (siehe Aufgabe 8c)

c) $\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} - 1 = \frac{1}{\sin\beta \cdot \cos\beta} - 1 = \frac{1 - \sin\beta \cdot \cos\beta}{\sin\beta \cdot \cos\beta}$

Kein Nenner darf den Wert Null annehmen.

$\Rightarrow \mathbb{D} =]0;360°[\setminus \{90°;180°\}$

KX **14** 1 Additionstheorem

2 Additionstheorem

3 Satz des Pythagoras am Einheitskreis

4 Formel für Vielfaches eines Winkelmaßes

5 Formel für Vielfaches eines Winkelmaßes

6 Formel für Vielfaches eines Winkelmaßes

KX **15** **a)** $-6\sin\beta + 8{,}5\sin\beta - 3{,}5\sin\beta = -\sin\beta$

b) $\sin\beta + 2\sqrt{1-\cos^2\beta} - 4\sin\beta = \sin\beta + 2\sin\beta - 4\sin\beta = -\sin\beta$

c) $3 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = 3 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$

d) $\cos^2\alpha - \cos(2\alpha) + 1 = \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 1 = -\sin^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha$

e) $-3\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} + 6 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = -3\sin\frac{\alpha}{2} + 6\cos\frac{\alpha}{2}$

f) $(\sin\delta + \cos\delta)^2 - (\sin\delta - \cos\delta)^2 - \sin^2\delta =$

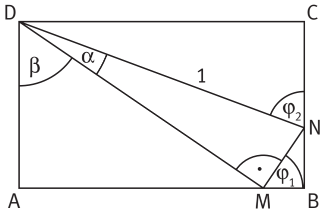
$\sin^2\delta + 2\sin\delta\cos\delta + \cos^2\delta - (\sin^2\delta - 2\sin\delta\cos\delta + \cos^2\delta) - \sin^2\delta = 4\sin\delta\cos\delta - \sin^2\delta$

g) $\sin\frac{4\alpha}{2} - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2 = \sin 2\alpha - 2 \cdot \sin \cdot \cos\alpha + 2$
$= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2 = 2$

h) $\cos(45° - \alpha) + \cos(135° + \alpha) = \cos 45° \cdot \cos\alpha - \sin 45° \cdot \sin\alpha + \cos 135° \cdot \cos\alpha - \sin 135° \cdot \sin\alpha$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sin\alpha = -\sqrt{2} \cdot \sin\alpha$

KX **16 a)** Zeichne die Hypotenuse [DN] mit 1 LE. M ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über [DN] und des unteren Schenkels eines Winkels α im Punkt D. A ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über [MD] und des unteren Schenkels eines Winkels β im Punkt D. Errichten eines Lotes im Punkt D ergibt Halbgerade [DC. C ist der Lotfußpunkt von N auf [DC. B ist der Schnittpunkt von [AM und [CN.

b)



Bestimmung von φ_1:
Winkelsume im Dreieck AMD: $\beta + 90° + \sphericalangle DMA = 180° \Rightarrow \sphericalangle DMA = 90° - \beta$
Gestreckter Winkel: $\sphericalangle DMA + 90° + \varphi_1 = 180° \Rightarrow \varphi_1 = 90° - \sphericalangle DMA = 90° - (90° - \beta) = \beta$
Bestimmung von φ_2: $\sphericalangle ADC = 90° = \beta + \alpha + \sphericalangle NDC \Rightarrow \sphericalangle NDC = 90° - \alpha - \beta$
Winkelsumme im Dreieck DNC: $\varphi_2 + 90° + \sphericalangle NDC = 180°$
$\Rightarrow \varphi_2 = 90° - \sphericalangle NDC = 90° - (90° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$
Eleganter: φ_2 ist Wechselwinkel zu $\alpha + \beta$.

c) Im Dreieck DNC gilt: $\sin\varphi_2 = \frac{\overline{DC}}{1} = \sin(\alpha + \beta) \Rightarrow \overline{DC} = \sin(\alpha + \beta) = \overline{AB}$

Im Dreieck DNC gilt: $\cos\varphi_2 = \frac{\overline{CN}}{1} \Rightarrow \overline{CN} \overset{b)}{=} \cos(\alpha + \beta)$

Im Dreieck MBN gilt: $\sin\varphi_1 = \frac{\overline{NB}}{\overline{MN}} \Rightarrow \overline{NB} = \sin\varphi_1 \cdot \overline{MN} \overset{b)}{=} \sin\beta \cdot \overline{MN}$

Im Dreieck DMN gilt: $\sin\alpha = \frac{\overline{MN}}{1} \Rightarrow \overline{NB} = \sin\beta \cdot \overline{MN} = \sin\beta \cdot \sin\alpha \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{CN} + \overline{NB}$

$= \cos(\alpha + \beta) + \sin\beta \cdot \sin\alpha \overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \cos\alpha \cdot \cos\beta$

KX **17 a)** $\varphi \in \,]0;180°[$, $\overline{B_nD_n} \in \,]0;20\,\text{cm}[$

b) Es gilt: $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{\overline{B_nD_n}}{2}}{\overline{A_nD_n}} \Rightarrow \overline{B_nD_n} = 2\overline{A_nD_n} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$
Für den Umfang des Dreieck $A_nB_nD_n$ gilt (in cm):
$20 = \overline{A_nB_n} + \overline{B_nD_n} + \overline{A_nD_n} = \overline{B_nD_n} + 2\overline{A_nD_n} \Rightarrow \overline{A_nD_n} = 10 - \frac{1}{2}\,\overline{B_nD_n}$
$\Rightarrow \overline{B_nD_n} = 2\left(10 - \frac{1}{2}\,\overline{B_nD_n}\right) \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 20\sin\frac{\varphi}{2} - \overline{B_nD_n} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$
$\Rightarrow \overline{B_nD_n} + \overline{B_nD_n} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 20\sin\frac{\varphi}{2}$
$\Rightarrow \overline{B_nD_n} \cdot (1 + \frac{\varphi}{2}) = 20\sin\frac{\varphi}{2}$
$\Rightarrow \overline{B_nD_n} = \frac{20\sin\frac{\varphi}{2}}{1 + \sin\frac{\varphi}{2}}$ (in cm bzw.LE)

c) $\frac{20\sin\frac{\varphi}{2}}{1 + \sin\frac{\varphi}{2}} \overset{\text{Erweitern mit }\cos\frac{\varphi}{2}}{=} \frac{20\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \overset{\substack{\text{Aufgabe 14} \\ \text{(4 die Erste)}}}{=} \frac{10\sin\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\sin\varphi} \overset{\text{Erweitern mit 2}}{=} \frac{20\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi}$

Verständnis

KX
- Bei der Lösung der Gleichung werden nicht nur Äquivalenzumformungen gemacht (z. B. beim Ausführen der Quadrate im 3. Schritt).

KX
- $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}5$ kann höchstens im Intervall $]0°; 90°[$ eine Lösung haben, denn $-1 \le \sin\alpha$, $\cos\alpha \le 1$ und nur im angegebenen Intervall sind die Sinus- und Kosinuswerte gleichzeitig positiv.
  $\sin\alpha + \cos\alpha = 1{,}5$
  $\Leftrightarrow \sin\alpha = 1{,}5 - \cos\alpha$
  $\Leftrightarrow \sin\alpha = 1{,}5 - (\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha})$
  $\Leftrightarrow (\sin\alpha - 1{,}5)^2 = (\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha})$
  $\Leftrightarrow \sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 2{,}25 = 1 - \sin^2\alpha$
  $\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha + 1{,}25 = 0$
  Ersetze $\sin\alpha$ durch x: $2x^2 - 3x + 1{,}25 = 0$
  Die Gleichung hat keine Lösung.

KX **1** **a)** $L = \{210°; 330°\}$
b) $L = \{31{,}79°; 328{,}21°\}$
c) $L = \{143{,}13°; 323{,}13°\}$
d) $L = \{45°; 135°; 225°; 315°\}$
e) $L = \{39{,}92°; 140{,}08°; 219{,}92°; 320{,}08°\}$
f) $L = \{17{,}63°; 27{,}37°; 62{,}63°; 72{,}37°; 107{,}63°; 117{,}37°; 152{,}63°; 162{,}37°; 197{,}63°; 207{,}37°; 242{,}63°; 252{,}37°; 287{,}63°; 297{,}37°; 332{,}63°; 342{,}37°\}$

KX **2** **a)** $L = \{0°; 180°\}$ **b)** $L = \{90°; 154{,}8°; 270°\}$ **c)** $L = \{0°\}$
d) $L = \{0°; 180°\}$ **e)** $L = \{116{,}6°; 206{,}6°\}$ **f)** $L = \varnothing$

KX **3** **a)** $L = \{45°; 225°\}$ **b)** $L = \{0°; 60°; 180°; 300°; 360°\}$ **c)** $L = \{45°; 225°\}$
d) $L = \{36{,}32°; 141{,}68°\}$ **e)** $L = \{60°; 300°\}$ **f)** $L = \{53{,}13°; 143{,}13°; 233{,}13°; 323{,}13°\}$

KX **4** **a)** $\sin\alpha = \pm\sqrt{1{,}25 - a} + 0{,}5$
b) Bedingungen: $-1 \le \pm\sqrt{1{,}25 - a} + 0{,}5 \le 1 \;\wedge\; 1{,}25 - a \ge 0$
$L = \{a \mid -1 \le a \le 1{,}25\} = [-1; 1{,}25]$

KX **5** **a)** I $\quad \tan\alpha = \frac{h}{s + x}$
II $\quad \tan\beta = \frac{h}{x}$
I In II: $\quad h(\beta) = \frac{10 \cdot \tan\beta}{\tan\beta - 1}\,m$
b) $h(60°) = 23{,}66\,m$
c) $\beta = 55{,}49°$

KX **6** **a)** Mittels quadratischer Ergänzung wird der Term auf die Scheitelform gebracht. Da 0,25 zu $\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ addiert wird, reicht es, nur $\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$ zu betrachten. Nun bestimmt man diejenigen Winkel α, für die der Term minimal bzw. maximal wird.

b) ① $T = 2 \cdot (\cos\alpha + 0{,}375)^2 + 2{,}72$

$T_{min} = 2{,}72$ für $\alpha = 112{,}02° \vee \alpha = 247{,}96°$

$T_{max} = 6{,}50$ für $\alpha = 0° \vee \alpha = 360°$

② $T = -(\cos\alpha - 0{,}5)^2 + 2{,}25$

$T_{min} = 0$ für $\alpha = 180°$

$T_{max} = 2{,}25$ für $\alpha = 60° \vee \alpha = 300°$

③ $T = 2 \cdot (\sin\alpha + 0{,}75)^2 - 8{,}125$

$T_{min} = 8{,}125$ für $\alpha = 228{,}59° \vee \alpha = 311{,}41°$

$T_{max} = -2$ für $\alpha = 90°$

④ $T = 2 \cdot \cos(135° - \alpha) - 1{,}4$

$T_{min} = -3{,}4$ für $\alpha = 315°$

$T_{max} = 0{,}6$ für $\alpha = 135°$

c) $T(\alpha) = (\cos^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha)^{-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha}$

$T(\alpha)$ wird maximal, wenn $\cos^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha$ minimal wird und umgekehrt.

Bestimmung von Minimum und Maximum von $S(\alpha) = \cos^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha$:

$$S(\alpha) = \cos^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha = 1 - \sin^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha = -(\sin^2\alpha - 4 \cdot \sin\alpha - 1)$$
$$= -(\sin^2\alpha - 4 \cdot \sin\alpha + 4) + 5 = -(\sin\alpha - 2)^2 + 5$$

$S(\alpha)$ hat ein Maximum, wenn $(\sin\alpha - 2)^2$ am kleinsten ist, also für $\sin\alpha = 1$ und ein Minimum wenn $(\sin\alpha - 2)^2$ am größten ist, also für $\sin\alpha = -1$.

$\Rightarrow T(\alpha)$ hat ein Minum für $\alpha = 90°$ und ein Maximum für $\alpha = 270°$

Definitionsmenge: Nenner $\neq 0$

$\cos^2\alpha + 4 \cdot \sin\alpha = 0$

$\Leftrightarrow -(\sin\alpha - 2)^2 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin\alpha - 2)^2 = 5$

$\Rightarrow \sin\alpha - 2 = \pm\sqrt{5}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{5} + 2$

$\Rightarrow \sin = 346{,}3° \vee \alpha = 193{,}7°$

Verständnis

K6 ■ Die Länge eines Kreisbogens mit Radius 1 kann man auch als Maß für die Größe eines Winkels verwenden. Der Grund liegt in der direkten Proportionalität beider Größen.

K1 ■ Dies sind Vielfache von π bzw. 2π.

K1 ■ Das ist falsch: Der Winkel von 10 rad ist größer, da dieser umgerechnet 572° entspricht.

K5 **1** $\frac{1°}{360°} = \frac{1}{360}$, woraus für den Winkel 1° im Bogenmaß folgt $\frac{2\pi}{360} \approx 0{,}017$.

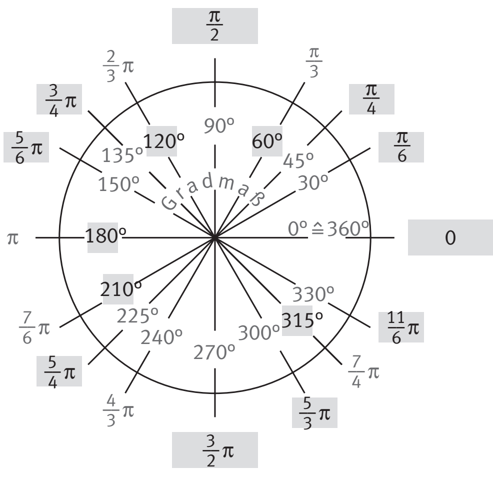
K5 **2** **a)**

Winkel im ...	1	2	3	4	5	6
Gradmaß	24,5°	356,3°	0,5°	28,65°	249,81°	344,92°
Bogenmaß	0,43	6,22	0,01	0,5	4,36	6,02

b)

Winkel im ...	1	2	3	4	5	6
Gradmaß	465,3°	715,0°	1000°	429,72°	731,09°	2591,49°
Bogenmaß	8,12	12,48	17,45	7,5	12,76	45,23

K5 **3**



K5 **4** Der Kreis hat einen Umfang von $2\pi \cdot 6\,\text{cm}$.

a) 8 cm: $x = \frac{8\,\text{cm}}{2\pi \cdot 6\,\text{cm}} \cdot 2\pi = \frac{4}{3}$

15 cm: $x = \frac{15\,\text{cm}}{2\pi \cdot 6\,\text{cm}} \cdot 2\pi = 2{,}5$

b) $x = \frac{8\,\text{cm}}{2\pi \cdot 6\,\text{cm}} \cdot 360° \approx 76{,}4°$

$x = \frac{15\,\text{cm}}{2\pi \cdot 6\,\text{cm}} \cdot 360° \approx 143{,}2°$

K1 **5** **a)** Der Anteil des Mittelpunktswinkels an 360° ist gleich dem Anteil der Länge des zugehörigen Kreisbogens am Gesamtumfang des Kreises. Da der Einheitskreis den Radius 1 hat, folgt: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\pi}$

b) Die Gleichungen folgen jeweils durch Äquivalenzumformung der Gleichung aus a).

KX **6** **a)** 1 1,96 cm 2 3,12 m 3 4,00 dm 4 28,34 mm

b) 1 34,38° 2 293,82° 3 36° 4 163,70°

c) 1 1,91 cm 2 2,19 m 3 9,95 mm 4 3,13 dm

K5 **7** **a)** –1 **b)** 1 **c)** –1 **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e)** 0,5

K5 **8** Die möglichen Lösungen sind:

a) $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}$ **b)** $90°$ **c)** $45°; 315°; 405°$

d) $60°; 120°$ **e)** $0°; 90°; 180°; 270°; 360°$ **f)** $-2\pi; 0; 2\pi$

g) $10°; 50°$ **h)** $-4\pi; -2\pi; 0; 2\pi; 4\pi$

i) $-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi$ **j)** $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$

K1 **9** Lösungsmöglichkeit:

$\ldots -\frac{5}{2}\pi; -\frac{1}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi; \frac{11}{2}\pi; \ldots$

K1 **10** $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right) = \sin\left(\frac{11}{10}\pi\right) = \sin 18° = \cos 72° = \cos(-72°) = \cos 252° = \cos 792°$

$\cos\left(\frac{3}{10}\pi\right) = \sin 396° = \sin 504°$

$\cos 342°$

$\sin(-36°)$

K1 **11** **a)** Das ist falsch: Den Maximalwert nimmt der Kosinus für 0° bzw. 0 ein und 20° liegt näher daran.

b) Das ist wahr, da $\cos 117° < 0$.

c) Das ist falsch, da der Sinus den Maximalwert bei 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ annimmt.

K1 **12** **a)** 1 **b)** 1 **c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** 2

e) 1 **f)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **g)** $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ **h)** 0

KX **13** **a)** $\sin(\pi - x) = \sin x$ **b)** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ **c)** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

K1 **14** Für den Flächeninhalt eines Kreises gilt $A = \pi r^2$. Der Anteil des Mittelpunktswinkels an 2π ist gleich dem Anteil des Flächeninhalts des Kreissektors am Kreis. Damit folgt $A = \frac{x}{2\pi}\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2 \cdot x$.

K3 **15** $2\pi r_1 = 2\pi r_2 - \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r_2$

$2\pi r_1 = 2\pi r_2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{360°}\right)$

$r_1 = r_2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{360°}\right)$

$\alpha = 360° \cdot \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)$

$\alpha = 360° \cdot \left(1 - \frac{40\,m}{42\,m}\right)$

$\alpha \approx 17{,}1° \mathrel{\hat=} 0{,}30$

KX **16** $\pi^2 = \pi \cdot \pi \Rightarrow \pi^2$ entspricht $\pi \cdot 360° \approx 3{,}14 \cdot 360°$.

KX **17** **a)** $x \in \{0; \pi; 2\pi\}$ **b)** $x = \frac{\pi}{2}$ **c)** $x = \frac{\pi}{4}$ **d)** $x = \frac{\pi}{2}$

KX **18** **a)** $\varphi = 15°$ $x = 0{,}262$

b) in 18 h

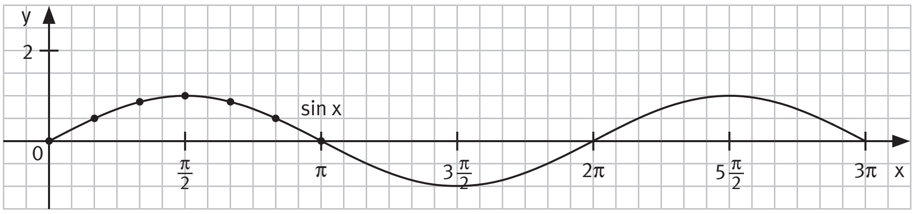
Verständnis

K6 ■ Am Einheitskreis stellt sin x die y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis dar, x ist dabei das Bogenmaß, um das der Punkt P (1 | 0) auf dem Einheitskreis gedreht wird. Für $x = \frac{\pi}{2}$ nimmt sin x also den Extremwert 1 an, der in der Sinuskurve einen Hochpunkt ergibt.

K6 ■ Die Sinusfunktion f (x) = sin x ist punktsymmetrisch zu jeder Nullstelle und achsensymmetrisch zu jedem Hoch- bzw. Tiefpunkt.

K5 **1** **a)** Periodenlänge 4
b) Periodenlänge 5

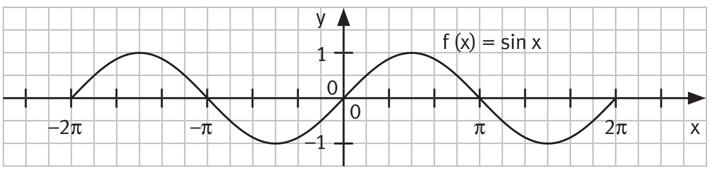
KX **2**



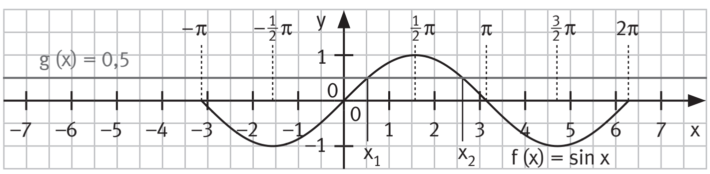
K5/6 **3** Eigenschaften der Sinusfunktion
Definitionsmenge $\mathbb{D}$: $\mathbb{R}$
Wertemenge $\mathbb{W}$: $x \in [-1; 1]$
Periodenlänge: 2π
Nullstellen: $(k \cdot \pi | 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie: Punktsymmetrie zu $(k \cdot \pi | 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$
Achsensymmetrie zu $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

K6 **4** **a)** Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch.
b) Die Sinusfunktion ist 2π-periodisch.

K6 **5** **a)** $(0|0)$; $\left(\frac{\pi}{6}\middle|\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}\middle|\frac{1}{2}\right)$; $(\pi|0)$; $\left(\frac{7\pi}{6}\middle|-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{3\pi}{2}\middle|1\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}\middle|-\frac{1}{2}\right)$; $(2\pi|0)$
b) Die y-Achse ist wie üblich skaliert (1 ≙ 2 Kästchen). Zum einfacheren Zeichnen kann man die x-Achse wie angegeben skalieren, also so, dass gilt: π ≙ 6 Kästchen.
c) Für eine schnelle Zeichnung kann man den Graphen am Ursprung spiegeln.



K5 **6** **a)**



$x_1 = \frac{\pi}{6}$ $\quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$

b) Mit der Zeichnung aus a) erhält man: x liegt im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ und $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$.

c) Mit der Zeichnung aus a) erhält man: $x_1 = -\frac{1}{2}\pi$ und $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.

d) Mit der Zeichnung aus a) erhält man: x liegt im Intervall $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ und $\left[2\pi + \frac{\pi}{6}; 2\pi + \frac{5\pi}{6}\right] = \left[\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\right]$.

7 **a)** Es sind individuelle Lösungen möglich.

b) Es sind individuelle Lösungen möglich.

c) Gleichung der Funktion: $y = \sin x + 2$

d) Die Funktionswerte der Kosinusfunktion sind gegenüber denen der Sinusfunktion in x-Richtung um –90° (also „nach links“) verschoben (siehe Schulbuch Seite 84). Damit ist auch der Graph der Kosinusfunktion lediglich eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion.

Verständnis

K6

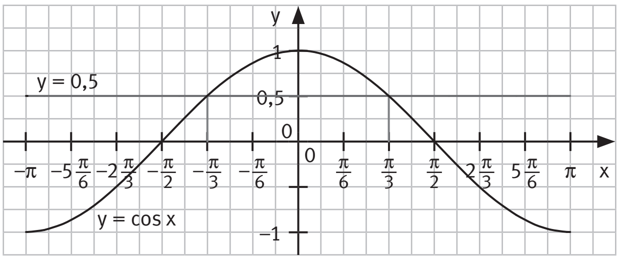
- Verschiebt man den Graphen der Sinusfunktion um $x = \frac{\pi}{2}$ in negative x-Richtung, so erhält man den Graphen der Kosinusfunktion. Es sind aber auch noch zahlreiche andere Verschiebungen möglich.
  Weitere Eigenschaften:
  Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
  Wertemenge $\mathbb{W}$: $x \in [-1; 1]$
  Periodenlänge: 2π
  Nullstellen: $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$
  Symmetrie: achsensymmetrisch zur y-Achse

K6

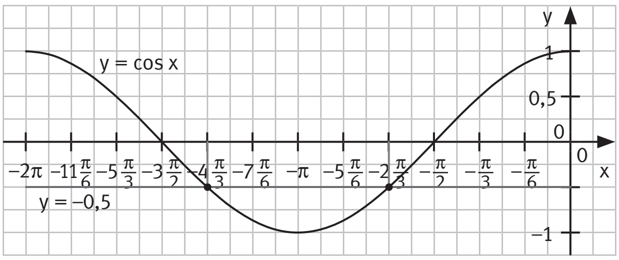
- Am Einheitskreis stellt cos x die x-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis dar, x ist dabei das Bogenmaß, um das der Punkt P (1 | 0) auf dem Einheitskreis gedreht wird. Für x = 0 nimmt cos x also den Extremwert 1 an, der in der Kosinuskurve ein Maximum ergibt. Für $x = \pi$ nimmt cos x den Extremwert −1 an, der in der Sinuskurve ein Minimum ergibt.

KX

1 **a)** $x_1 = -\frac{\pi}{3}$; $x_2 = -\frac{\pi}{3}$



b) $-\frac{4}{3}\pi \leq x \leq -\frac{2}{3}\pi$



Vertiefung

KX

- Es sind individuelle Lösungen möglich.
- 1. Möglichkeit: $g(x) = -2\sin(x)$
  2. Möglichkeit: $g(x) = 2\sin(x - \pi)$
  3. Möglichkeit: $g(x) = 2\sin(x + \pi)$

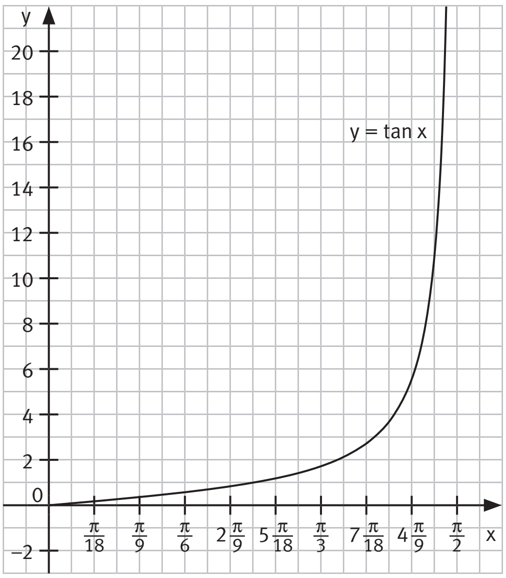
Verständnis

KX
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Die angegebenen x-Werte sind die Nullstellen von cos x. Somit ist für diese x-Werte tan x nicht definiert.

KX
- Addiert man zu einem beliebigen Winkel π, so erhält man im Einheitskreis dieselbe Ursprungsgerade wie vorher. Da der Tangens, visualisiert am Einheitskreis, der Länge der Strecke zwischen dem Punkt mit den Koordinaten (1|0) und dem Schnittpunkt der Geraden und der Tangente an den Kreis im Punkt (1|0) entspricht, hat die Tangensfunktion eine Periodenlänge von π. Bei der Sinus- und Kosinusfunktion entsprechen die y- bzw. x-Werte des Punktes auf dem Einheitskreis zum jeweiligen Winkel dem Sinus- bzw. Kosinuswert. Diese Werte wiederholen sich erst nach einer vollen Umdrehung, also ist die Periodenlänge hier 2π.

KX **1** Wertetabelle

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
tan x	0,00	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	n. d.



KX **2**
a) Taschenrechner liefert: $x = 0{,}42 \Rightarrow x_k = 0{,}42 + k \cdot \pi$
b) Taschenrechner liefert: $x = 1{,}10 \Rightarrow x_k = 1{,}10 + k \cdot \pi$
c) Taschenrechner liefert: $x = 1{,}310 \Rightarrow x_k = 1{,}31 + k \cdot \pi$
d) Taschenrechner liefert: $x = 1{,}40 \Rightarrow x_k = 1{,}40 + k \cdot \pi$

KX **3**
a) Die Aussage ist richtig. Die Tangensfunktion hat die Periode π, also ist sie insbesondere auch 2π-periodisch.
b) Die Aussage ist falsch. Die Tangensfunktion ist nicht symmetrisch zur y-Achse.
c) Die Aussage ist falsch. Zwar sind Sinus- und Tangensfunktion 2π-periodisch, jedoch kann die Sinusfunktion nicht durch Verschiebung aus der Tangensfunktion hervorgehen.
d) Die Aussage ist richtig. Die Tangensfunktion ist π-periodisch.

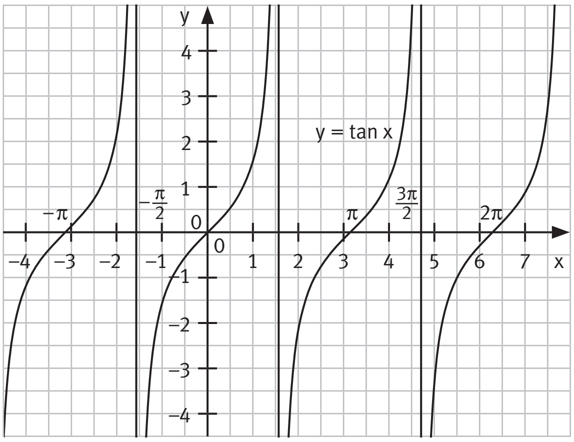
KX **4** **a)** und **b)**

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-5\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$5\frac{\pi}{12}$
tan x	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	/	–3,732	–1,732	–1	–0,577	–0,268

x	$\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{12}$	$2\frac{\pi}{3}$	$3\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{6}$	$11\frac{\pi}{12}$	π	$13\frac{\pi}{12}$	$7\frac{\pi}{6}$	$5\frac{\pi}{4}$	$4\frac{\pi}{3}$	$17\frac{\pi}{12}$
tan x	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	/	–3,732	–1,732	–1	–0,577	–0,268

? Zuordnung der letzten 6 Spalten / x-Werte
⇢ PDF S. 18

x	$2\frac{\pi}{3}$	$19\frac{\pi}{12}$	$5\frac{\pi}{3}$	$7\frac{\pi}{4}$	$11\frac{\pi}{6}$	$23\frac{\pi}{12}$	2π						
tan x	0	0,268	0,577	1	1,732	3,732	/	–3,732	–1,732	–1	–0,577	–0,268	0



c) Da der Kosinuswert für $x \in \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi; \frac{5}{2}\pi; \ldots\}$ null ist, ist der Tangens für diese Winkel nicht definiert. Die Definitionslücken treten bei allen ungeradzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ auf, d. h. bei $x = (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{2k-1}{2}\cdot\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

K6 **5** **a)** 1 Streckung um 2 bzw. Stauchung um 0,5. Für negative Werte ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

2 Verkürzung der Periodenlänge um den Faktor 1,5 bzw. Verlängerung der Periodenlänge um den Faktor $\frac{1}{2}$. Für negative Werte ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

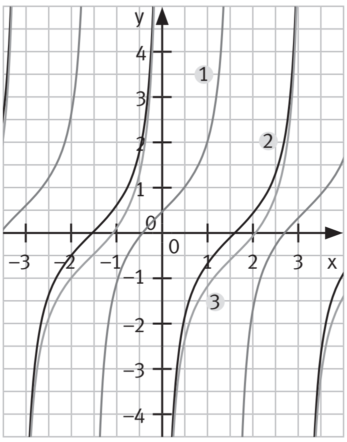
3 Verschiebung des Graphen um 1, –1, $\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$ entlang der y-Achse.

4 Verschiebung des Graphen um π, –π, $\frac{\pi}{4}$ bzw. $-\frac{\pi}{4}$ entlang der x-Achse.

b) 1 Verschiebung des Graphen der Tangensfunktion um 0,5 in y-Richtung.

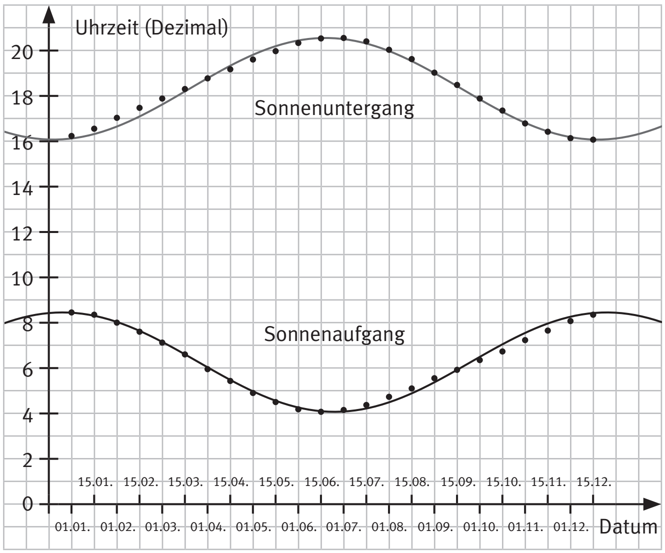
2 Verschiebung des Graphen der Tangensfunktion um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung.

3 Verschiebung des Graphen der Tangensfunktion um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung und um –0,5 in y-Richtung.



K2 **1** Vorbemermerkung: Zur korrekten Modellierung rechnet man zunächst die Minutenangaben in Nachkommastellen um: 8:27 Uhr ≙ $8\frac{27}{60} = 8{,}45$, usw.

		Dezimale Uhrzeit	
Datum	x-Koordinate	Sonnenaufgang	Sonnenuntergang
01.01.	1	**8,45**	16,23
15.01.	2	8,35	16,55
01.02.	3	8,00	17,03
15.02.	4	7,60	17,47
01.03.	5	7,12	17,88
15.03.	6	6,60	18,30
01.04.	7	5,95	18,77
15.04.	8	5,43	19,17
01.05.	9	4,90	19,60
15.05.	10	4,50	19,97
01.06.	11	4,18	20,33
15.06.	12	**4,07**	20,53
01.07.	13	4,15	**20,55**
15.07.	14	4,37	20,40
01.08.	15	4,73	20,03
15.08.	16	5,10	19,62
01.09.	17	5,55	19,02
15.09.	18	5,92	18,48
01.10.	19	6,35	17,88
15.10.	20	6,73	17,35
01.11.	21	7,23	16,78
15.11.	22	7,65	16,42
01.12.	23	8,07	16,13
15.12.	24	8,35	**16,07**



a) und **b)** Beide Graphen legen eine Sinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - d)) + c$ nahe.
Die Werte für a und c erhält man mithilfe des **Maximums** (8,45 bzw. 20,55) und **Minimums** (4,07 bzw. 16,07). Der Wert b ergibt sich aus der Periodenlänge von 24 Tagen. Also erhält man:

Sonnenaufgang:
$f(x) = \frac{8{,}45 - 4{,}07}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot (x - d)\right) + \frac{8{,}45 + 4{,}07}{2}$

Sonnenuntergang:
$f(x) = \frac{20{,}55 - 16{,}07}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot (x - d)\right) + \frac{20{,}55 + 16{,}07}{2}$

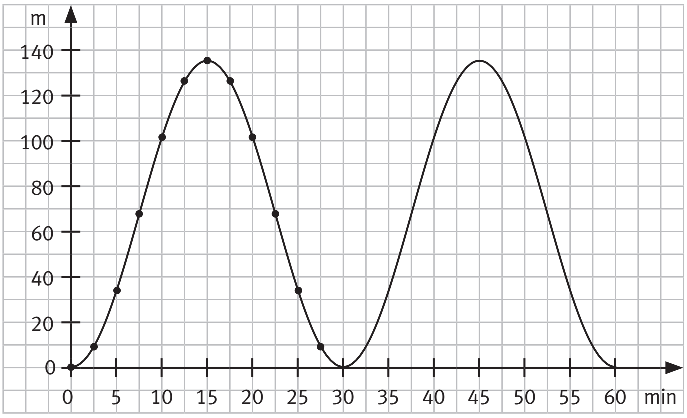
Den Wert d zur Verschiebung des Graphen in x-Richtung erhält man am besten durch Probieren, evtl. mithilfe eines Schiebereglers:

$f(x) = 2{,}19 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot (x + 5{,}4)\right) + 6{,}26$

$f(x) = 2{,}24 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{24} \cdot (x + 17{,}8)\right) + 18{,}31$

Insbesondere sind für d auch andere Werte möglich, ebenso ist die Modellierung mithilfe der Kosinusfunktion auch richtig.

K2 **2** **a)**



b) Das Prinzip ist bei diesem Funktionsgraphen dasselbe wie beim Einheitskreis: Bestimmten Winkelmaßen (hier: Minuten) werden die y-Werte der Punkte auf dem Kreis zugeordnet.
Konkret bedeutet das: Der Funktionsgraph ist gegenüber dem einer „normalen" Sinusfunktion um $\frac{135}{2}$ m in y-Richtung verschoben, zusätzlich um den Faktor $\frac{135}{2}$ gestreckt. Außerdem ist die Periode verändert.

c) $f(x) = 67{,}5 \cdot \sin(12 \cdot (x - 7{,}5)) + 67{,}5$ x: Zeit in min f (x): Höhe in m

K1 **3** **a)** Der Heizvorgang ist periodisch, da mit einer Periode von vier Stunden immer dasselbe passiert. Die Minimaltemperatur beträgt 20,5 °C, die Maximaltemperatur 21,5 °C.

b) $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{4}x\right) + 21 = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 21$

x: Zeit in h seit einer Temperatur von 21 °C f (x): Temperatur in °C

K2 **4** **a)** Die Periodenlänge beträgt 12 Stunden: Zweimal täglich gibt es Hoch- und zweimal täglich gibt es Niedrigwasser.

b) Lösungsmöglichkeit:

Maximum: ca. 640 Minimum: ca. 380

$f(x) = \frac{640 - 380}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12} \cdot (x - d)\right) + \frac{640 + 380}{2}$

x: Zeit in h seit 1.10 um 0 h f (x): Wasserstand in cm

Den Wert d erhält man am besten durch Probieren, evtl. mithilfe eines Schiebereglers.

$f(x) = 130 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{12} \cdot (x - 8{,}7)\right) + 510$

Drei Vergleichswerte: $f(0) = 638{,}4$ $f(6) = 381{,}6$ $f(9) = 530{,}3$

Wissen

KX

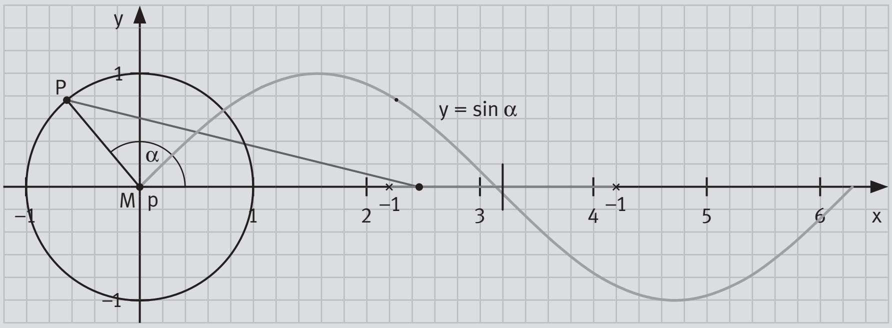
Kurbelwelle

- $\alpha = \alpha'$
- Die Nullagen $\alpha = 0°$ und $\alpha = 180°$ entsprechen auf der Messachse den Werten 1 und –1.
- Das Auswertungsprotokoll ist eine Tabelle, in der mit $\Delta x = 15°$ alle vorgegebenen Werte zwischen 0° und 180° eingetragen werden. Die Funktionswerte sind dann die y-Werte der Punkte auf der Kurbelwelle bzw. die x-Werte der Punkte auf der Messachse.
- Grundsätzlich gilt: Die y-Werte der Punkte auf der Kurbelwelle sind eindeutig. Die x-Werte der Punkte auf der Messeachse sind es nicht, sie hängen von der Position der Messachse ab bzw. von der Länge der Stange, die die Drehbewegung in eine geradlinige Bewegung umsetzt. Die Tabelle zeigt Messwerte für eine Länge der Stange von 3 LE bzw. 5 LE.

α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
x für Stangenlänge 3 LE	1	0,95	0,82	0,62	0,37	0,10	–0,17
x für Stangenlänge 5 LE	1	0,96	0,84	0,66	0,42	0,16	–0,10
Y	0	0,26	0,5	0,71	0,87	0,97	1

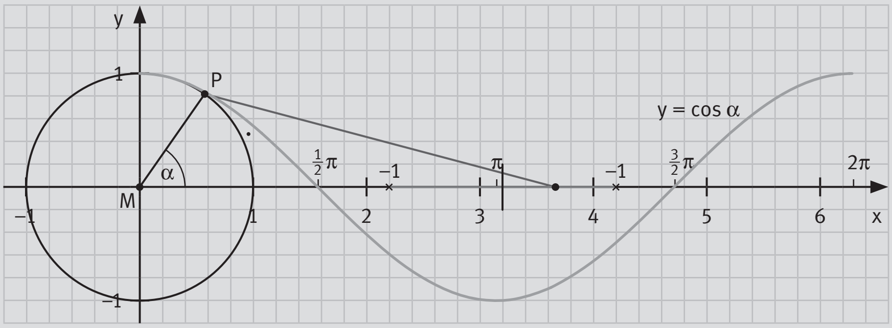
α	105°	120°	135°	150°	165°	180°
x für Stangenlänge 3 LE	–0,42	–0,63	–0,79	–0,91	–0,98	–1
x für Stangenlänge 5 LE	–0,35	–0,58	–0,76	–0,89	–0,97	–1
y	0,97	0,87	0,71	0,5	0,26	0

- Kurve für die y-Werte: Der Verlauf des Graphen entspricht der Sinuskurve $y = \sin \alpha$.

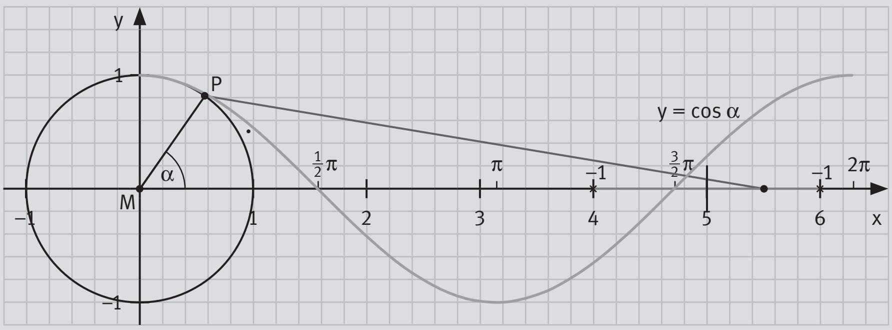


Kurve für die x-Werte: Für $\alpha = 0°$ bzw. $\alpha = 180°$ stimmen die x-Werte auf der Messachse mit den „normalen" Kosinuswerten überein: 1 bzw. –1. Für alle anderen Werte gibt es – je nach Länge der Stange bzw. Position der Messachse – mehr oder weniger große Abweichungen. Je länger die Stange ist, desto geringer sind die Abweichungen der Messwerte von den „normalen" Kosinuswerten. Grundsätzlich gilt: Die Abweichung kommt zustande, weil die Stange nicht parallel zur Messachse geführt ist, sondern „schräg".

Graph für Stangenlänge 3:



Graph für Stangenlänge 5:



- Der Graph für die y-Werte ist eine Sinuskurve. Der Graph für die x-Werte ist dem einer Kosinuskurve ähnlich, stimmt aber nicht mit ihr überein. Je länger die Stange ist, desto ähnlicher wird der Graph dem der Kosinuskurve.

Verständnis

KX

- Da im Zähler des Bruchs $\frac{4}{\sin(\varphi + 30°)}$ eine Konstante steht, genügt es, den Nenner zu betrachten. Der Bruch nimmt dann den kleinsten Wert an, wenn der Nenner den größten Wert annimmt und umgekehrt. Für $\varphi = 60°$ nimmt der Sinus im Nenner seinen größten Wert, nämlich 1, an, woraus folgt, dass der Bruch seinen kleinsten Wert annimmt.

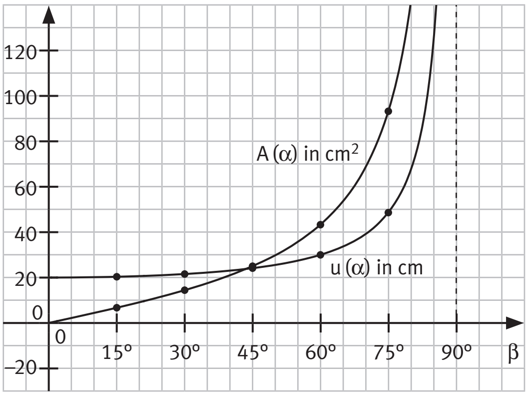
KX **1** **a)** $\tan\alpha = \frac{h_c}{5\,\text{cm}} \Rightarrow h_c = 5\,\text{cm} \cdot \tan\alpha$

$A = \frac{1}{2} c \cdot h_c = 25 \tan\alpha\ \text{cm}^2$. Damit die Eigenschaft „gleichschenklig" gewährleistet ist, ist ein Wertebereich von $0° < \alpha < 90°$ sinnvoll.

b) $\cos\alpha = \frac{5\,\text{cm}}{\overline{AC_n}} \Rightarrow \overline{AC_n} = \frac{5\,\text{cm}}{\cos\alpha} = \overline{BC_n}$

$\Rightarrow u = 10\,\text{cm} + 2 \cdot \overline{AC_n} = \left(10 + \frac{10}{\cos\alpha}\right)\text{cm}$

c)



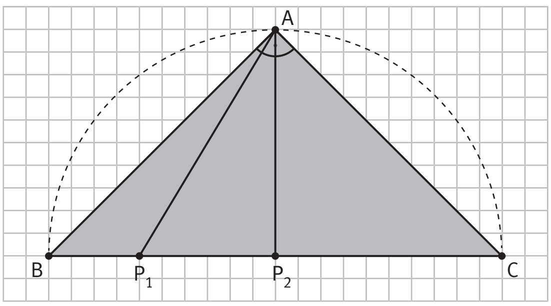
d) Für $\alpha = 0°$ reduziert sich das Dreieck auf eine Strecke, der „Umfang" dieser Strecke beträgt also 20 cm, was jedoch ein „theoretischer" Wert ist, denn von einer Strecke lässt sich i. A. kein Umfang angeben, sondern die (halb so große) Länge einer Strecke. Der Flächeninhalt ist 0. Die beiden Funktionen von Umfang bzw. Flächeninhalt haben an der Stelle 0 ein Minimum, allerdings existiert eben an für $\alpha = 0°$ kein Dreieck.

Für $\alpha = 90°$ existiert ebenfalls kein Dreieck, da kein Schnittpunkt C existiert. Sowohl Umfang als auch Flächeninhalt sind nicht definiert, der Graph hat an dieser Stelle eine Asymptote. Nähert sich α dem Wert 90°, so werden sowohl Umfang als auch Flächeninhalt unendlich groß.

KX **2** **a)** Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$2 \cdot \overline{AB}^2 = (10\,\text{cm})^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{50}\,\text{cm} \approx 7{,}07\,\text{cm}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 25\,\text{cm}^2$



b) Ein sinnvoller Wertebereich ist $0 < x < 10$.

c) Da das Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig ist, gilt: $\beta = \gamma = 45°$.
Mithilfe des Kosinussatzes erhält man:
$\overline{AP_1}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP_1}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BP_1} \cdot \cos\beta = 34\,\text{cm}^2 \Rightarrow \overline{AP_1} = \sqrt{34}\,\text{cm}$
Einsetzen des Wertes für $\overline{BP_2}$ ergibt: $\overline{AP_2} = 5\,\text{cm}$.
Mit $\overline{BP_n} = x\,\text{cm}$ berechnet man $\overline{AP_n} = \sqrt{50 + x^2 - 2 \cdot \sqrt{50} \cdot x \cdot \cos 45°}\,\text{cm} = \sqrt{x^2 - 10x + 50}\,\text{cm}$.
Andere Lösungsmöglichkeit über Pythagoras.

d) Der Wert für $\overline{AP_n} = \sqrt{x^2 - 10x + 50}\,\text{cm} = \sqrt{(x-5)^2 + 25}\,\text{cm}$ wird minimal für $x = 5$, wobei dann ebenfalls gilt: $\overline{AP_0} = \sqrt{25}\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$.

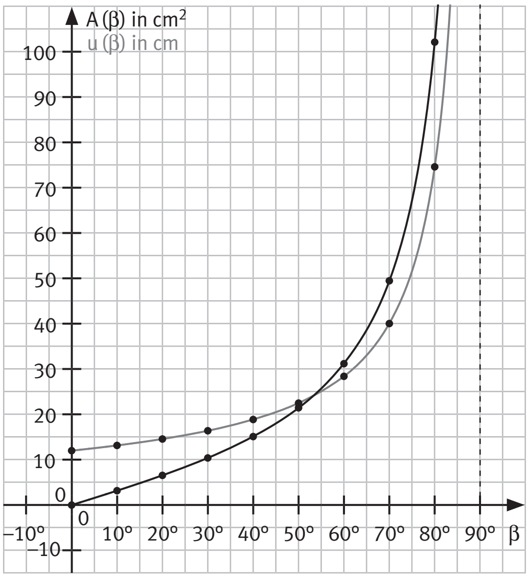
e) $\overline{AP_0}$ ist der Abstand von A zu [BC] und damit die kürzeste Verbindung zwischen A und [BC]. Die Streckenlänge wird minimal, wenn $[AP_n] \perp [BC]$, also $x = 5$ bzw. $\overline{AP_0} = 5\,\text{cm}$.

f) Unter Verwendung der allgemeinen Flächenformel für Dreiecke erhält man:
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot x \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\sqrt{50} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}5x\,\text{cm}^2$

KX **3** **a)** $\tan\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 6\,\text{cm} \cdot \tan\beta$
Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, also gilt:
$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} \cdot \tan\beta = 18\tan\beta\,\text{cm}^2$

b)

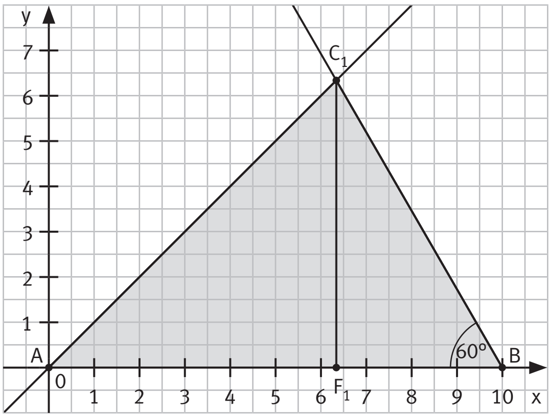
β in °	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
A (β) in cm²	0	3,2	6,6	10,4	15,1	21,5	31,2	49,5	102,1	–



c) $u = a + b + c$
b aus: $\tan\beta = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 6\,\text{cm} \cdot \tan\beta$
a aus: $\cos\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{6\,\text{cm}}{\cos\beta}$
$u = \frac{6\,\text{cm}}{\cos\beta} + 6\,\text{cm} \cdot \tan\beta + 6\,\text{cm}$
$u = 6\,\text{cm}\left(\frac{1}{\cos\beta} + \tan\beta + 1\right)$

d) Zeichnung siehe b)

KX **4 a)**



b) Berechne die Koordinaten des Punktes C_n in Abhängigkeit vom Winkel β. Die Gerade durch B und C_n hat die Steigung $m = -\tan\beta$. Setze B (10|0) und m in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + t$ ein: $0 = -\tan\beta \cdot 10 + t \Rightarrow t = 10\tan\beta$ und damit folgt $y = \tan\beta \cdot x + 10\tan\beta$.

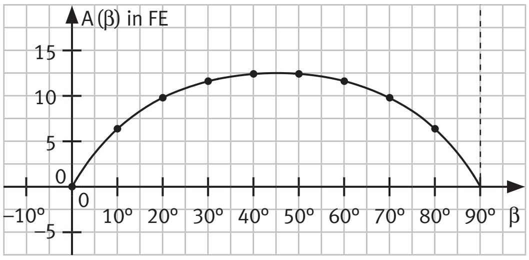
Die x-Koordinate von C_n folgt aus dem Gleichsetzen beider Geradengleichungen, also $\tan\beta \cdot x + 10\tan\beta = x \Rightarrow x = \frac{10\tan\beta}{\tan\beta + 1}$ und damit ist $C_n\left(\frac{10\tan\beta}{\tan\beta+1}\middle|\frac{10\tan\beta}{\tan\beta+1}\right)$.

Für β = 60° erhält man gerundet C_1 (6,34|6,34). Für den Flächeninhalt des Dreiecks F_1BC_1 gilt:
$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{F_1C_1} \cdot \overline{BF_1} = \frac{1}{2} \cdot 6{,}34 \cdot (10 - 6{,}34) = 11{,}6$ (FE).

c) Mit den Zwischenergebnissen aus b) folgt:
$A(\beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10\tan\beta}{\tan\beta+1} \cdot \left(10 - \frac{10\tan\beta}{\tan\beta+1}\right) = \frac{50\tan\beta}{\tan\beta+1} - \frac{50\tan^2\beta}{(\tan\beta+1)^2} = \frac{50\tan\beta\cdot(\tan\beta+1) - 50\tan^2\beta}{(\tan\beta+1)^2} = \frac{50\tan\beta}{(\tan\beta+1)^2}$ (FE)

d)

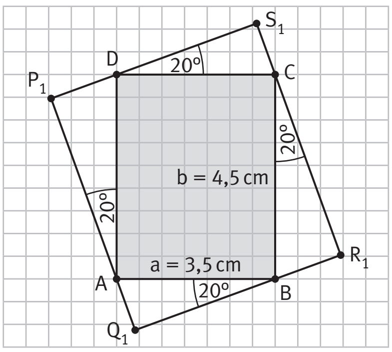
β in °	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
A (β) in FE	0	6,4	9,8	11,6	12,4	12,4	11,6	9,8	6,4	–



e) $T_1(\beta) = \frac{50\tan\beta}{(\tan\beta+1)^2} = \frac{50\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+1\right)^2} = \frac{50\sin\beta\cos\beta}{\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta + \cos^2\beta} = \frac{50\sin\beta\cos\beta}{1 + 2\sin\beta\cos\beta} = \frac{25\sin 2\beta}{1 + 2\sin 2\beta} = \frac{25}{\frac{1}{\sin 2\beta} + 1} = T_2(\beta)$

f) T_2 wird maximal, wenn der Nenner minimal wird. Für Winkel zwischen 0° und 90° wird der Nenner minimal, wenn 2β = 90°, also β = 45°. Die zugehörigen Koordinaten des Punktes sind C_1 (5|5).

KX **5 a)**



Im Dreieck Q_1BA gilt:

$\cos 20° = \frac{\overline{Q_1B}}{3{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{Q_1B} = 3{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 20° = 3{,}29\,\text{cm}$

$\sin 20° = \frac{\overline{AQ_1}}{3{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{AQ_1} = 3{,}5\,\text{cm} \cdot \sin 20° = 1{,}20\,\text{cm}$

Im Dreieck ADP_1 gilt:

$\cos 20° = \frac{\overline{AP_1}}{4{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{AP_1} = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos 20° = 4{,}23\,\text{cm}$

$\sin 20° = \frac{\overline{P_1D}}{4{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{P_1D} = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \sin 20° = 1{,}54\,\text{cm}$

Damit gilt für die Seitenlängen im Rechteck $P_1Q_1R_1S_1$:

$\overline{Q_1R_1} = 3{,}29\,\text{cm} + 1{,}54\,\text{cm} = 4{,}83\,\text{cm}$

$\overline{R_1S_1} = 4{,}23\,\text{cm} + 1{,}20\,\text{cm} = 5{,}43\,\text{cm}$

b) Es gilt: $\overline{Q_nR_n} = \overline{P_nS_n}$ und $\overline{Q_nP_n} = \overline{R_nS_n}$.

Im Dreieck Q_nBA gilt: $\cos\mu = \frac{\overline{Q_nB}}{3{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{Q_nB} = 3{,}5\,\text{cm} \cdot \cos\mu$

$\sin\mu = \frac{\overline{AQ_n}}{3{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{AQ_n} = 3{,}5\,\text{cm} \cdot \sin\mu$

Im Dreieck ADP_n gilt: $\cos\mu = \frac{\overline{AP_n}}{4{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{AP_n} = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos\mu$

$\sin\mu = \frac{\overline{P_nD}}{4{,}5\,\text{cm}} \Rightarrow \overline{P_nD} = 4{,}5\,\text{cm} \cdot \sin\mu$

Daraus folgt:

$\overline{P_nQ_n} = \overline{R_nS_n} = \overline{AQ_n} + \overline{AP_n} = (3{,}5 \cdot \sin\mu + 4{,}5 \cdot \cos\mu)\,\text{cm}$

$\overline{Q_nR_n} = \overline{P_nS_n} = \overline{Q_nB} + \overline{P_nD} = (3{,}5 \cdot \cos\mu + 4{,}5 \cdot \sin\mu)\,\text{cm}$

c) $A(\mu) = \overline{Q_nR_n} \cdot \overline{R_nS_n} = (3{,}5\,\text{cm} \cdot \cos\mu + 4{,}5\,\text{cm} \cdot \sin\mu) \cdot (3{,}5\,\text{cm} \cdot \sin\mu + 4{,}5\,\text{cm} \cdot \cos\mu)$

$= ((3{,}5\,\text{cm})^2 + (4{,}5\,\text{cm})^2) \cdot \sin\mu\cos\mu + 3{,}5\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot (\sin^2\mu + \cos^2\mu)$

$= 32{,}5\,\text{cm}^2 \cdot \sin\mu\cos\mu + 15{,}75\,\text{cm}^2 = (15{,}75 + 16{,}25 \cdot \sin 2\mu)\,\text{cm}^2$

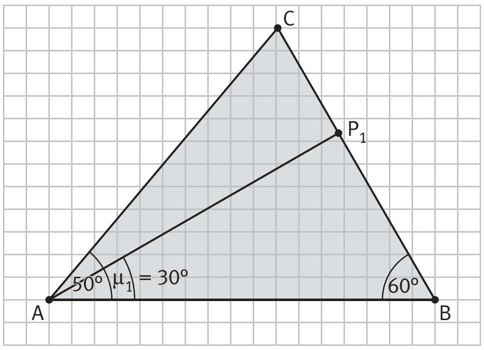
d) $A(\mu) = 1{,}5 \cdot a \cdot b$

$\Leftrightarrow 15{,}75 + 16{,}25 \cdot \sin 2\mu = 23{,}625$

$\Leftrightarrow \sin 2\mu = \frac{63}{130}$

$\Rightarrow 2\mu = 29{,}0° \Rightarrow \mu = 14{,}5°$

KX **6** **a)**



Sinussatz im Dreieck ABP_1: $\frac{\overline{AP_1}}{\sin 60°} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180° - 30° - 60°)}$

$\Rightarrow \overline{AP_1} = \frac{8\,\text{cm} \cdot \sin 60°}{\sin 90°} = 4\sqrt{3}\,\text{cm} \approx 6{,}93\,\text{cm}$

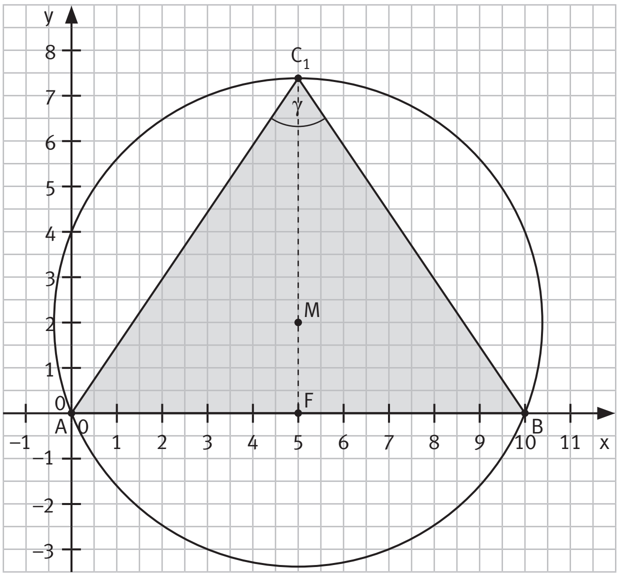
b) $\frac{\overline{AP_n}}{\sin 60°} = \frac{\overline{AB}}{\sin(180° - \mu - 60°)}$

$\Rightarrow \overline{AP_n} = \frac{8\,\text{cm} \cdot \sin 60°}{\sin(120° - \mu)} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin(120° - \mu)}\,\text{cm}$

c) $\overline{AP_n}$ wird minimal, wenn $\sin(120° - \mu)$ maximal wird. Da nur $0 < \mu < 50°$ sinnvoll ist, wird $\sin(120° - \mu)$ maximal für $\mu = 30°$. Der kleinstmögliche Wert für $\overline{AP_n}$ ist $\overline{AP_1} \approx 6{,}93\,\text{cm}$ (vgl. a).

d) $\overline{AP_n}$ wird minimal, wenn $\sphericalangle AP_1B = 90°$, denn in diesem Fall ist $\overline{AP_n}$ der Abstand zwischen A und [BC] und es folgt $\mu = 180° - 60° - 90° = 30°$.

KX **7 a)**



Nach der Verallgemeinerung des Thalessatzes ist der Winkel γ für alle Punkte auf dem Kreisbogen identisch, man spricht vom Fasskreisbogen.

b) Bestimme zunächst die Koordinaten von C_1:

$\overline{MB} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \Rightarrow C_1\left(5 \,\Big|\, \underbrace{2 + \sqrt{29}}_{\approx 10{,}39}\right)$

Im Dreieck FBC_1 gilt: $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{5}{2 + \sqrt{29}} \Rightarrow \gamma = 68{,}2°$.

c) Im Dreieck ABC_n gilt der Sinussatz:

$\frac{\overline{BC_n}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin 68{,}2°} \Rightarrow \overline{BC_n} = \frac{\overline{AB}}{\sin 68{,}2°} \cdot \sin\alpha = 10{,}77 \cdot \sin\alpha$ (LE)

$\frac{\overline{AC_n}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin 68{,}2°} \Rightarrow \overline{AC_n} = 10{,}77 \cdot \sin\beta = 10{,}77 \cdot \sin(180° - 68{,}2° - \alpha) = 10{,}77$

$\sin(180° - 68{,}2° - \alpha) = 10{,}77 \cdot \sin(\alpha + 68{,}2°)$ (LE)

d) Die Steigung von g ist $m = \tan\alpha \Rightarrow g(x) = \tan\alpha \cdot x$.
Die Steigung von h ist $m = \tan(111{,}8° - \alpha) \Rightarrow h(x) = \tan(111{,}8° - \alpha) \cdot x + t$.
Setze die Koordinaten von B in die Funktionsgleichung ein:
$0 = \tan(111{,}8° - \alpha) \cdot 10 + t \Rightarrow t = -10\tan(111{,}8° - \alpha)$
$\Rightarrow h(x) = \tan(111{,}8° - \alpha) \cdot x - 10\tan(111{,}8° - \alpha)$

e) $u(\alpha) = \overline{AB} + \overline{BC_n} + \overline{AC_n}$
$= 10 \text{ LE} + 10{,}77 \cdot \sin\alpha \text{ LE} + 10{,}77 \cdot \sin(\alpha + 68{,}2°) \text{ LE}$
$= (10 + 10{,}77 \cdot (\sin\alpha + \sin(\alpha + 68{,}2°)) \text{ LE}$

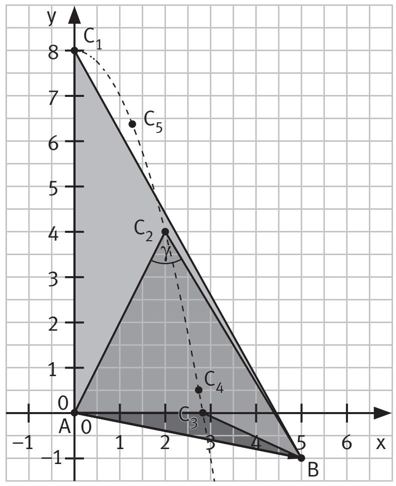
$A(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC_n} \cdot \sin\alpha$
$= \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ LE} \cdot 10{,}77 \cdot \sin(\alpha + 68{,}2°) \text{ LE} \cdot \sin\alpha$
$= 53{,}85 \cdot \sin(\alpha + 68{,}2°) \cdot \sin\alpha$ FE

f)

α in °	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
A (α) in FE	9,15	18,41	26,65	32,88	36,36	36,65	33,73	27,95	20	10,84	1,59

Das Maximum liegt zwischen 50° und 60°.
Der maximale Flächeninhalt ergibt sich geometrisch für den Fall, dass C_n auf der Mittelsenkrechten von [AB] liegt, sodass das Dreieck ABC_n maximal hoch ist. Dann liegt ein gleichschenkliges Dreieck vor, sodass gilt: $\alpha = \frac{180° - 68{,}2°}{2} = 55{,}9°$.
Dabei ist $A_{max} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (2 + \sqrt{29}) = 10 + 5\sqrt{29} \approx 36{,}9$ (FE).
Derselbe Wert ergibt sich, wenn man α = 55,9° in die Formel für den Flächeninhalt bei e) einsetzt.

KX **8** **a)** $\overrightarrow{AC_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC_3} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$



b) Für die Koordinaten der Punkte C_n gilt:

$x = 4\sin\varepsilon \;\Rightarrow \varepsilon = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$

Gleichung der Trägerkurve:

$y = 8\cos 2\varepsilon = 8\cos\left(2\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right)$

c) Man berechnet zuerst die Seitenlängen:

$\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 1^2}\ \text{LE} = \sqrt{26}\ \text{LE}$

$\overline{AC_2} = \sqrt{4^2 + 2^2}\ \text{LE} = \sqrt{20}\ \text{LE}$

$\overline{BC_2} = \sqrt{5^2 + 3^2}\ \text{LE} = \sqrt{34}\ \text{LE}$

Mithilfe des Kosinussatzes erhält man:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC_2}^2 + \overline{BC_2}^2 - 2 \cdot \overline{AC_2} \cdot \overline{BC_2} \cdot \cos(\sphericalangle AC_2B)$

$\Rightarrow \sphericalangle AC_2B = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{AB}^2 - \overline{AC_2}^2 - \overline{BC_2}^2}{-2 \cdot \overline{AC_2} \cdot \overline{BC_2}}\right) = 57{,}5°$

d) $\overline{AC_n} = \sqrt{16\sin^2\varepsilon + 64\cos^2(2\varepsilon)}\ \text{LE}$

e) $\overline{AC_n} = \sqrt{16\sin^2\varepsilon + 64\cos^2(2\varepsilon)}\ \text{LE} = \sqrt{16\sin^2\varepsilon + 64(\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon)^2}\ \text{LE}$

$= \sqrt{16\sin^2\varepsilon + 64(1 - 2\sin^2\varepsilon)^2}\ \text{LE} = \sqrt{16\sin^2\varepsilon + 64 - 256\sin^2\varepsilon + 256\sin^4\varepsilon}$

$= \sqrt{256\sin^4\varepsilon - 240\sin^2\varepsilon + 64}\ \text{LE} \underset{\substack{\text{Substitution} \\ \sin^2\varepsilon = x}}{=} \sqrt{256x^2 - 240x + 64}\ \text{LE} = \sqrt{256\left(x^2 - \frac{15}{16}x + \frac{1}{4}\right)} = \text{LE}$

Mittels quadratischer Ergänzung erhält man $x^2 - \frac{15}{16}x + \frac{1}{4} = x^2 - \frac{15}{16}x + \left(\frac{15}{32}\right)^2 - \left(\frac{15}{32}\right)^2 + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{15}{32}\right)^2 + \frac{31}{1024}$.

$\overline{AC_n}$ nimmt den minimalen Wert $\sqrt{\frac{31}{1024}}$ für $x = \frac{15}{32}$ an.

Damit berechnet man $\sin^2\varepsilon = \frac{15}{32} \;\Rightarrow \varepsilon = 43{,}2°$ und $\overrightarrow{AC_4} = \begin{pmatrix} 2{,}74 \\ 0{,}50 \end{pmatrix}$.

f) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC_n}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn die Steigung von $\overrightarrow{AC_n}$ den Wert 5 hat.

$\frac{8\cos(2\varepsilon)}{4\sin\varepsilon} = 5$

$\frac{\cos(2\varepsilon)}{\sin\varepsilon} = \frac{5}{2}$

$\frac{\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \frac{5}{2}$

$1 - \sin^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon = \frac{5}{2}\sin\varepsilon$

$0 = 2\sin^2\varepsilon + \frac{5}{2}\sin\varepsilon - 1$

Substitution $\sin\varepsilon = x$:

$2x^2 + \frac{5}{2}x - 1 = 0$

$x_1 = \frac{-\sqrt{57} - 5}{8}$??c -1, entfällt also

$x_2 = \frac{\sqrt{57} - 5}{8} \approx 0{,}32$

Resubstitution:

$\sin\varepsilon = 0{,}32$

$\varepsilon = 18{,}7° \qquad \Rightarrow C_5\,(1{,}28\,|\,6{,}36)$

„c“ ??? – nicht lesbar.
PDF S.30

KX **9** **a)** Es sind Werte von $0° \le \alpha \le 90°$ möglich.

b) Bei der Schnittfläche handelt es sich um eine Raute.

Im Dreieck SMZ_n gilt: $\sphericalangle Z_nSM = 45°$ und damit $\overline{MS} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$. Daraus erhält man:

$\frac{\overline{MZ_n}}{\sin 45°} = \frac{\overline{MS}}{\sin(180° - (\alpha + 45°))} \;\Rightarrow \overline{MZ_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sin(\alpha + 45°)}\,\text{cm} = \frac{4}{\sin(\alpha + 45°)}\,\text{cm}.$

Darauf folgt $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{Z_nZ_n'} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{\sin(\alpha + 45°)} \cdot 8\sqrt{2}\,\text{cm}^2 = 32\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha + 45°)}\,\text{cm}^2$.

c) Angenommen es gäbe ein solches Winkelmaß. Dann würde gelten:
$32\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm}^2 = 16\sqrt{2}\,\text{cm}^2$
$\Leftrightarrow 2 = \sin(\alpha + 45^\circ)$
Sinuswerte können niemals größer 1 sein, also existiert kein solches Winkelmaß.

d) $32\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm}^2 > 36\sqrt{2}\,\text{cm}^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{8}{9} > \sin(\alpha + 45^\circ)$, also:
$0^\circ \le \alpha + 45^\circ < 62{,}73^\circ$ und schließlich $0^\circ \le \alpha < 17{,}73^\circ$ folgt.

e) $32\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm}^2$ wird minimal, wenn $\sin(\alpha + 45^\circ)$ maximal wird. Dies ist der Fall für $\alpha = 45^\circ$, denn der Sinus nimmt dort den Wert 1 an.
Für den minimalen Flächeninhalt gilt: $A_{min} = 32\sqrt{2}$.

f) Für die Höhe h_n der Pyramide berechnet man: $\cos\alpha = \frac{h_n}{\overline{MZ_n}} \Rightarrow h_n = \cos\alpha \cdot \frac{4}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm}$ und damit

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\,\text{cm} \cdot 8\,\text{cm} \cdot \cos\alpha \cdot \frac{4}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm} = \frac{128}{3} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm}^3.$

g) $\frac{128}{3} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + 45^\circ)}\,\text{cm}^3 = 8\sqrt{2}\,\text{cm}^3$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos\alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{3\sqrt{2}}{16}$$

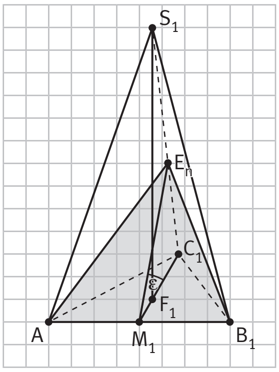
$$\Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{3}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \alpha = 59{,}0^\circ$$

KX **10 a)**

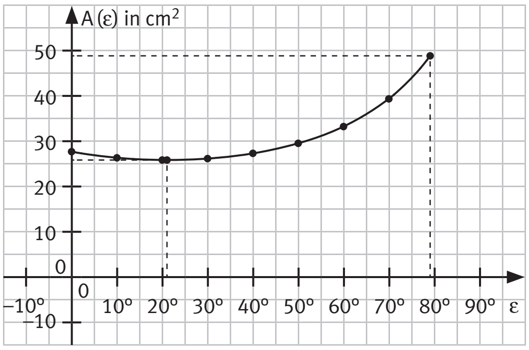


b) Die Höhe im gleichseitigen Dreieck AB_nC_n ist $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.
F_1 teilt $\overline{MC_1}$ im Verhältnis 1 : 2. Im Dreieck $F_nC_nS_n$ gilt daher:
$\tan(\sphericalangle S_1C_1F_1) = \frac{1{,}5a}{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \Rightarrow \sphericalangle S_1C_1F_1 = 68{,}95^\circ$
Im Dreieck $M_nC_nE_n$ gilt:

$$\frac{\sin(180^\circ - (68{,}95^\circ + \varepsilon))}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sin(68{,}95)}{\overline{ME_1}} \xRightarrow{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha} \overline{ME_1} = \frac{\sin(68{,}95)}{\sin(68{,}95^\circ + \varepsilon)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{0{,}808 \cdot a}{\sin(68{,}95^\circ + \varepsilon)}$$

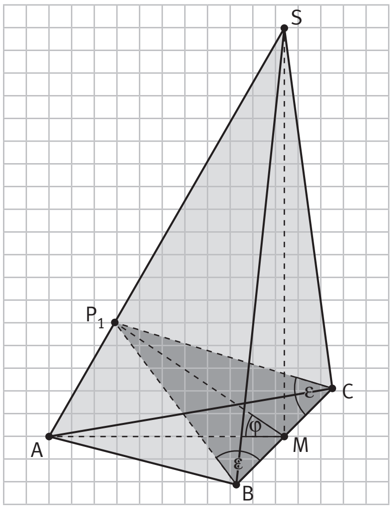
Daraus folgt $A\,(a;\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}808 \cdot a}{\sin(68{,}95^\circ + \varepsilon)} \cdot a = \frac{0{,}404 \cdot a^2}{\sin(68{,}95^\circ + \varepsilon)}$.
Der Winkel ε kann höchstens mit $\sphericalangle C_nM_nS_n$ übereinstimmen, der auch im Dreieck $F_nM_nS_n$ zu finden ist:
$\tan \sphericalangle C_nM_nS_n = \frac{\overline{F_nS_n}}{\overline{M_nF_n}} = \frac{1{,}5a}{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a} \Rightarrow \sphericalangle C_nM_nS_n = 79{,}11^\circ \Rightarrow 0 \le \varepsilon \le 79{,}11^\circ$

c) $A\,(8\,\text{cm}; \varepsilon) = \frac{25{,}856}{\sin(68{,}95° + \varepsilon)}\,\text{cm}^2$



$A_{min} = 25{,}9\,\text{cm}^2$ für $\varepsilon = 21{,}05°$
(Für $\varepsilon = 21{,}05°$ wird der Sinuswert im Nenner des Terms maximal, also 1.)
$A_{max} = 48{,}9\,\text{cm}^2$ für $\varepsilon = 79{,}11°$

KX **11 a)**



b) Aufgrund von Symmetrie gilt: $\overline{BS} = \overline{CS}$. Im Dreieck BMS gilt:
$\overline{BS}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{MS}^2 \Rightarrow \overline{BS} = \overline{CS} = \sqrt{(3\,\text{cm})^2 + (9\,\text{cm})^2} = 3\sqrt{10}\,\text{cm}$
Für die Höhe im gleichseitigen Dreieck ABC gilt: $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\,\text{cm} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$ und damit:
$\overline{AS}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MS}^2 \Rightarrow \overline{AS} = \sqrt{(3\sqrt{3}\,\text{cm})^2 + (9\,\text{cm})^2} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$

c) Unter Verwendung des Kosinussatzes gilt:
$\overline{AS}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BS}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BS} \cdot \cos\beta$
$\Rightarrow \beta = \cos^{-1}\left(\frac{\overline{AS}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BS}^2}{-2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BS}}\right) = 80{,}90°$

d) Im Dreieck BCP_n gilt:
$\tan\varepsilon = \frac{\overline{MP_n}}{\overline{BM}} \Rightarrow \overline{MP_n} = \overline{BM} \cdot \tan\varepsilon = 3\,\text{cm} \cdot \tan\varepsilon$, also:
$A\,(\varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot 3\,\text{cm} \cdot \tan\varepsilon \cdot 6\,\text{cm} = 9 \cdot \tan\varepsilon\,\text{cm}^2$

e) $\tan\sphericalangle MAS = \frac{\overline{MS}}{\overline{AM}} = \frac{9\,\text{cm}}{3\sqrt{3}\,\text{cm}} = \sqrt{3} \Rightarrow \sphericalangle MAS = 60°$

f) $\tan\varepsilon = \frac{\overline{MP_n}}{\overline{BM}} \Rightarrow \frac{\sin\sphericalangle MAS}{\overline{MP_n}} = \frac{\sin(180° - (\sphericalangle MAS + \varphi))}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\sin 60°}{\overline{MP_n}} = \frac{\sin(120° - \varphi)}{\overline{AM}}$
$\Rightarrow \overline{MP_n} = \overline{AM} \cdot \frac{\sin 60°}{\sin(120° - \varphi)} = \frac{9\,\text{cm}}{2\sin(120° - \varphi)}$
$\Rightarrow \tan\varepsilon = \frac{1}{\overline{BM}} \cdot \frac{9\,\text{cm}}{2\sin(120° - \varphi)} = \frac{3}{2\sin(120° - \varphi)}$

g) Die Beziehung gilt für $\varepsilon = 60°$.

h) Mit Teilaufgaben d) und f) folgert man $A(\varphi) = 9 \cdot \frac{3}{2\sin(120° - \varphi)}\,\text{cm}^2$.
Der Flächeninhalt wird minimal, wenn der Nenner maximal wird, also für $\varphi = 30°$.
Dann gilt: $A_{min} = 13{,}5\,\text{cm}^2$

i) Es gilt: $0° \le \varphi \le 90°$. Mit Teilaufgaben h) und f) folgert man:
$\sqrt{3} \le \tan\varepsilon \le 3$, also $60° \le \varepsilon \le 71{,}57°$
Die Grenzwinkel kann man auch erhalten, indem man die Dreiecke ABM bzw. SBM betrachtet.

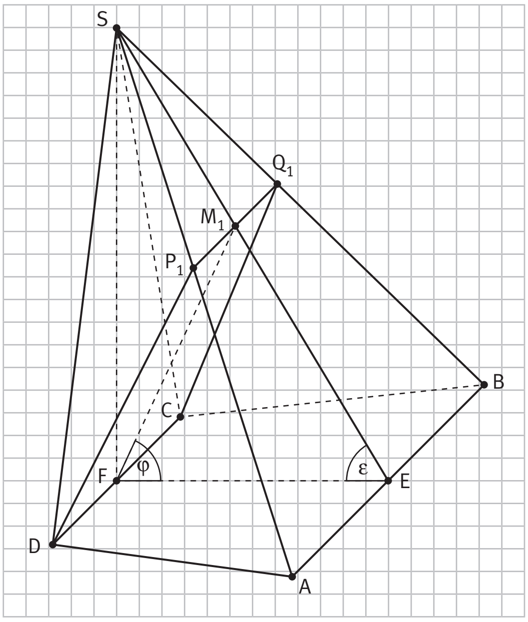
j) Man berechnet $9 \cdot \frac{3}{2\sin(120° - \varphi)}\,\text{cm}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 9\,\text{cm} \Rightarrow \sin(120° - \varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 30°$
und mit Teil f) $\tan\varepsilon = 1{,}5$, also $\varepsilon = 56{,}31°$.
Anmerkung: Das Dreieck mit BCP_3 stimmt mit dem Dreieck mit minimalem Flächeninhalt aus Teilaufgabe h) überein.

k) Höhe h der Pyramide $ABCP_n$:
$\sin\varphi = \frac{h}{\overline{MP_n}} \Rightarrow h = \overline{MP_n} \cdot \sin\varphi = \frac{9\,\text{cm}}{2\sin(120° - \varphi)} \cdot \sin\varphi$
Flächeninhalt des Dreiecks ABC:
$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AM} = \frac{1}{2} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 3\sqrt{3}\,\text{cm} = 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$
Volumen der Pyramide:
$V(\varphi) = \frac{1}{6} \cdot A_{\Delta ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \cdot \frac{9\,\text{cm}}{2\sin(120° - \varphi)} \cdot \sin\varphi = \frac{27}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin(120° - \varphi)}\,\text{cm}^3$

l) Berechne ε mithilfe von Teilaufgabe f): $\tan 65° = \frac{3}{2\sin(120° - \varphi)} \Rightarrow \varphi = 75{,}62°$
$V(75{,}62°) = \frac{27}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sin 75{,}62°}{\sin(120° - 75{,}62°)} = 32{,}4\,\text{cm}^3$

m) $V(\varphi) = 27\sqrt{3}\,\text{cm}^3 \Leftrightarrow \frac{27}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin(120° - \varphi)} = \frac{27}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}^3 \Leftrightarrow \sin\varphi = 2\sin(120° - \varphi)$
$\Leftrightarrow \sin\varphi = 2(\sin 120° \cos\varphi - \sin\varphi \cos 120°) \Leftrightarrow \sin\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi + \sin\varphi \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\varphi = 0$
$\Leftrightarrow \varphi = 90°$
Daraus ergibt sich mit Teilaufgabe i) $\varepsilon = 71{,}57°$.
Die Pyramide $ABCP_5$ entspricht der Pyramide ABCS.

KX **12 a)** und **b)**



c) $\tan\varepsilon = \frac{\overline{SF}}{\overline{FE}} = \frac{10\,\text{cm}}{6\,\text{cm}} \Rightarrow \varepsilon = 59{,}04°$

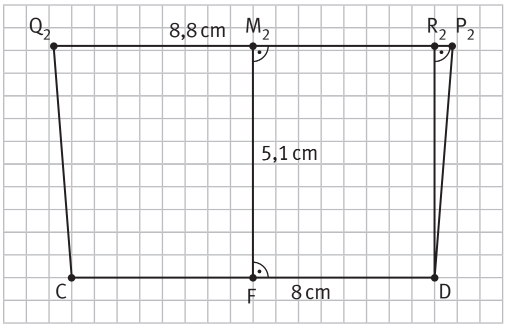
d) Sinussatz im Dreieck FEM_n:
$\frac{\overline{EM_n}}{\overline{FE}} = \frac{\sin\varphi}{\sin(180° - (\varphi + 59{,}04°))}$, und damit $\overline{EM_n} = \frac{6\sin\varphi}{\sin(\varphi + 59{,}04°)}\,\text{cm}$.

e) Es sind nur Winkel $0° \leq \varphi \leq 90°$ möglich. $\overline{FM_n}$ ist genau dann minimal, wenn $\sphericalangle FM_nE$ ein rechter Winkel ist. Dann gilt: $\sin \varepsilon = \frac{\overline{FM_n}}{\overline{FE}} \Rightarrow \overline{FM_2} = 6\,\text{cm} \cdot 59{,}04° = 5{,}1\,\text{cm}$.
$\varphi = 180° - 90° - 59{,}04° = 30{,}96°$

f) Satz des Pythagoras im Dreieck FES:

$\overline{SE} = \sqrt{(6\,\text{cm})^2 + (10\,\text{cm})^2} = 2\sqrt{34}\,\text{cm} \approx 11{,}7\,\text{cm}$ und mit Teilaufgabe d):
$\overline{EM_2} = 3{,}1\,\text{cm} \Rightarrow \overline{SM_2} = 8{,}6\,\text{cm}$
Der Strahlensatz in der rechten Mantelfläche liefert: $\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_2}}{\overline{SE}} \Rightarrow \overline{P_2Q_2} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{SM_2}}{\overline{SE}} = 8{,}8\,\text{cm}$.

Für den Flächeninhalt des Trapez' gilt somit: $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{FM_2} \cdot \frac{\overline{P_2Q_2} + \overline{CD}}{2} = 21{,}4\,\text{cm}^2$
Bestimmung der Innenwinkel:



Im Trapez CDP_2Q_2 zeichnet man wie angegeben ein Dreieck DP_2R_2 ein. Darin gilt:
$\tan \sphericalangle P_2DR_2 = \frac{\overline{R_2P_2}}{\overline{DR_2}} = \frac{0{,}4\,\text{cm}}{5{,}1\,\text{cm}} \Rightarrow \sphericalangle P_2DR_2 = 4{,}48°$
Es ergeben sich Innenwinkel von 94,48° bzw. 85,52°.

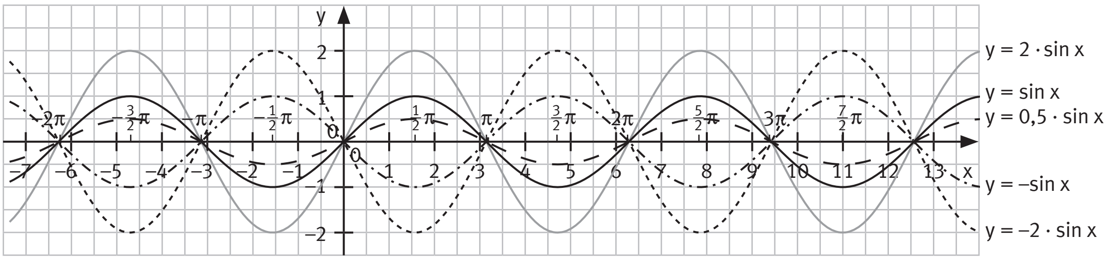
g) Es gilt: $\overline{SE} = 2\sqrt{34}\,\text{cm}$ und mit Teilaufgabe d) folgt:
$\overline{SM_n} = \left(2\sqrt{34} - \frac{6 \sin \varphi}{\sin(\varphi + 59{,}04°)}\right)\text{cm}$.
Der Strahlensatz in der rechten Mantelfläche der Pyramide liefert: $\frac{\overline{P_nQ_n}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SE}}$

$$\Rightarrow \overline{P_nQ_n} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{SM_n}}{\overline{SE}} = 6\,\text{cm} \cdot \frac{\left(2\sqrt{34} - \frac{6 \sin \varphi}{\sin(\varphi + 59{,}04°)}\right)\text{cm}}{2\sqrt{34}\,\text{cm}} = \left(6 - \frac{18 \sin \varphi}{\sqrt{34}\, \sin(\varphi + 59{,}04°)}\right)\text{cm}.$$

KX **1** **a)** $\mathbb{L} = \{0{,}26;\ 2{,}88\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{4{,}09;\ 5{,}34\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{2{,}20;\ 4{,}08\}$
d) $\mathbb{L} = \{1{,}48;\ 4{,}80\}$ **e)** $\mathbb{L} = \{0{,}21;\ 3{,}35\}$ **f)** $\mathbb{L} = \{2{,}01;\ 5{,}15\}$

K1 **2** **a)** $\alpha = 2 \cdot (-180°) + (-142°) = -502°$ $\sin(-502°) \approx -0{,}616$ $\cos(-502°) \approx -0{,}788$
b) $\beta = 3 \cdot 180° + 142° = 682°$ $\sin 682° \approx -0{,}616$ $\cos 682° \approx 0{,}788$
c) $\gamma = 5 \cdot (-180°) + (-38°) = -938°$ $\sin(-938°) \approx 0{,}616$ $\cos(-938°) \approx -0{,}788$

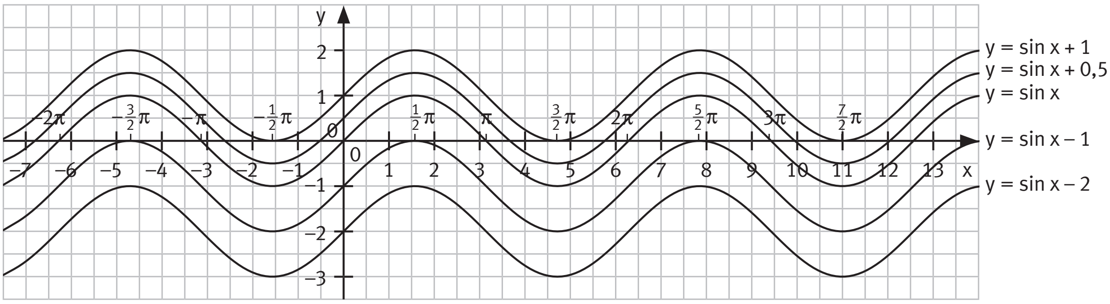
K1 **3** **a)**



Der Graph von y = a · sin x ist gegenüber dem Graphen von y = sin x um den Faktor |a| in y-Richtung gestreckt und für a < 0 zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

b) Bei einer Sinusfunktion der Form y = a · sin x beschreibt der Faktor a, um welchen Faktor der Graph gegenüber dem Graphen von y = sin x in y-Richtung gestreckt ist. Ein negativer Wert von a bedeutet zusätzlich eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse.

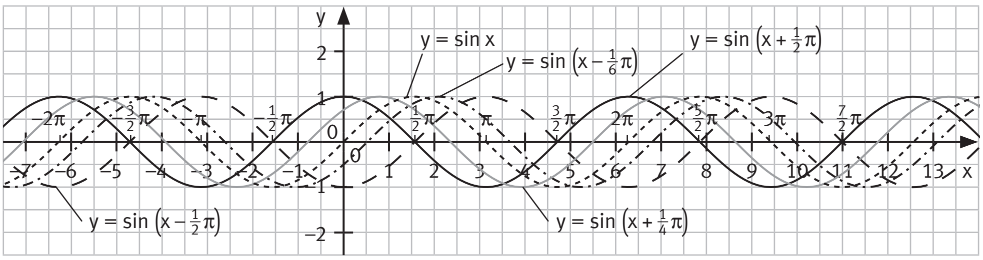
K1 **4** **a)**



Alle dargestellten Funktionen haben die gleiche Amplitude und sie haben ihre Extremstellen bei denselben Bogenmaßen. Sie haben jedoch verschiedene Nullstellen und Schnittpunkte mit der y-Achse. Die Graphen sind gegeneinander in y-Richtung verschoben.

b) Bei einer Sinusfunktion der Form y = sin x + c beschreibt der Wert c die Verschiebung des Funktionsgraphen um c Einheiten entlang der y-Achse.

K1 **5** **a)**

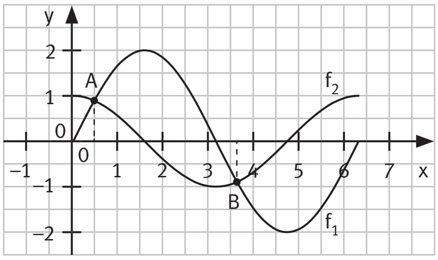


Alle Funktionen haben dieselbe Amplitude, jedoch haben sie unterschiedliche Nullstellen bzw. Schnittpunkte mit der y-Achse. Die vier Funktionen sind somit Verschiebungen der Sinusfunktion y = sin x in x-Richtung.

b) Bei einer Sinusfunktion der Form y = sin (x – d) beschreibt der Wert d die Verschiebung der Funktion um d Einheiten entlang der x-Achse.

K3 **6** 1 Wickle ein Blatt Papier um eine Gurke und befestige die Enden des Papiers aneinander.
2 Schneide die Gurke in der Mitte schräg auseinander.
3 Entferne die Gurke aus den zwei zylinderförmigen Papierstücken, die aus dem Schnitt entstanden sind.
4 Rolle die beiden Teile des Blatts auseinander.
5 Füge die beiden Teile zusammen.

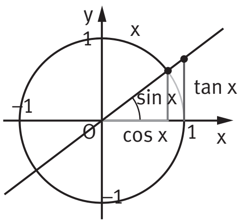
KX **7** **a)**



b) Grafische Bestimmung: A (0,5 | 0,9); B (3,6 | –0,9)
Rechnerische Probe: $2 \cdot \sin 0{,}5 = 0{,}96 \approx 0{,}88 = \cos 0{,}5$
$2 \cdot \sin 3{,}6 = -0{,}89 \approx -0{,}90 = \cos 3{,}6$

K5 **8** **a)** Für die x-Koordinate jedes Schnittpunktes gilt $\sin x = \cos x$.
Diese Gleichung ist im Bereich $x \in [-2\pi; 2\pi]$ erfüllt für $x_E = \frac{\pi}{4}$, für $x_U = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$, für $x_F = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ und für $x_R = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.
Die gemeinsamen Punkte der Sinus- und Kosinuskurve sind $U\left(-\frac{7\pi}{4}\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(-\frac{3\pi}{4}\middle|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $E\left(\frac{\pi}{4}\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, und $R\left(\frac{5\pi}{4}\middle|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Länge des Streckenzugs UFER:
$$3 \cdot \sqrt{(x_E - x_F)^2 + (y_E - y_F)^2}\ \text{LE} = 3 \cdot \sqrt{\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2}\ \text{LE} = 3 \cdot \sqrt{\pi^2 + 2}\ \text{LE} \approx 10{,}3\ \text{LE}$$
b) Länge der Strecke $\overline{UB}$:
$$\sqrt{(x_R - x_U)^2 + (y_R - y_U)^2}\ \text{LE} = \sqrt{\left[\frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right]^2 + \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2}\ \text{LE} = \sqrt{9\pi^2 + 2}\ \text{LE} \approx 9{,}5\ \text{LE}$$
Der Streckenzug UFER ist um $\frac{3\sqrt{\pi^2 + 2} - \sqrt{9\pi^2 + 2}}{\sqrt{9\pi^2 + 2}} \approx 8\,\%$ länger als die Strecke $\overline{UR}$.

KX **9**



a) $\mathbb{L} = \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right[$ **b)** $\mathbb{L} = \left]\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right[$
c) $\mathbb{L} = \left]1{,}11; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]4{,}25; \frac{3\pi}{2}\right[$ **d)** $\mathbb{L} = \left]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right[$

KX **10** **a)** $2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = 1$

$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = 2\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{4}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$

$\alpha_1 = 60°;\ \alpha_2 = 120°;\ \alpha_3 = 240°;\ \alpha_4 = 300°$

b) $\cos^2\alpha + 0{,}5\cdot\tan\alpha = 0{,}5 - \sin^2\alpha \overset{\text{Pythagoras}}{\Leftrightarrow} 1 + 0{,}5\cdot\tan\alpha = 0{,}5 \Leftrightarrow \tan\alpha = -1$

$\alpha_1 = 135°;\ \alpha_2 = 315°$

c) $\mathbb{L} = \varnothing$

d) $\alpha_1 = 0°;\ \alpha_2 = 90°;\ \alpha_2 = 360°$

e) Vorgehensweise siehe Schulbuch Seite 118/Beispiel I

$\alpha = 143{,}13°$

f) $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = 0{,}6 \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \pm 0{,}6$

$\alpha_1 = 73{,}7°;\ \alpha_2 = 286{,}3°$

K1 **11** A – 4 B – 1 C – 2 D – 3, 5 E – 6 F – 7

KX **12** **a)** $T_{min} = -1$ für $x = 3 - \frac{\pi}{2} \approx 1{,}43$

$T_{max} = 1$ für $x = 3 - \frac{3\pi}{2} \approx -1{,}71$

b) $T_{min} = -0{,}8$ für $x = 2 - \pi \approx -1{,}14$

$T_{max} = 1{,}2$ für $x = 2$

K1 **13** **a)** Das ist richtig. **b)** Das ist falsch. **c)** Das ist falsch.
d) Das ist richtig. **e)** Das ist falsch. **f)** Das ist richtig.
g) Das ist richtig. **h)** Das ist richtig. **i)** Das ist richtig.
j) Das ist richtig.

Es sind individuelle Begründungen möglich.

KX **14** **a)** $T_2 = \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta = \sin^2\alpha\cdot(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta\cdot(1-\sin^2\alpha) = T_1$

b) $T_2 = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) + 1 = T_1$

c) $T_2 = \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta = \cos^2\alpha\cdot(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta\cdot(1-\cos^2\alpha) = T_1$

KX **15** **a)** $25°10' = 25\frac{1}{6} = 25{,}17$ $25°20' = 25\frac{2}{6} = 25{,}33$ $25°30' = 25\frac{3}{6} = 25{,}5$

$25°40' = 25\frac{4}{6} = 25{,}67$ $25°50' = 25\frac{5}{6} = 25{,}83$

b) $\sin 25°30' = 0{,}4305$; $\sin 27°20' = 0{,}4592$ $\sin 29°40' = 0{,}4950$

c) $\sin 26° - \sin 25° = 0{,}4384 - 0{,}4226 = 0{,}0158$

$\sin 27° - \sin 26° = 0{,}4540 - 0{,}4384 = 0{,}0156$

$\sin 28° - \sin 27° = 0{,}4695 - 0{,}4540 = 0{,}0155$

$\sin 29° - \sin 28° = 0{,}4848 - 0{,}4695 = 0{,}0153$

$\sin 30° - \sin 29° = 0{,}5000 - 0{,}4848 = 0{,}0152$

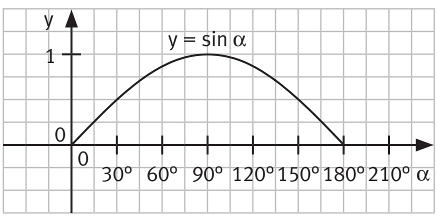
Die Sinusfunktion ist nicht linear, weswegen die Differenzen nicht konstant sind.

Hinweis: Für kleine Winkel verläuft die Sinusfunktion zwar annähernd, jedoch nicht exakt linear.

d) Bei einer linearen Funktion sind die Differenzen wie in c) exakt konstant.

Für $0° \le \alpha \le 90°$ nimmt die Differenz aus c) ab, für $90° \le \alpha \le 180°$ nimmt sie zu.

In der Grafik fehlen gestrichelte Linien. PDF S.38



KX **16** **a)** $U(t) = U_{max} \cdot \sin(100\pi \cdot t)$

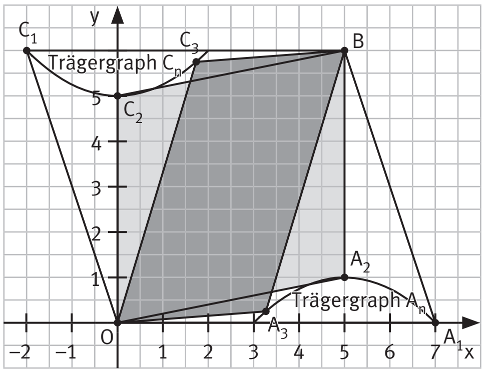
$U(t) = 325\,V \cdot \sin(100\pi \cdot t)$

b) $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 325\,V \approx 230\,V$

KX **17** **a)** $\overrightarrow{OA_1} = \begin{pmatrix} 2\cos 0° + 5 \\ \sin^2 0° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $A_1\,(7\,|\,0)$

$\overrightarrow{OA_2} = \begin{pmatrix} 2\cos 90° + 5 \\ \sin^2 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $A_2\,(5\,|\,1)$

$\overrightarrow{OA_3} = \begin{pmatrix} 2\cos 150° + 5 \\ \sin^2 150° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}3 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$, also $A_3\,(3{,}27\,|\,0{,}25)$



b) $A(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2\cos\alpha + 5 & 5 \\ \sin^2\alpha & 6 \end{vmatrix}$

$= (2\cos\alpha + 5) \cdot 6 - (\sin^2\alpha) \cdot 5$

$= 12\cos\alpha + 30 - 5\sin^2\alpha$

$= 12\cos\alpha + 30 - 5(1 - \cos^2\alpha)$

$= 5\cos^2\alpha + 12\cos\alpha + 25$

c) $A_n = \begin{pmatrix} 2\cos\alpha + 5 \\ \sin^2\alpha \end{pmatrix}$

$C_n = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA_n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\cos\alpha + 5 \\ \sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos\alpha \\ 6 - \sin^2\alpha \end{pmatrix}$

Trägergraph zu A_n:

$x = 2\cos\alpha + 5 \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{1}{2}(x - 5)$

$y = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}(x - 5)\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}(x - 5)^2$

Trägergraph zu C_n:

$x = -2\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = -\frac{1}{2}x$

$y = 6 - \sin^2\alpha = 5 + \cos^2\alpha = 5 + \frac{1}{4}x$

KX **18** Hinweis: Aus Gründen der Einfachheit werden Längen ohne die Angabe LE angegeben.

a) D_n ist der Schnittpunkt zweier Halbgeraden. Die erste ist der Schenkel eines Winkels α, den man in A an die x-Achse anträgt. Die zweite ist der Schenkel eines Winkels, den man in B an das Lot auf die x-Achse anträgt. C_n ist der Lotfußpunkt von D_n auf die x-Achse.

b) Das Dreieck ABD_1 ist gleichschenklig $\Rightarrow \overline{BD_1} = 6 \Rightarrow \overline{BC_1} = 6 \cdot \sin 30° = 3$

$\Rightarrow \overline{C_1D_1} = 6 \cdot \cos 30° = 3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $C_1\,(9\,|\,0)$

$\overrightarrow{OD_1} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$, also $D_1\,(9\,|\,3\sqrt{3})$

c) $\sphericalangle AD_nB = 90° - 2\alpha$.

Sinussatz im Dreieck ABD_n: $\frac{\sin\alpha}{\overline{BD_n}} = \frac{\sin(90° - 2\alpha)}{6} \;\Rightarrow\; \overline{BD_n} = \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)}$

$\sphericalangle C_nBD_n = 90° - \alpha \;\Rightarrow\; \overline{BC_n} = \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \cos(90° - \alpha)$

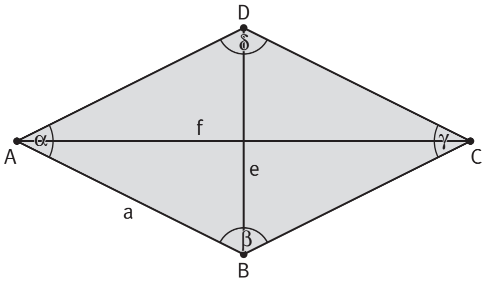
$\overline{C_nD_n} = \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \sin(90° - \alpha)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC_n} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \cos(90° - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$, also $C_n\left(6 + \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \cos(90° - \alpha)\,\middle|\,0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD_n} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \cos(90° - \alpha) \\ \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \sin(90° - \alpha) \end{pmatrix}$, also $D_n\left(6 + \frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \cos(90° - \alpha)\,\middle|\,\frac{6\sin\alpha}{\sin(90° - 2\alpha)} \cdot \sin(90° - \alpha)\right)$

KX

19 a) Skizze:



Berechne die Länge der Diagonalen der Raute (in LE):

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}e}{a} \Rightarrow e = 2a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}f}{a} \Rightarrow f = 2a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

$A(a, \alpha) = \frac{1}{2} e \cdot f = \frac{1}{2} 2a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot 2a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2a^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \overbrace{=}^{\text{Schulbuch Seite } \frac{117}{14}} 2a^2 \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos^2\alpha}{2}}$

$A(a, \alpha) = 2a^2 \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)}{4}} = 2a^2 \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{4}} = 2a^2 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{4}} = 2a^2 \frac{\sin\alpha}{2} = a^2 \sin\alpha$ (FE)

b) $A(a, \alpha) = a^2 \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{A(a, \alpha)}{a^2} = \frac{18\,\text{cm}^2}{(5\,\text{cm})^2} = 0{,}72 \Rightarrow \alpha = \gamma = 46{,}05°$

$\Rightarrow = \beta = 180° - 46{,}05° = 133{,}95°$

K5 **1** Die Werte für das Bogenmaß sind auf zwei Dezimalen gerundet.

1 **a)** $\sin 55° = \sin 125° = \sin -235° = \sin 415°$

b) Bogenmaß: $55° \mathrel{\hat{=}} 0{,}96$ $125° \mathrel{\hat{=}} 2{,}18$ $-235° \mathrel{\hat{=}} -4{,}10$ $415° \mathrel{\hat{=}} 7{,}24$

2 **a)** $\sin 85° = \sin 95° = \sin -275°$

b) Bogenmaß: $85° \mathrel{\hat{=}} 1{,}48$ $95° \mathrel{\hat{=}} 1{,}66$ $-275° \mathrel{\hat{=}} -4{,}80$

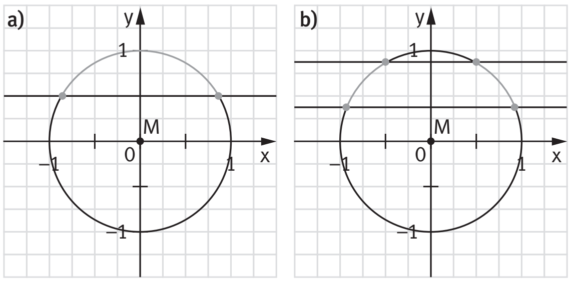
3 **a)** $\sin -25° = \sin -155° = \sin 205° = \sin 335°$

b) Bogenmaß: $-25° \mathrel{\hat{=}} -0{,}44$ $-155° \mathrel{\hat{=}} -2{,}71$ $205° \mathrel{\hat{=}} 3{,}58$ $335° \mathrel{\hat{=}} 5{,}87$

K5 **2** **a)** $x_1 = 1{,}10$ $x_2 = 2{,}04$ **b)** $x_1 = 0{,}44$ $x_2 = 2{,}70$ **c)** $x_1 = -0{,}09$ $x_2 = -3{,}05$

d) $x = -\frac{\pi}{2}$ **e)** $x_1 = -1{,}15$ $x_2 = -1{,}99$ **f)** $x_1 = -1{,}48$ $x_2 = -1{,}66$

K5 **3**

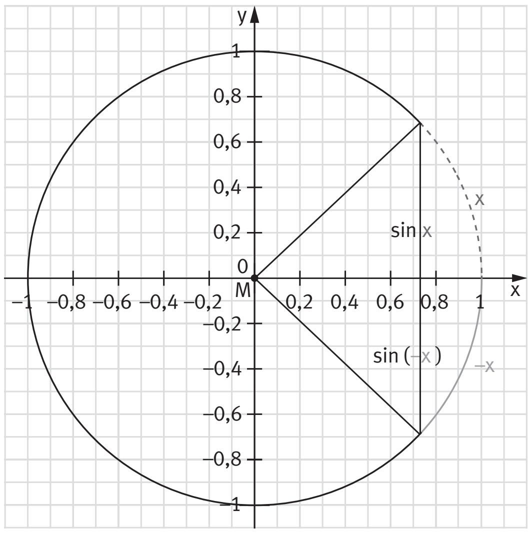


K1 **4** **a)** Man kann beispielhaft einige Werte ausrechnen:

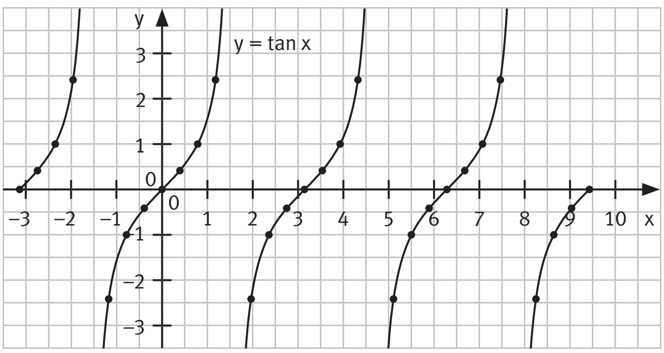
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$

b) Einer Zeichnung am Einheitskreis kann man entnehmen: Die Werte für sin x und sin (–x) sind betragsmäßig gleich groß, haben aber unterschiedliche Vorzeichen.
Also gilt: $\sin(-x) = -\sin x$



KX **5**



Definitionsmenge: $\mathbb{D} = [-\pi; 2\pi]$ $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right\}$

Nullstellen: $x_1 = -\pi$; $x_2 = 0$; $x_3 = \pi$; $x_4 = 2\pi$; $x_5 = 3\pi$

KX **6** **a)** Periodenlänge 2
b) Periodenlänge 6

K1 **7** Lösungsmöglichkeiten:
a) Bei einer Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = a \cdot \sin x$ beschreibt der Faktor a die Amplitude, also den im Vergleich zu $y = \sin x$ größeren oder kleineren „Ausschlag“ des Funktionsgraphen.
b) Bei einer Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = \sin(b \cdot x)$ beschreibt der Faktor b, wie die Periode im Vergleich zu $y = \sin x$ verändert ist.
c) Bei einer Sinusfunktion mit der Gleichung $f(x) = \sin(x - d)$ beschreibt der Wert d die Verschiebung des Funktionsgraphen entlang der x-Achse im Vergleich zu $y = \sin x$.

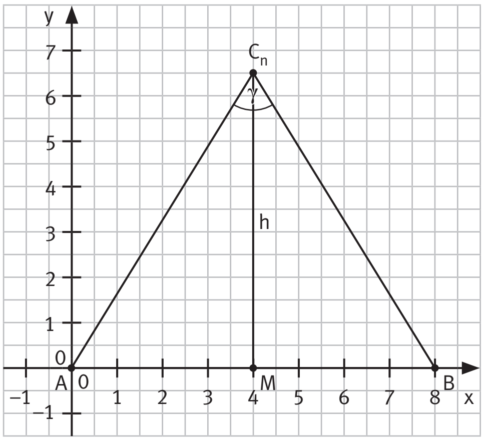
K6 **8** Lösungsmöglichkeit:
Der rote Funktionsgraph entsteht aus dem schwarzen der Grundfunktion $f(x) = \sin x$ durch Spiegelung an der x-Achse. Man erhält als „vorläufigen“ Funktionsterm: $f^*(x) = -\sin x$
Zusätzlich wird der gespiegelte Graph noch um den Faktor 2 gestreckt, sodass der Funktionsterm lautet: $f'(x) = -2 \cdot \sin x$

KX **9** Lösungsmöglichkeit: Der Graph der Kosinusfunktion entsteht durch Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion um $-\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

KX **10** **a)** $\mathbb{L} = \{0; 2{,}42\}$ **b)** $\mathbb{L} = \{2{,}03; 3{,}61\}$ **c)** $\mathbb{L} = \{0°; 0{,}72\}$

KX **11** $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

KX **12**



a) Für $\gamma = 60°$ erhält man ein gleichseitiges Dreieck mit $u = 3 \cdot 8\,\text{cm} = 24\,\text{cm}$.
Für $\gamma = 90°$ erhält man ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.

$$\overline{AC_n}^2 + \overline{AC_n}^2 = \overline{AB}^2$$
$$2 \cdot \overline{AC_n}^2 = 64\,\text{cm}^2$$
$$\overline{AC_n} = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$$
$$u = 2\overline{AC_n} + \overline{AB} = 2 \cdot 4\sqrt{2}\,\text{cm} + 8\,\text{cm} \approx 19{,}3\,\text{cm}$$

b) Es gilt: $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{4\,\text{cm}}{\overline{AC_n}} \Rightarrow \overline{AC_n} = \frac{4\,\text{cm}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$

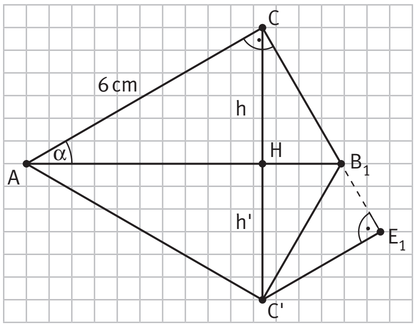
$$u(\alpha) = 2\overline{AC_n} + 8\,\text{cm} = \frac{8\,\text{cm}}{\sin\frac{\gamma}{2}} + 8\,\text{cm}$$

c) Hinweis: Es genügt, sich auf $0° < \gamma < 180°$ zu beschränken.

$$\frac{8\,\text{cm}}{\sin\frac{\gamma}{2}} + 8\,\text{cm} = 24\,\text{cm} \Leftrightarrow \frac{8\,\text{cm}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = 16\,\text{cm} \Leftrightarrow \sin\frac{\gamma}{2} = 0{,}5 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 30° \Rightarrow \gamma = 60°$$

Der Wert stimmt auch mit a) überein.

KX **13** **a)**



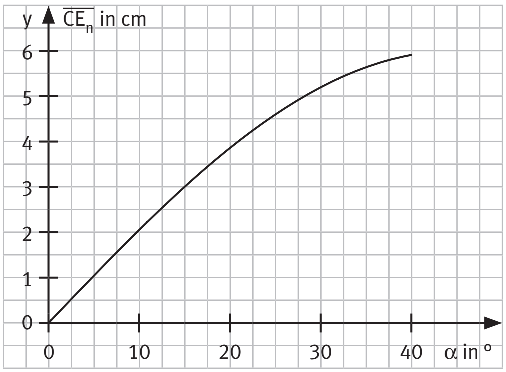
b) Es gilt: $\sphericalangle C'CB_n = \alpha$. Im Dreieck AHC gilt: $\sin\alpha = \frac{h}{6\,\text{cm}} \Rightarrow h = 6\,\text{cm} \cdot \sin\alpha$

$\overline{CC'} = 12\,\text{cm} \cdot \sin\alpha$

Im Dreieck $C'E_nC$ gilt: $\cos\alpha = \frac{\overline{CE_n}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{CE_n}}{12\,\text{cm} \cdot \sin\alpha} \Rightarrow \overline{CE_n} = 12 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha\,\text{cm}$

c)

α in °	5	10	15	20	25	30	35	40
$\overline{CE_n}$ (α)	1,04	2,05	3,00	3,86	4,60	5,20	5,64	5,91



d) Durch Ablesen am Graphen erhält man: α = 15°.
Ein Vergleich mit der Wertetabelle in c) liefert dasselbe.

KX **14** $\frac{5\sqrt{3} \cdot \cos\varphi}{\sin(60° + \varphi)} = 4{,}47 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} \cdot \cos\varphi = 4{,}47 \cdot \sin(60° + \varphi)$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{3} \cdot \cos\varphi = 4{,}47 \cdot (\sin 60° \cos\varphi + \cos 60° \sin\varphi)$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{3} \cdot \cos\varphi = 4{,}47 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) \quad | : \cos\varphi$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{3} = 4{,}47 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\tan\varphi\right)$

$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{3}}{4{,}47} = \sqrt{3} + \tan\varphi$

$\Leftrightarrow \tan\varphi = 2{,}14$

$\Rightarrow 65{,}0°$

KX **15** Die Aussage ist falsch. Die periodische Schwingung einer Gitarrensaite lässt sich mithilfe einer Sinus- oder Kosinusfunktion beschreiben.

KX **16** Die Aussage ist richtig. Formel: $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi$.

KX **17** Die Aussage ist falsch. Es gilt: $\frac{1{,}5\pi}{2\pi} \cdot 360° = 270°$.

KX **18** Die Aussage ist richtig. Die Periodenlänge der Sinusfunktion ist 2π.

KX **19** Die Aussage ist falsch. Die genannte Verschiebung ist nur in negativer Richtung richtig.

KX **20** Die Aussage ist falsch. Es gilt: $\sin(\varphi + \alpha) = \sin\varphi \cos\alpha + \cos\varphi \sin\alpha$.

KX **21** Die Aussage ist falsch. Der Graph der Tangensfunktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

KX **22** Die Aussage ist richtig. Die Periodenlänge beträgt jeweils 2π.

KX **23** Die Aussage ist richtig. Es gilt: $\cos x = 3 + \sin x \Leftrightarrow \underbrace{\overbrace{\cos x}^{-1 \le \ldots \le 1} - \overbrace{\sin x}^{-1 \le \ldots \le 1}}_{-2 \le \ldots \le 2} = 3$.

KX **24** Die Aussage ist richtig. Zwischen Hochwasser und Niedrigwasser liegen etwa 6 h 15 min, zwischen zwei Hochwassern folglich etwa 12,5 h. Danach wiederholt sich das Ganze periodisch.

KX **25** Die Aussage ist richtig. Für den Definitionsbereich von φ ist $0 \le \sin(\varphi + 50°) \le 1$ und nimmt den maximalen Wert 1 für $\varphi = 40°$ an. Deshalb nimmt $\overline{A_nB_n}$ sein Minimum für $\varphi = 40°$ an.

KX **26** Die Aussage ist falsch. Denn: f: $y = \underbrace{\overbrace{2\sin x}^{-2 \le \ldots \le 2} + 0{,}5}_{-1{,}5 \le \ldots \le 2{,}5}$. Der Wertebereich von f ist also $\mathbb{W} = [-1{,}5;\ 2{,}5]$.

KX **1** Es gelten folgende Flächensätze:

Kathetensätze: $a^2 = s \cdot h_b$

$c^2 = r \cdot h_b$

Höhensatz: $h_b^2 = r \cdot s$

Satz des Pythagoras: $a^2 + c^2 = b^2$

KX **2**

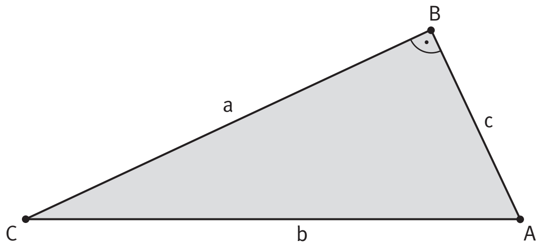
	a)	b)	c)	d)
a	5,5 mm	69 cm	5,8 m	6,0 dm
b	7,1 mm	72 cm	11 m	17vdm
c	9,0 mm	100 cm	12 m	18vdm
h_c	4,4 mm	50 cm	5,1 m	5,7 dm
p	3,4 mm	48 cm	2,8 m	20 cm
q	5,6 mm	51 cm	9,2 m	5,1 dm

KX **3** Die Formeln für die Flächendiagonalen e_1, e_2 und e_3 sind eine direkte Anwendung des Satzes des Pythagoras. Für die Raumdiagonale gilt: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

a) $e_1 = 5{,}6\,\text{cm}$; $e_2 = 7{,}8\,\text{cm}$; $e_3 = 8{,}3\,\text{cm}$; $d = 9{,}0\,\text{cm}$

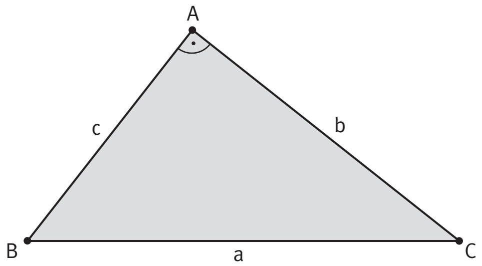
b) $e_1 = 60{,}1\,\text{m}$; $e_2 = 45{,}2\,\text{m}$; $e_3 = 75{,}0\,\text{m}$; $d = 75{,}1\,\text{m}$

KX **4** **a)**



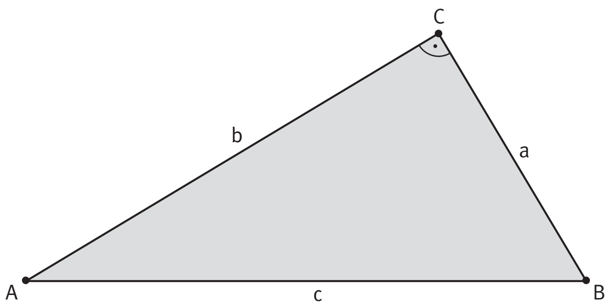
Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 - c^2} = 24\,\text{cm}$.

b)



Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2{,}7\,\text{cm}$.

c)



Nach dem Satz des Pythagoras gilt: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 20{,}1\,\text{cm}$.

KX **5** **a)** 1 $\frac{\overline{AC}}{2}$ ist die Höhe im gleichschenkligen Dreieck ABD. $\Rightarrow \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 + \overline{AB}^2$

$\Rightarrow \overline{AC} = 8\sqrt{10}\,\text{cm}$

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} = 48\sqrt{10}\,\text{cm}^2 \approx 152\,\text{cm}^2$

$u = 4 \cdot 14\,\text{cm} = 56\,\text{cm}$

2 $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{EG} \cdot \overline{FH} = \frac{1}{2} \cdot 12\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm} = 108\,\text{cm}^2$

Es ist nicht möglich, den Umfang zu berechnen (siehe b).

b) Es gibt beliebig viele Drachenvierecke, deren Diagonalen die angegebenen Werte haben. Diese unterscheiden sich allerdings in ihrer Umfangslänge.

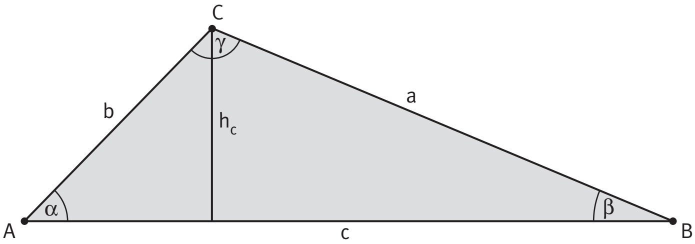
KX **6** **a)** $x_1 = \sin^{-1}(0{,}46) = 27{,}4° \Rightarrow x_2 = 152{,}6°$

b) $x_1 = \sin^{-1}(-0{,}71) = -45{,}2° \mathrel{\hat{=}} 314° \Rightarrow x_2 = 225{,}2°$

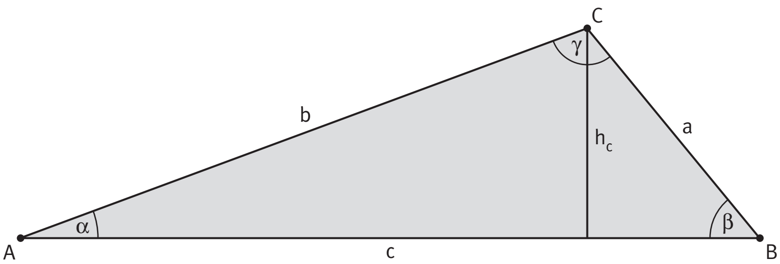
c) $x_1 = \cos^{-1}(-0{,}29) = 106{,}9° \Rightarrow x_2 = 253{,}1°$

d) $x_1 = \tan^{-1}(-2{,}12) = -64{,}7° \mathrel{\hat{=}} 295{,}3° \Rightarrow x_2 = 115{,}3°$

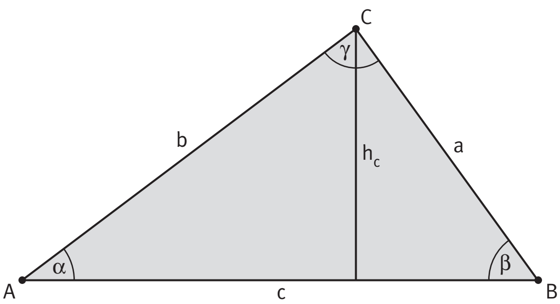
KX **7** **a)** $a = 6{,}9\,\text{m}$; $\beta = 22{,}3°$; $\gamma = 112{,}7°$; $A = 11{,}8\,\text{m}^2$



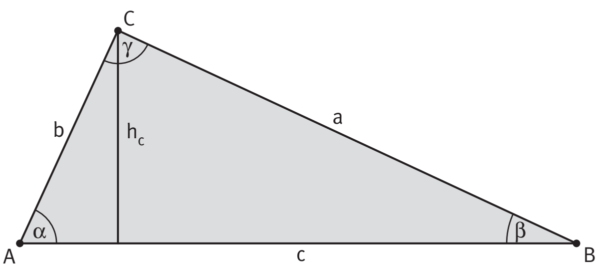
b) $a = 5{,}2\,\text{cm}$; $b = 18{,}1\,\text{cm}$; $c = 21\,\text{cm}$; $\alpha = 12{,}8°$; $\gamma = 117{,}2°$



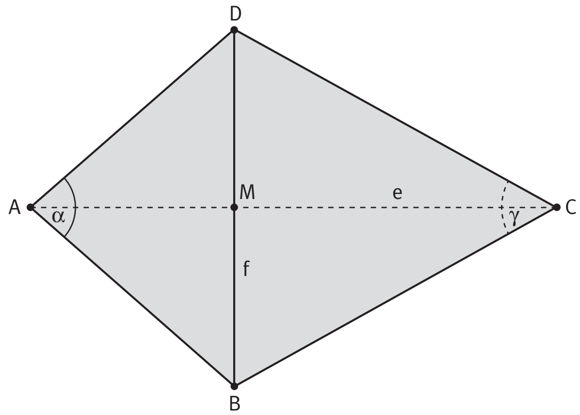
c) $a = 6{,}0\,\text{cm}$; $\beta = 53{,}9°$; $\gamma = 89{,}1°$; $A = 23{,}8\,\text{cm}^2$



d) $b = 6\,\text{cm}$; $c = 15{,}2\,\text{cm}$; $\alpha = 66{,}8°$; $\beta = 23{,}2°$



KX **8** **a)**



b) Der Schnittpunkt der Diagonalen (wird mit M bezeichnet) teilt das Drachenviereck in vier rechtwinklige Teildreiecke.

Im Dreieck ABM gilt: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{f}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 5{,}2\,\text{cm} \overset{\text{Symmetrie}}{=} \overline{AD}$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AM} = \overline{AB} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 3{,}9\,\text{cm}$

Im Dreieck MBC gilt: $\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{f}{2}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{f}{2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 7{,}0\,\text{cm} \overset{\text{Symmetrie}}{=} \overline{CD}$

$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\overline{MC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{MC} = \overline{BC} \cdot \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 6{,}1\,\text{cm}$

$\Rightarrow e = \overline{AM} + \overline{MC} = 3{,}9\,\text{cm} + 6{,}1\,\text{cm} = 10\,\text{cm}$

c) $A = \frac{1}{2}ef = \frac{1}{2} \cdot 6{,}8\,\text{cm} \cdot 10\,\text{cm} = 34\,\text{cm}^2$

$u = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC} = 2 \cdot 5{,}2\,\text{cm} + 2 \cdot 7{,}0\,\text{cm} = 24{,}4\,\text{cm}$

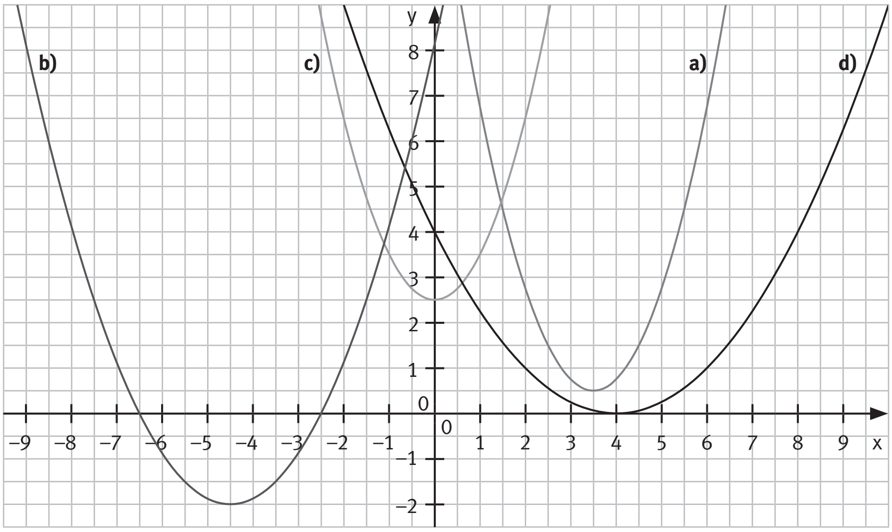
KX **9** **a)** Es gilt $e = 1{,}5 \cdot f$ und $A = \frac{1}{2}ef = 3072\,\text{cm}^2$. Ineinander Einsetzen ergibt $\frac{1}{2} \cdot 1{,}5 f^2 = 3072\,\text{cm}^2$, daraus folgt $f = \sqrt{\frac{3072\,\text{cm}^2}{\frac{1}{2} \cdot 1{,}5}} = 64\,\text{cm}$ und damit $e = 1{,}5 \cdot 64\,\text{cm} = 96\,\text{cm}$.

b) Der Schnittpunkt der Diagonalen e und f wird mit M bezeichnet. Im rechtwinkligen Dreieck AMD gilt nach dem Satz des Pythagoras $\left(\frac{1}{2}e\right)^2 + \left(\frac{1}{2}f\right)^2 = \overline{AD}^2 \Rightarrow \overline{AD} = 57{,}7\,\text{cm}$ und damit $u = 4 \cdot \overline{AD} = 230{,}8\,\text{cm}$.

Darüber hinaus ist $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}f}{\frac{1}{2}e} \Rightarrow \alpha = 33{,}7° = \gamma$. Damit errechnet sich $\beta = \frac{360° - \alpha - \gamma}{2} = 146{,}3° = \delta$.

c) Der Radius des Inkreises ist gleich der Länge der Höhe von M auf eine der vier Seiten der Raute. Es ist $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r}{\frac{1}{2}f} \Rightarrow r = \frac{1}{2}f \cdot \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = 30{,}6\,\text{cm}$ und damit $A_{\text{Inkreis}} = r^2\pi = 2942\,\text{cm}^2$.

KX **10** **a)** f: $y = (x - 3{,}5)^2 + 0{,}5 \quad \Rightarrow S\,(3{,}5\,|\,0{,}5)$
b) f: $y = 0{,}5 \cdot (x + 4{,}5)^2 - 2 \quad \Rightarrow S\,(-4{,}5\,|\,-2)$
c) f: $y = x^2 + 2{,}5 \quad \Rightarrow S\,(0\,|\,2{,}5)$
d) f: $y = 0{,}25 \cdot (x - 4)^2 \quad \Rightarrow S\,(4\,|\,0)$



KX **11** **a)** f: $y = x^2 - 3{,}6x + 0{,}5 = x^2 - 3{,}6x + 1{,}8^2 - 1{,}8^2 + 0{,}5 = (x - 1{,}8)^2 - 2{,}74 \quad \Rightarrow S\,(1{,}8\,|\,-2{,}74)$
Der Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem angegebenen Scheitelpunkt.
b) f: $y = 0{,}5x^2 + 4x = 0{,}5x(x + 8) \quad \Rightarrow$ Nullstellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -8$
$\Rightarrow$ Scheitel bei $x = -4 \quad \Rightarrow f(-4) = -8 \quad \Rightarrow S\,(-4\,|\,-8)$
Der Graph ist eine gegenüber der Normalparabel breitere, nach oben geöffnete Parabel mit dem angegebenen Scheitelpunkt.
c) f: $y = 1{,}5x^2 + 8 \quad \Rightarrow S\,(0\,|\,8)$
Der Graph ist eine gegenüber der Normalparabel engere, nach oben geöffnete Parabel mit einem Scheitelpunkt auf der y-Achse.
d) f: $y = (2x - 8)^2 + 1 = 4(x - 4)^2 + 1 \quad \Rightarrow S\,(4\,|\,1)$
Der Graph ist eine gegenüber der Normalparabel engere, nach oben geöffnete Parabel mit dem angegebenen Scheitelpunkt.

KX **12** **a)** $0{,}5x + 4 = -(x + 3)^2 + 2 \Leftrightarrow -x^2 - \frac{13}{2}x - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + 11 = 0$
Es gibt keine Lösung, da die Diskriminante $D = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = -1{,}75$ negativ ist. Damit hat die Gleichung keine Lösung und f und p haben keine gemeinsamen Punkte.
b) $-0{,}5x - 3 = -x^2 + 3x - 2 \Leftrightarrow -x^2 + \frac{7}{2}x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{4}$
$\Rightarrow f(x_1) = -\frac{31 \pm \sqrt{65}}{8}$ und $f(x_2) = \frac{-31 \pm \sqrt{65}}{8}$
Die gerundeten Koordinaten der Schnittpunkte sind (3,77 | –4,88) und (–0,27 | –2,87).
c) $2x - 1 = (x - 1{,}5)^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x - \frac{3}{4} = 0 \quad \Rightarrow x_{1/2} = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{2}$
$\Rightarrow f(x_1) = -4 - 2\sqrt{7}$ und $f(x_2) = 4 + 2\sqrt{7}$
Die gerundeten Koordinaten der Schnittpunkte sind (5,15 | 9,29) und (–0,15 | –1,29).

KX **13** **a)** $x(x+4)+5=-1-(2x+3)$

$$x^2+4x+5=-1-2x-3$$
$$x^2+6x+9=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}$$
$x=-3$ doppelte Nullstelle

$L=\{-3\}$

b) $2x(x-2)=1-3(5-4x)$

$$2x^2-4x=1-15+12x$$
$$2(x^2-8x+7)=0$$
$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}=\frac{8\pm6}{2}$$
$x_1=7;\ x_2=1$

$L=\{1;\ 7\}$

c) $(3x+1)\,(3x+2)+28=12(3x+1)$

$$9x^2+3x+6x+2+28=36x+12$$
$$9x^2-27x+18=0$$
$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm1}{2}$$
$x_1=2;\ x_2=1$

$L=\{1;\ 2\}$

d) $(2x+10)\,(x+1)-96=12(x+1)$

$$2x^2+10x+2x+10-96=12x+12$$
$$x^2=49$$
$x_1=7;\ x_2=-7$

$L=\{-7;\ 7\}$

KX **14** Die Gerade g ist genau dann die Tangente an die Parabel, wenn beide Graphen genau einen gemeinsamen Punkt haben.

a) $m\cdot(x+1)-2=(x-2)^2+0{,}5 \Leftrightarrow x^2-(m+4)x+6{,}5-m=0$

Setze die Diskriminante $D=0$: $m^2+12m-10=0 \;\Rightarrow m_{1/2}=-6\pm\sqrt{46}$

b) $mx-1{,}5=x^2-4x+3{,}5 \Leftrightarrow x^2-(4+m)x+5=0$

Setze die Diskriminante $D=0$: $m^2+8m-4=0 \;\Rightarrow m_{1/2}=-4\pm2\sqrt{5}$

c) $0{,}5x+t=0{,}5x^2+2x \Leftrightarrow 0{,}5x^2-1{,}5x-t=0$

Setze die Diskriminante $D=0$: $1{,}5^2+2t=0 \;\Rightarrow t=-1{,}125$

KX **15** Mit $x>0$ wird die Anzahl der Schüler in der Klasse bezeichnet, z bezeichnet den ursprünglich vorgegebenen Zuschuss pro Schüler in €.

Es gilt: $x\cdot z=270$ und $(x-4)\cdot(z+0{,}75)=270$. Eingesetzt ergibt sich:

$$(x-4)\cdot\left(\frac{270}{x}+0{,}75\right)=270 \qquad |\cdot x$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-4)\cdot(270+0{,}75x)=270x$$
$$\Leftrightarrow 0{,}75\cdot x^2+267x-1080=270x$$
$$\Leftrightarrow\ 0{,}75\cdot x^2-3\cdot x-1080=0$$
$$\Rightarrow x_1=40;\ x_2=-36 \text{ (entfällt)}$$

In der Klasse sind 40 Schüler.

KX **16** **a)** $A=\frac{1}{2}c\cdot h_c=11{,}25\,\text{cm}^2$ **b)** $a=\frac{A}{\frac{1}{2}h_a}\approx8{,}1\,\text{m}$

c) $A=\frac{1}{2}a\cdot b=12\,\text{m}^2$ **d)** $h_b=\frac{A}{\frac{1}{2}b}\approx3{,}41\,\text{cm}$

KX **17** **a)** $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = \frac{1}{2}(a + 2a) \cdot 0{,}5a = \frac{3}{4}a^2 = 27\,cm^2$

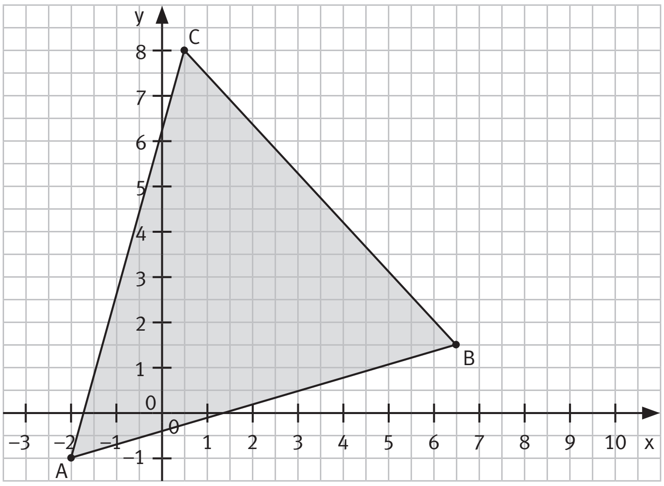
b) $A = \frac{1}{2}ef = 26{,}46\,cm^2$

c) $A = \frac{1}{2}ef = 11\,dm^2$

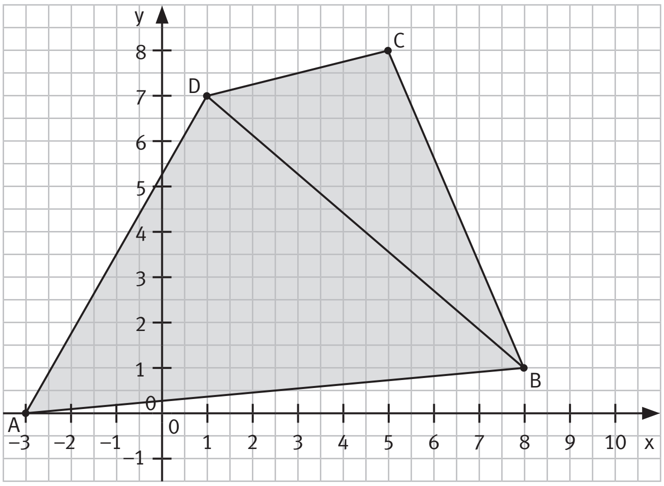
KX **18** **a)** $A = 10\,cm \cdot 8\,cm - 7\,cm \cdot 5\,cm + \frac{1}{2} \cdot (7\,cm - 2\,cm - 2\,cm) \cdot 2\,cm = 48\,cm^2$

b) $A = \frac{54\,cm + 36\,cm}{2} \cdot 18\,cm + \frac{1}{2} \cdot 36\,cm \cdot 18\,cm = 1134\,cm^2$

KX **19** **a)** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(8{,}5 \cdot 9 - 2{,}5 \cdot 2{,}5)$ FE $= 35{,}125$ FE



b)

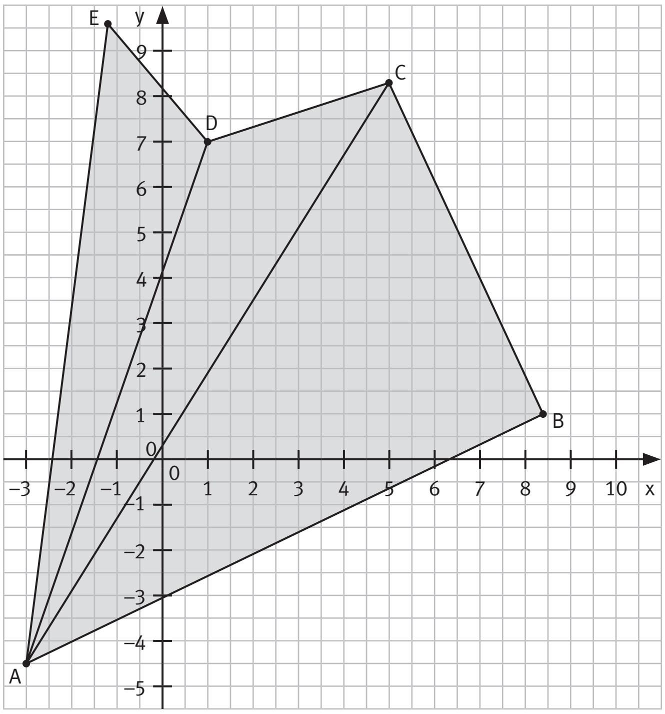


Zerlege das Viereck ABCD in die Dreiecke ABD und BCD wie eingezeichnet.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2}(11 \cdot 7 - 1 \cdot 4) + \frac{1}{2}(-3 \cdot 6 - 7 \cdot (-7))$ FE $= 52$ FE

c)



Zerlege das Fünfeck ABCDE in die Dreiecke ABC, ACD und ADE.

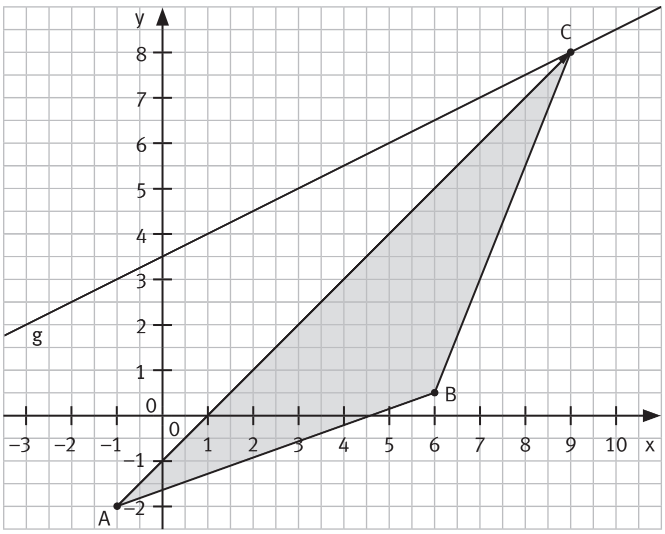
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11{,}4 \\ 5{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12{,}8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 1{,}8 \\ 14{,}1 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2}(11{,}4 \cdot 12{,}8 - 5{,}5 \cdot 8) + \frac{1}{2}(8 \cdot 11{,}5 - 12{,}8 \cdot 4) + \frac{1}{2}(4 \cdot 14{,}1 - 11{,}5 \cdot 1{,}8) = 89{,}21$ FE

$20\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0{,}5x + 5{,}5 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2}(7 \cdot (0{,}5x + 5{,}5) - 2{,}5(x+1)) = 22{,}5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 18 = 22{,}5 \Leftrightarrow x = 9$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, also C (9|8)



((VAKAT-Seite))