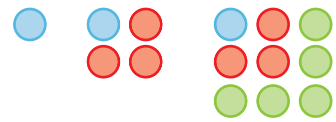
1 Wurzeln und Logarithmen

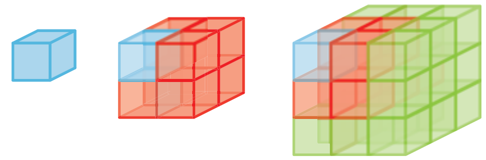
Einstieg

- Der Marienhof in München kann näherungsweise durch ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 12 000 m² beschrieben werden. Du läufst einmal um diesen herum. Ermittle die Länge des zurückgelegten Weges. Beschreibe deinen Lösungsweg.
- Du überquerst den Marienhof diagonal. Bestimme die Länge des Weges.
- Auf dem Marienhof befinden sich rechteckige Gartenanlagen. Welche Seitenlänge hat ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt? Beschreibe dein Vorgehen.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, …
- was Quadrat- und Kubikzahlen sind.
- dass Quadrieren und Wurzelziehen einander umkehren.
- wie man Quadrat- und Kubikwurzeln berechnet.
- was irrationale Zahlen sind.
- was logarithmieren bedeutet.

1 

2 

- Setze die Anordnungen 1 und 2 im Heft um mindestens drei Schritte fort.
- Bestimme die Anzahl der Plättchen bzw. Würfel für die einzelnen Schritte.
- Beschreibe, wie man für jede Anordnung die Anzahl der Plättchen bzw. Würfel für die n-te Figur bestimmen kann. Findest du verschiedene Möglichkeiten?

Rechenoperationen:

$a \xrightarrow{\text{Potenzieren}} a^n$

für den Exponent 2:

$a \xrightarrow{\text{Quadrieren}} a^2$

„Kubus“ (lat.): Würfel
„quadratus“ (lat.): viereckig
Bekannt sind dir die Sprechweisen bei den Maßeinheiten, z.B. m^2 („Quadratmeter“), m^3 („Kubikmeter“)

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$

Merkwissen

Produkte aus lauter gleichen Faktoren kann man als Potenz schreiben.

5 gleiche Faktoren		Potenz		Potenzwert
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	=	2^5	=	32

Exponent
2^5
Basis

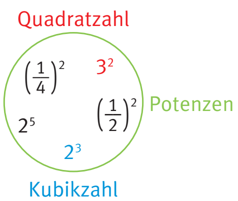
Bei Potenzen können **alle rationalen Zahlen** als **Basis a** auftreten.
Sprechweisen:

- a^2: „a hoch 2“ oder „a Quadrat“
- a^3: „a hoch 3“

Ist die Basis a eine natürliche Zahl ($a \in \mathbb{N}$), dann nennt man ...

- $a \cdot a = a^2$ eine **Quadratzahl**.
- $a \cdot a \cdot a = a^3$ eine **Kubikzahl**.

Beispiele



I Welche der Zahlen sind Quadrat- bzw. Kubikzahlen? Begründe.

a) 1 **b)** 16 **c)** 216

Lösung:

a) Quadrat- und Kubikzahl, denn $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ und $1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1^3$

b) Quadratzahl, denn $16 = 4 \cdot 4 = 4^2$

c) Kubikzahl, denn $216 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$

II Überprüfe, ob 64 (100) eine Quadrat- und auch eine Kubikzahl ist.

Lösung:

$64 = 8 \cdot 8 = 8^2$ bzw. $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, also gilt: 64 ist Quadrat- und Kubikzahl.
100 ist eine Quadratzahl, weil $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$, aber keine Kubikzahl, da $4^3 = 64$ kleiner als 100 und $5^3 = 125$ größer als 100 ist.

Verständnis

- „Da $2^4 = 4^2$, können Basis und Exponent in einer Potenz immer vertauscht werden.“ Überprüfe, ob diese Aussage stimmt.
- Erkläre den Unterschied zwischen $2 \cdot 3$ und 3^2.
- Korrigiere die Aussage: „Die Basis gibt an, wie oft der Exponent mit sich selbst multipliziert wird.“

1 Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie bis zur Basis 20. Rechne im Kopf. Diese Quadrat- und Kubikzahlen kommen besonders häufig vor. Präge sie dir ein.

Basis	1	2	3	4	...	20
Quadratzahl	$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$		...	
Kubikzahl	$1^3 = 1$	$2^3 = 8$	$3^3 = 27$		...	

2 **a)** Nenne mindestens drei Quadratzahlen zwischen 500 und 1000.
b) Finde mindestens drei Kubikzahlen zwischen 10 000 und 20 000.

3 Ermittle die Basis x. Beachte die Rechenregeln. Rechne im Kopf.

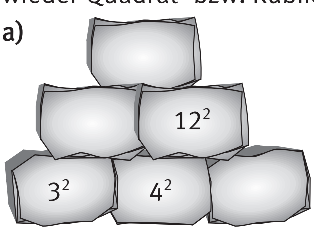
a) $x^2 = 289$ **b)** $x^2 = 25$ **c)** $x^2 - 4 = 60$ **d)** $2 \cdot x^2 = 648$
e) $x^3 = 27$ **f)** $x^3 = 216$ **g)** $3x^3 = 3000$ **h)** $3 \cdot x^3 + 25 = 400$

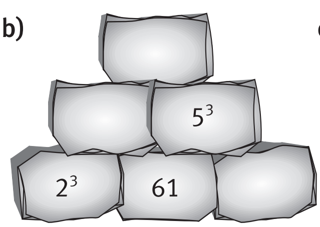
Lösungen zu 3:
3; 5; 5; 6; 8; 10; 17; 18

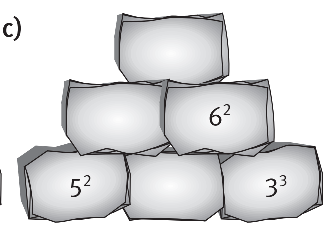
4 Übertrage die Tabelle ins Heft und vervollständige sie. Rechne im Kopf.

	a	b	a^2	b^3	$(a + b)^2$	$b^3 - a^2$
a)	9	1				
b)	4	3				
c)	2	10				

5 Gib die fehlenden Zahlen in den Additionsmauern an. Überprüfe, ob diese Zahlen wieder Quadrat- bzw. Kubikzahlen sind.

a)


b)


c)


Bei Additionsmauern ergibt sich der Wert eines Steins aus der Summe der darunter liegenden Steine.

6 **a)** Berechne.

(1) 2^2; 20^2; $0{,}2^2$; $0{,}02^2$ (2) 12^2; 120^2; $1{,}2^2$; $0{,}12^2$
(3) 2^3; 20^3; $0{,}2^3$; $0{,}02^3$ (4) 5^3; 50^3; $0{,}5^3$; $0{,}05^3$

b) Welche Gesetzmäßigkeiten erkennst du in a)? Formuliere eine Regel. Überprüfe die Regel an weiteren Beispielen.

$10^2 = 100$
$100^2 = 10\,000$
$0{,}1^2 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01$
$0{,}01^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}01 = \ldots$

7 Jede rationale Zahl kann quadriert bzw. potenziert werden. Berechne mit dem Taschenrechner. Runde auf zwei Dezimalen. Beachte die Rechenregeln.

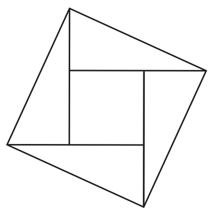
a) $15{,}3^2$ **b)** $-37{,}7^2$
c) $2{,}7 \cdot 13{,}8^2$ **d)** $(-4{,}3)^2 \cdot 48{,}8^2$
e) $37{,}5^2 - 18{,}2^3$ **f)** $2{,}7 \cdot (18{,}6^2 + 27{,}9^2)$

8 Die Wiesen der Familien Meyer und Schmidt sind flächengleich und sollen eingezäunt werden. Die Wiese von Familie Meyer ist quadratisch, die von Familie Schmidt rechteckig. Welcher Zaun muss länger sein?

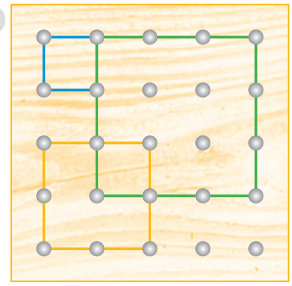
KNOBELEI

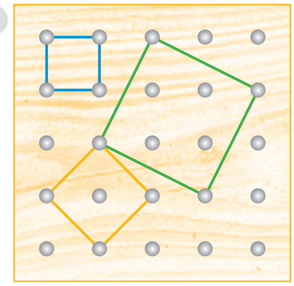
Quadratzahlen

- Bilde die Differenzen aufeinander folgender Quadratzahlen. Was stellst du fest?
- Überprüfe, ob das Ergebnis eine Quadratzahl ist.
  a) $7^2 + 24^2$ **b)** $36^2 + 77^2$
  Finde mindestens ein weiteres Beispiel.
- Addiere die ersten zehn Quadratzahlen. Vergleiche dein Ergebnis, indem du in den Term $\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$ für $n = 10$ einsetzt. Überprüfe auch für $n = 11$, $n = 12$, ...

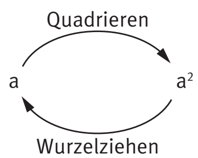


Auf dem Geobrett wurden Quadrate gespannt. Das blaue Quadrat hat einen Flächeninhalt von 1 cm^2.

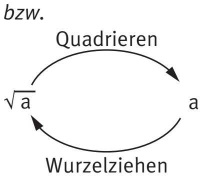




- Bestimme die Flächeninhalte der gelben und grünen Quadrate. Zerlege die Quadrate gegebenenfalls.
- Ermittle die Seitenlängen der Quadrate. Beschreibe auftretende Probleme.
- Peter: „Wenn ich die Kantenlänge eines Würfels mit einem Volumen von 27 cm^3 berechnen soll, muss ich genauso vorgehen." Beschreibe, was Peter damit meint.



bzw.



Beachte:
$\sqrt{0} = 0$, *denn* $0^2 = 0$
$\sqrt[3]{0} = 0$, *denn* $0^3 = 0$

Nur bei der Quadratwurzel gibt es eine Kurzschreibweise:
$\sqrt{144} = \sqrt[2]{144}$

Merkwissen

Die **Umkehrung des Potenzierens** bezeichnet man als **Wurzelziehen** (**Radizieren**).

Die **Quadratwurzel** aus einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl b, die quadriert a ergibt. Wir betrachten vor allem die Quadratwurzeln von Quadratzahlen.

Es gilt: $\sqrt{a} = b$, wenn $b \cdot b = b^2 = a$ $(a, b > 0)$
Sprechweise: „Die 2. Wurzel aus a ist b." oder „Die Quadratwurzel aus a ist b."
Beispiel: $\sqrt{144} = 12$.
„Die Quadratwurzel aus 144 ist 12."

Die **Kubikwurzel** aus einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl b, deren dritte Potenz a ergibt. Wir betrachten vor allem die Kubikwurzeln von Kubikzahlen.

Es gilt: $\sqrt[3]{a} = b$, wenn $b \cdot b \cdot b = b^3 = a$ $(a, b > 0)$
Sprechweise: „Die 3. Wurzel aus a ist b." oder „Die Kubikwurzel aus a ist b."
Beispiel: $\sqrt[3]{729} = 9$.
„Die Kubikwurzel aus 729 ist 9."

Beispiele

I Gegeben sind Quadrate mit den Flächeninhalten 169 cm^2 und 324 cm^2. Gib die Seitenlänge der Quadrate an. Nutze die Wurzelschreibweise.

Lösung:
$\sqrt{169\ cm^2} = 13\ cm$, da $13\ cm \cdot 13\ cm = 169\ cm^2$
$\sqrt{324\ cm^2} = 18\ cm$, da $18\ cm \cdot 18\ cm = 324\ cm^2$

Die Gleichung $x^2 = 169$ *beispielsweise hat die Lösungen* $x = -13$ *und* $x = +13$ *denn* $(\pm 13)^2 = 169$.
Unter $\sqrt{169}$ *versteht man aber nur die positive Zahl. Bei der Gleichung* $x^3 = 8$ *tritt dieses Problem nicht auf, denn hier gibt es nur die Lösung* $x = +2$.

II Das Volumen eines Würfels beträgt 27 cm^3 (64 dm^3). Bestimme seine Kantenlänge.

Lösung:
$\sqrt{27\ cm^3} = 3\ cm$, da $(3\ cm)^3 = 27\ cm^3$
$\sqrt{64\ dm^3} = 4\ dm$, da $(4\ dm)^3 = 64\ dm^3$
Der Würfel ist 3 cm (4 dm) lang.

Verständnis

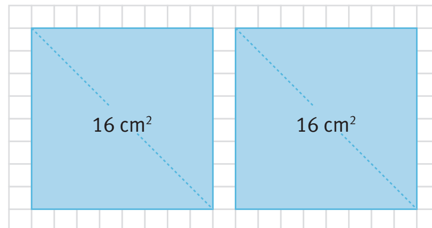
- Überprüfe, ob es Zahlen gibt, bei denen die Quadrat- oder die Kubikwurzel die gleiche Zahl ist.
- Begründe, dass es keine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl gibt.

Aufgaben

1 Zeichne zwei Quadrate, die jeweils den Flächeninhalt 16 cm² (25 cm²) haben. Zerschneide beide Quadrate entlang einer Diagonalen und lege alle Teile zu einem neuen Quadrat zusammen.

a) Gib den Flächeninhalt des Quadrats an.

b) Bestimme die Seitenlänge des Quadrats durch Messen und rechnerisch.



2 **a)** Beschreibe den Zusammenhang zwischen den Radikanden und den Wurzelwerten. Welche Gesetzmäßigkeit erkennst du?

Hierfür musst du dich an die Quadratzahlen bis zwanzig erinnern.

① $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{400} = 20$ $\sqrt{40\,000} = 200$ $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ $\sqrt{0{,}0004} = 0{,}02$

② $\sqrt{196} = 14$ $\sqrt{19\,600} = 140$ $\sqrt{1{,}96} = 1{,}4$ $\sqrt{0{,}0196} = 0{,}14$

b) Radiziere im Kopf.

① $\sqrt{36}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{100}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{10\,000}$

① $\sqrt{1}$; $\sqrt{0{,}64}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{0{,}09}$; $\sqrt{0{,}81}$; $\sqrt{1{,}21}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}0001}$; $\sqrt{0{,}0016}$

3 Übertrage die Tabellen ins Heft und vervollständige sie. Rechne im Kopf.

a)

Quadratzahl	100	□	□	324	625
Quadratwurzel	□	15	50	□	□

b)

Kubikzahl	1	□	□	□	1 000 000
Kubikwurzel	□	3	5	50	□

4 Welche Ziffern fehlen? Bestimme die Quadratwurzel. Rechne im Kopf.

Findest du mehrere Möglichkeiten?

a) $\sqrt{1\square 1} = 11$; $\sqrt{\square 4} = 8$ **b)** $\sqrt{\square 00} = 10$; $\sqrt{\square 00} = 20$ **c)** $\sqrt{14\square} = 12$; $\sqrt{25\square} = 16$ **d)** $\sqrt{\square 25} = \square 5$; $\sqrt{\square 76} = 2\square$

Wissen

Wurzeln mit dem Taschenrechner

Mit dem Taschenrechner kann man quadrieren (Taste z. B. x^2) und Quadratwurzeln ziehen (Taste z. B. $\sqrt{\ }$). Je nach Modell unterscheidet sich dabei nur die Reihenfolge, in der du die Tasten drücken musst.

① Wurzeltaste zuerst: $\sqrt{\ }$ 25 = 5 ② Wurzeltaste zum Schluss: 25 $\sqrt{\ }$ = 5

Für Kubikzahlen und Kubikwurzeln gibt es bei einigen Modellen ebenfalls Tasten: x^3 bzw. $\sqrt[3]{\ }$. Falls solche Tasten nicht vorhanden sind, musst du die Tasten y^x bzw. ^ für Potenzen und $\sqrt[x]{y}$ für die allgemeine Wurzel verwenden. x und y geben dabei die Reihenfolge der Eingaben an.

- Berechne mit deinem Taschenrechner.

a) $3^2 = 9$; $3^3 = 27$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt[3]{64} = 4$ **b)** $\sqrt{361}$; $\sqrt{\frac{16}{27}}$; $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt[3]{0{,}001}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}$; $\sqrt[3]{117{,}25}$

$\sqrt{7+9} \overset{?}{=} \sqrt{7} + \sqrt{9}$

$\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} \overset{?}{=} \sqrt{9 \cdot 4}$

$\sqrt{\frac{144}{169}} \overset{?}{=} \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}}$

$\sqrt{16-9} \overset{?}{=} \sqrt{16} - \sqrt{9}$

$\sqrt{6} \cdot \sqrt{13{,}5} \overset{?}{=} \sqrt{6 \cdot 13{,}5}$

$\sqrt{81} + \sqrt{16} \overset{?}{=} \sqrt{81+16}$

$\frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} \overset{?}{=} \sqrt{\frac{225}{100}}$

$\sqrt{64} - \sqrt{15} \overset{?}{=} \sqrt{64-15}$

- Überprüfe, ob das Gleichheitszeichen gesetzt werden kann.
- Nenne die Rechenarten, für die die Gleichheit gilt.
- Beschreibe die Gesetzmäßigkeiten in Worten und überprüfe an weiteren Beispielen.

Merkwissen

Die **Multiplikation** und **Division** zweier Quadratwurzeln lässt sich zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen**.

Multiplikation	**Division**
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ für a, b > 0	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, für a, b > 0
Beispiel	**Beispiel**
$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9}$ $4 \cdot 3 = \sqrt{144}$ $12 = 12$	$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$ $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Bei der **Addition** und **Subtraktion** lassen sich zwei verschiedene Quadratwurzeln **nicht** zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen**.

Beispiel: $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$
$3 + 4 \neq 5$

Beispiele

Das Zusammenfassen kann dir beim Wurzelziehen helfen.

I Vereinfache, wenn möglich.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{2} + \sqrt{32}$ **c)** $\sqrt{2} - \sqrt{32}$ **d)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$

Lösung:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

b), c) Es sind keine Vereinfachungen möglich.

d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \sqrt{\frac{2}{32}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

II Entscheide, ob die Umformungen richtig sind.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ **b)** $\sqrt{1} - \sqrt{0} = \sqrt{1-0} = 1$

c) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2$ **d)** $\sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$

Lösung:

a) richtig **b)** im Allgemeinen falsch, da jedoch $\sqrt{0} = 0$ klappt dieser Sonderfall.

c) richtig **d)** falsch

Verständnis

- Warum gilt folgende Gleichheit: $\sqrt{0} + \sqrt{0} = \sqrt{0+0}$?
- Ist $\sqrt{8} + \sqrt{6} = \sqrt{6} + \sqrt{8}$? Begründe ohne Rechnung.

Aufgaben

1 Berechne.

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ c) $\sqrt{49} \cdot \sqrt{4}$ d) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{9}$

e) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ f) $\sqrt{100} : \sqrt{25}$ g) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$ h) $\sqrt{169 \cdot 16}$

i) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{36}$ j) $\sqrt{\frac{36}{49}}$ k) $\sqrt{\frac{81}{144}}$ l) $\sqrt{225} \cdot \sqrt{\frac{1}{25}}$

Lösungen zu 1:
$\frac{3}{4}$; $\frac{6}{7}$; 2; 2; 3; 6; 9; 14; 15; 18; 36; 52

2 Berechne im Kopf. Nutze die Gesetzmäßigkeiten.

a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$ c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ d) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1000}$

e) $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{3}$ f) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{75}}$ g) $\frac{\sqrt{1350}}{\sqrt{6}}$ h) $\sqrt{0} \cdot \sqrt{7}$

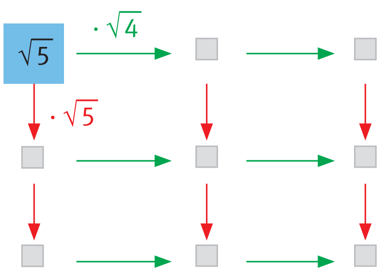
3 Überprüfe durch Einsetzen von Zahlen, ob die Umformungen richtig sein könnten.

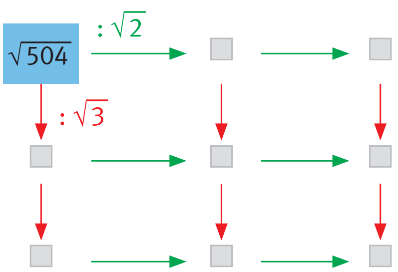
a) $\sqrt{a} + \sqrt{a} = a$ b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

4 Lege die Steine zu einer geschlossenen Kette zusammen. Der vordere Teil ist jeweils das Ergebnis eines Aufgabenteils.

20	$\sqrt{1125} : \sqrt{5}$	18	$\sqrt{36} \cdot \sqrt{16}$	9	$\sqrt{1690} : \sqrt{10}$
16	$\sqrt{324} : \sqrt{4}$	24	$\frac{\sqrt{432}}{\sqrt{27}}$	15	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{8}$
4	$\sqrt{18} \cdot \sqrt{8}$	13	$\sqrt{6} \cdot \sqrt{54}$	12	$\frac{\sqrt{2000}}{\sqrt{5}}$

5 Übertrage das Rechennetz in dein Heft und vervollständige es, wenn entlang derselben Richtung immer mit derselben Zahl multipliziert bzw. dividiert wird.

a)


b)


6 a) Vereinfache so weit wie möglich. Klammere dazu gleiche Quadratwurzeln aus.

(1) $4\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$ (2) $4\sqrt{5} - \sqrt{5}$ (3) $6\sqrt{3} + 10 - 2\sqrt{3} - 4$

(4) $3\sqrt{5} - 5\sqrt{7} + 4\sqrt{5} + 6\sqrt{7}$ (5) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 4\sqrt{6}$

b) Beschreibe, unter welchen Bedingungen sich Wurzeln bei der Addition und Subtraktion zusammenfassen lassen. Überprüfe an eigenen Beispielen.

Beispiel zu (1):
$3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$
$= \sqrt{2} \cdot (3 + 7)$
$= \sqrt{2} \cdot (10)$
$= 10\sqrt{2}$

Der Zahlenteufel und Robert unterhalten sich:
Zahlenteufel: Rettich aus vier?
Robert: Rettich aus vier ist zwei.
Zahlenteufel: Rettich aus 5929?
Robert: Du spinnst ja. Wie soll ich das denn ausrechnen?
Zahlenteufel: Immer mit der Ruhe. Für solche kleinen Probleme haben wir doch unsern Taschenrechner. Also probier mal.
Robert: 77
Zahlenteufel: Wunderbar. Aber jetzt kommt's! Drücke bitte $\sqrt{2}$, aber halte dich gut fest!

- Informiere dich über die Bedeutung des Wortes „Rettich" in diesem Zusammenhang.
- Was liest Robert nach der Eingabe von $\sqrt{2}$ auf dem Taschenrechner? Probiere.

aus: Hans Magnus Enzensberger: Der Zahlenteufel. Carl Hanser Verlag, München 1997, S. 77 f.

Merkwissen

Eine Zahl nennt man **irrational**, wenn man sie nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen kann. Rationale Zahlen lassen sich als endliche oder periodische Dezimalbrüche darstellen. Irrationale Zahlen haben unendlich viele Dezimalstellen, jedoch keine systematische Anordnung.

Beispiel: $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch in der Form $\frac{p}{q}$ schreiben, d. h. es gibt keine rationale Zahl, die quadriert 2 ergibt. $\sqrt{2}$ ist also eine **irrationale Zahl**.

endlicher Dezimalbruch: 0,5; 1,4; 4,25; –8,0

periodischer Dezimalbruch: 0,333...; 1,45454545...

Es gibt unendlich viele rationale Zahlen, aber auch unendlich viele irrationale Zahlen.

Beispiele

I Entscheide, ob die Zahl rational oder irrational ist.

a) $\frac{3}{4}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{9}$

Lösung:

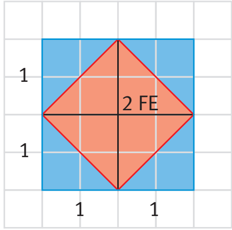
a) rational b) irrational c) rational d) rational, da $\sqrt{9} = 3$

II Zeige, dass die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 LE die Länge $\sqrt{2}$ LE hat.

LE steht für Längeneinheit, z. B. cm, dm, ...

FE steht für Flächeneinheit, z. B. cm^2, dm^2, ...

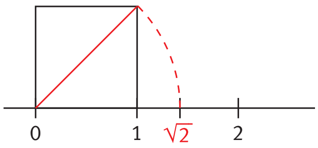
Lösung:



Setzt man vier Quadrate der Seitenlänge 1 LE zu einem großen
Quadrat zusammen, dann hat es den Flächeninhalt 4 FE. Das rote Quadrat, dessen Seiten die Diagonalen der kleinen Quadrate sind, hat den halben Flächeninhalt, also 2 FE. Also müssen die Diagonalen die Länge $\sqrt{2}$ LE haben, denn $\sqrt{2}$ LE $\cdot$ $\sqrt{2}$ LE = 2 FE.

III Stelle die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ auf dem Zahlenstrahl dar.

Lösung:



Verständnis

- Erkläre den Unterschied zwischen endlichen und periodischen Dezimalbrüchen.
- Welche natürlichen Zahlen kennst du, deren Wurzel auf keinen Fall eine irrationale Zahl ist? Beschreibe.

Aufgaben

Versuche, Quadratzahlen zu erkennen.

Welche Aufgaben kannst du im Kopf lösen?

1 Entscheide ohne Taschenrechner, ob die Zahl rational oder irrational ist.

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt{2+3}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{11+5}$
e) $\sqrt{20}+5$ f) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{1}{20}}$ g) $\sqrt{1{,}44}$ h) $-\sqrt{4}$

2 Berechne. Runde irrationale Zahlen auf zwei Dezimalen.

a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{36}$ c) $\sqrt{0{,}25}$ d) $\sqrt{\frac{17}{100}}$
e) $\sqrt{40}$ f) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ g) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ h) $\sqrt{0}$

3 Stelle die irrationale Zahl $\sqrt{18}$ ($\sqrt{32}$, $\sqrt{50}$) auf dem Zahlenstrahl dar. Verwende dazu das Vorgehen wie in den Beispielen II und III.

4 Vergleiche und setze <, > oder =.

a) $\sqrt{5}\ \square\ \sqrt{6}$ b) $1{,}5\ \square\ \sqrt{3}$ c) $\sqrt{10}\ \square\ (\sqrt{10})^2$ d) $\sqrt{25{,}25}\ \square\ 5$
e) $\frac{12}{7}\ \square\ \sqrt{3}$ f) $3\frac{1}{3}\ \square\ \sqrt{11}$ g) $\sqrt{27{,}04}\ \square\ 5{,}2$ h) $\sqrt{\frac{1}{9}}\ \square\ \sqrt{\frac{1}{3}}$

Wissen

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Ein Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist, stammt von Euklid von Alexandria, einem großen Mathematiker der von ungefähr 360 bis 280 vor Christus gelebt hat.
Dabei nimmt man zunächst an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist und folgert dann, dass dies zu einem Widerspruch führt („Widerspruchsbeweis") und somit $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl sein muss.

Wenn $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, so kann man sie als vollständig gekürzten Bruch schreiben (p, q $\in \mathbb{N}$):
p und q haben also keine gemeinsamen Teiler mehr.
Man quadriert beide Seiten:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \Big|\ ^2$$
$$\sqrt{2}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$
$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$2 = \frac{p\cdot p}{q\cdot q}$$

p und q haben keinen gemeinsamen Teiler. Der Bruch $\frac{p\cdot p}{q\cdot q}$ kann damit nicht gekürzt werden und somit nie der Zahl 2 sein.

Daraus lässt sich folgern, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Euklid von Alexandria

- Übertrage die Umformungen in dein Heft und beschreibe sie mit eigenen Worten.
- Zeige auf gleiche Weise, dass $\sqrt{3}$ ebenfalls eine irrationale Zahl ist.

Gletschermumie „Ötzi“

Altersbestimmung: C14-Methode

Jeder Mensch nimmt über die Luft radioaktiven C14-Kohlenstoff auf und lagert ihn in den Knochen ein. Durch gleichzeitige Aufnahme und radioaktiven Zerfall bleibt der C14-Gehalt nahezu konstant. Mit dem Tod hört die Aufnahme auf und der Kohlenstoff C14 zerfällt langsam mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren. Das bedeutet, dass 5730 Jahre nach dem Tod eines Menschen nur noch halb so viel C14 vorhanden ist wie zum Zeitpunkt seines Todes.

- Im Jahr 1991 wurden in den Ötztaler Alpen auf südtiroler Gebiet die Überreste eines Mannes („Ötzi“) gefunden. Bei Ötzi betrug die C14-Menge nur noch 53,3 % der ursprünglichen Menge. Bestimme, vor wie viel Jahren Ötzi gestorben ist.

Merkwissen

Du kennst bereits das **Radizieren** als Umkehroperation zum Potenzieren, wenn die Basis gesucht wird.

Beispiel: $x^3 = 27$ $\quad x = \sqrt[3]{27}$

Allgemein: $a^n = c$ $\quad a = \sqrt[n]{c}$

Sprich: „Der Logarithmus von c zur Basis a ist n.“

Das **Logarithmieren** ist die Umkehroperation zum Potenzieren, wenn der Exponent gesucht wird.
Der Exponent in der Gleichung $a^n = c$ heißt **Logarithmus von c zur Basis a**.

Beispiel: $5^n = 125$ $\quad n = \log_5 125$

Allgemein: $a^n = c$ $\quad n = \log_a c$

Zusammenhänge:

Exponent
Potenzwert
$a^n = c$ $\quad \log_a c = n$
Basis

Auf deinem **Taschenrechner** findest du folgende Taste für den Logarithmus. Man gibt jeweils nur den Potenzwert ein.

Der dekadische Logarithmus hat die Basis 10.

LOG bzw. LG	Logarithmus zur Basis 10: $\log_{10} x =$ LOG x oder $\log_{10} x =$ LG x

Beachte: Statt $\log_{10}$ schreibt man oft auch kurz: lg.
Für die Berechnung beliebiger Logarithmen mit dem Taschenrechner gilt:

$$\log_a c = \frac{\text{LOG}\ c}{\text{LOG}\ a}$$

Beispiele

I Berechne.

a) $12^x = 1728$ **b)** $x^4 = 4096$

Lösung:

a) $12^x = 1728$
$x = \log_{12} 1728$
$x = 3$ Probe: $12^3 = 1728$

Taschenrechner:
LOG *1728* : LOG *12* =

b) $x^4 = 4096$
$x_1 = -8;\ x_2 = 8$ Probe: $(-8)^4 = 4096;\ 8^4 = 4096$

Verständnis

- Begründe, dass $\log_a a = 1$ ist.
- Bestimme im Kopf $\lg_{10} 10$, $\lg_{10} 100$, $\lg_{10} 1000$, ... Beschreibe Auffälligkeiten.

Aufgaben

1 Übertrage die Tabelle ins Heft und vervollständige die Lücken.

	a)	b)	c)	d)
Potenz	$4^3 = 64$	$17{,}5^2 = 306{,}25$		
Wurzel			$\sqrt[3]{343} = 7$	
Logarithmus				$\log_5 15\,625 = 6$

2 Berechne mit dem Taschenrechner auf zwei Dezimalstellen genau.

a) $\log_3 8$ b) $\log_5 71$ c) $\log_{11} 55$ d) $\log_2 150$
e) $\log_4 38$ f) $\log_5 22$ g) $\log_4 120$ h) $\log_9 235$

Lösungen zu 2:
1,67; 1,89; 1,92; 2,48; 2,62; 2,65; 3,45; 7,23

3 Berechne im Kopf.

a) $\log_3 27$ $\log_2 512$ $\log_4 4$ $\log_4 256$ $\log_3 243$

b) $\log_3 \frac{1}{9}$ $\log_3 \frac{1}{81}$ $\log_2 \frac{1}{64}$ $\log_4 \frac{1}{64}$ $\log_4 0{,}25$

Überlege dir die zugehörige Potenz.

4 Stelle die zugehörige Potenz auf. Bestimme dann x.

a) $\log_5 125 = x$ b) $\log_8 x = 2$ c) $\log_x 216 = 3$
d) $\log_{10} 1000 = x$ e) $\log_{10} 0{,}00001 = x$ f) $5^x = 230$

Beispiel:
$\log_6 7776 = x$
zugehörige Potenz:
$6^x = 7776$

5 Benutze zur Berechnung des Zehnerlogarithmus den Taschenrechner.

a) $\lg 10\,000$ b) $\lg 28$ c) $\lg 1800$ d) $\lg 0{,}0095$
e) $\lg 20 + \log 5$ f) $\lg 0{,}3 + \log 22$ g) $\lg 2 \cdot \log 14$ h) $\lg 0{,}01 \cdot \log 28$
i) $\lg \sqrt{83}$ j) $\lg 3{,}1^4$ k) $\lg 6^{-3}$ l) $\lg \frac{2}{9}$

6 Löse die Gleichungen mithilfe der passenden Umkehroperation.

a) $x^4 = 625$ b) $a^8 = 6561$ c) $m^5 = 120$ d) $y^{10} = 72$
e) $4^x = 256$ f) $5^b = 100$ g) $0{,}5^n = 0{,}05$ h) $0{,}2^y = 15$

7 Vergleiche jeweils die Ergebnisse und beschreibe Gesetzmäßigkeiten.

a) $\lg 3$ $\lg 30$ $\lg 300$ $\lg 3000$ $\lg 30\,000$
b) $\lg 0{,}5$ $\lg 0{,}05$ $\lg 0{,}005$ $\lg 0{,}0005$ $\lg 0{,}00005$

8 Weise nach, dass die folgenden Beziehungen gelten.

a) $\log_a 1 = 0$ b) $\log_a (a^x) = x$

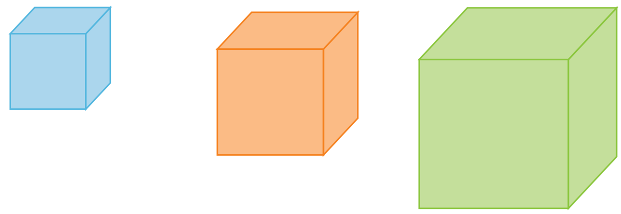
9 Falte ein Blatt Papier immer wieder in der Mitte.

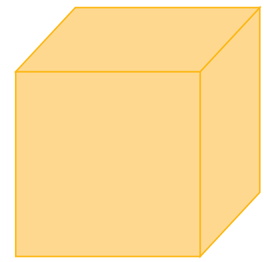
a) Gib eine Gleichung an, mit der man die Höhe des Papierstapels bei n-maligem Falten berechnen kann, wenn ein Blatt Papier 0,08 mm dick ist.

b) Berechne die Anzahl der theoretisch nötigen Faltungen, damit der Papierstapel bis zum Dach eurer Schule (bis zum Mond, also 384 000 km) reicht.

Damit die Faltung mehrmals klappt, kann man das Papier auch in der Mitte zerschneiden.

1 ① $V = 1\ cm^3$ ② $V = 8\ cm^3$ ③ $V = 27\ dm^3$ ④ $V = 64\ dm^3$





a) Bestimme im Kopf die Kantenlänge der Würfel.

b) Berechne mit den Ergebnissen aus a) den zugehörigen Oberflächeninhalt.

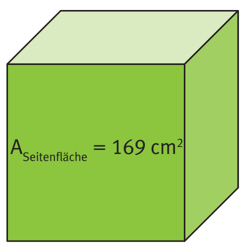
2 Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze die fehlenden Werte für einen Würfel.

	a)	b)	c)	d)	e)
Kantenlänge a	4,5 cm	2,1 dm			
Oberfläche A			$486\ cm^2$	$73{,}5\ m^2$	
Volumen V					$32{,}768\ m^3$

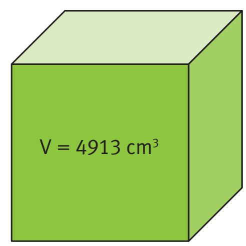
***A**rea (lat.): freier Platz, Fläche, Bauplatz*

3 Ermittle die Kantenlängen der Würfel.

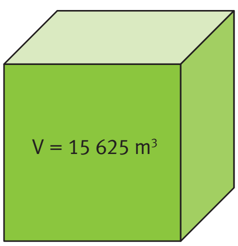
a)



b)



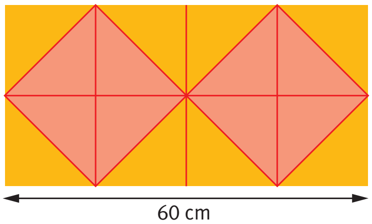
c)



4 Ein Fliesenleger legt Muster aus dreieckigen roten und gelben Fliesen. Aus jeweils zwei bzw. acht Fliesen legt er ein Quadrat. Bestimme die Seitenlängen einer Fliese …

a) zeichnerisch.

b) rechnerisch.



5 Entscheide, ob die Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe.

a) $\sqrt{16}$ ist diejenige rationale Zahl, die quadriert 16 ergibt.

b) $\sqrt{81}$ kann +9 oder −9 sein.

c) $\sqrt{25}$ ist größer als $\sqrt{36}$.

d) Wenn a größer wird, wird auch $\sqrt{a}$ größer.

e) Die Gleichung $x^3 = 27$ hat die Lösung $x = -3$ und $x = +3$.

6 Gib eine Kubikzahl an, die möglichst nahe an der vorgegebenen Zahl liegt.

a) 100 **b)** 500 **c)** 650 **d)** 999 **e)** 2500 **f)** 5000

7 Berechne die Kubikwurzeln. Runde auf zwei Dezimalen.

a) $\sqrt[3]{2{,}1}$ **b)** $\sqrt[3]{12}$ **c)** $\sqrt[3]{7160}$ **d)** $\sqrt[3]{0{,}45}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}015}$ **f)** $\sqrt[3]{17^3}$

8 Die Quadrate mit den Seitenlängen a und die Rechtecke mit den Seitenlängen b und c sollen flächeninhaltsgleich sein. Vervollständige die Tabelle im Heft.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
A	324 cm^2	□	12,25 dm^2	□	1,69 ha	□
a	□	24 m	□	116 mm	□	□
b	27 cm	□	□	2,9 cm	100 m	3,5 dm
c	□	14,4 m	49 cm	□	□	1,4 m

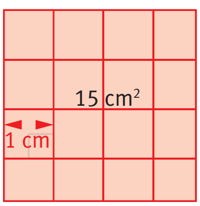
Lösungen zu 8:
130; 169; 49; 7; 134,56; 46,4; 35; 25; 576; 40; 12; 18
Die Einheiten sind nicht angegeben.

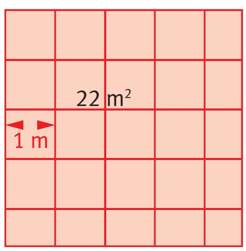
9 Im „Verwurzelten Land“ gibt es nur quadratische Grundstücke und würfelförmige Häuser. Die Tabelle zeigt die zugehörigen Flächeninhalte und Volumina.

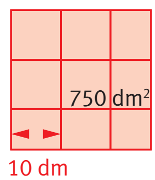
	Flächeninhalt des Grundstücks	Volumen des Hauses
Familie A	625 m^2	729 m^3
Familie B	25 a	343 m^3
Familie C	1 ha	1000 m^3

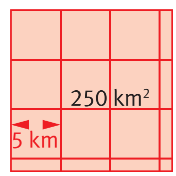
Ermittle die Seitenlängen der Grundstücke und die Kantenlängen der Häuser. Beschreibe dein Vorgehen.

10 Schätze die Seitenlänge des Quadrats mit dem gegebenen Flächeninhalt möglichst genau ab. Überprüfe deine Schätzung mit dem Taschenrechner.

a)


b)


c)


d)


11 Es gibt Zahlen, deren Wurzel auf die gleiche Endziffer endet wie die Zahl selbst.

a) Entscheide, für welche Wurzel diese Eigenschaft gilt. Erkläre.

$\sqrt{100}$ $\sqrt{144}$ $\sqrt{36}$ $\sqrt[3]{125}$ $\sqrt[3]{216}$

b) Nenne weitere Zahlen, für die diese Eigenschaft gilt.

12 Fülle die Lücken richtig aus. Rechne im Kopf.

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\square}=\sqrt{10}$ **b)** $\sqrt{7}\cdot\sqrt{\square}=\sqrt{21}$ **c)** $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{\square}}=\sqrt{3}$

d) $\sqrt{\square}\cdot\sqrt{2,5}=\sqrt{20}$ **e)** $\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{\square}}=\sqrt{30}$ **f)** $\sqrt{13}\cdot\sqrt{\square}=13$

g) $\frac{\sqrt{\square}}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$ **h)** $\sqrt{12}\cdot\sqrt{\square}=\sqrt{576}$ **i)** $\sqrt{\square}\cdot\sqrt{36}=18$

j) $\sqrt{\square 36}:\sqrt{\square 1}=4$ **k)** $\sqrt{121}\cdot\sqrt{\square}=0$ **l)** $\sqrt{169}:\sqrt{\square}=\sqrt{13}$

13 Berechne im Kopf.

a) $(\sqrt{5})^2$ **b)** $3\cdot(\sqrt{8})^2$ **c)** $1,5\cdot(\sqrt{6})^2$ **d)** $(0,5\cdot\sqrt{10})^2$ **e)** $\frac{2}{3}\cdot(\sqrt{12^2})$

Lösungen zu 13:
5; 2,5; 9; 24; 8

14 Überprüfe, ob die Zahl rational oder irrational ist. Rechne im Kopf.

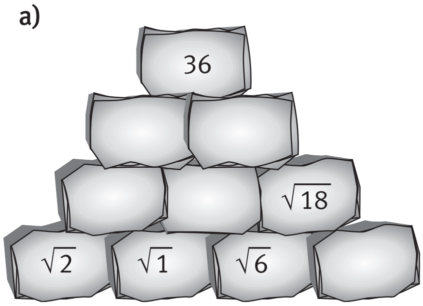
a) $\sqrt{27}$ **b)** $\sqrt{49}$ **c)** $\sqrt{96}$ **d)** $\sqrt{242}$ **e)** $\sqrt{4,41}$ **f)** $\sqrt{0}$

g) $\sqrt{100}$ **h)** $\sqrt{8}$ **i)** $\sqrt{17}$ **j)** $\sqrt{200}$ **k)** $\sqrt{2,22}$ **l)** $\sqrt{1}$

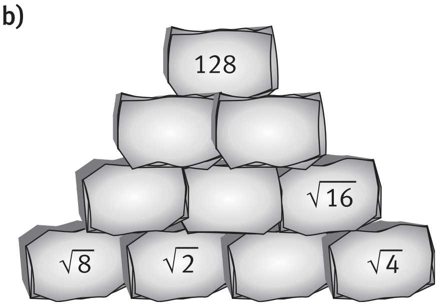
Bei Multiplikationsmauern ergibt sich der Wert eines Steins aus dem Produkt der darunter liegenden Steine.

15 Übertrage die Multiplikationsmauern in dein Heft und vervollständige sie.

a)

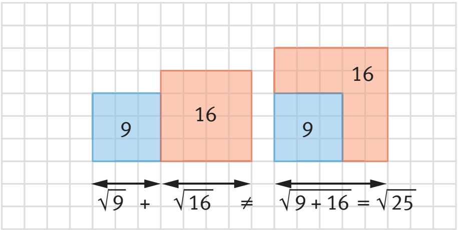


b)



16 a) Erkläre mithilfe der Darstellung, dass $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}$.

b) Überprüfe die Aussage aus a) an mindestens einem weiteren Beispiel.



17 Ordne die Terme zu, die den gleichen Wert haben. Ein Term bleibt übrig.

$\sqrt{100 + 44}$ | $(\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2}$ | 12 | $2^2 \cdot \sqrt{2}$ | 2^2

$\sqrt{100} + \sqrt{44}$ | $\sqrt{8}$ | $\sqrt{32}$ | $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$

18 Peter berechnet mit dem Taschenrechner $\sqrt{3}$.
Begründe, dass die Angabe des Taschenrechners nicht exakt sein kann.

19 Schreibe jeweils in den anderen Formen.

	a)	b)	c)	d)
Potenz	$2^8 = 256$			$5^4 = 625$
Wurzel		$\sqrt[4]{1296} = 6$		
Logarithmus			$\log_5 125 = 3$	

Alltag

Taschenrechner

Taschenrechner zeigen Wurzeln oft unterschiedlich an.

Beispiel:

1 $\sqrt{24}$ → 2 $2\sqrt{6}$ → 3 4.898979486

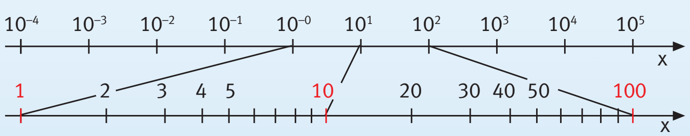
Während bei 1 die Zahl vollständig unter der Wurzel steht, ist 2 eine gemischte Schreibweise, bei der die Zahl unter der Wurzel möglichst klein ist. 3 ist die Dezimaldarstellung.

- Wie kommt man zu den verschiedenen Anzeigen? Probiere aus.
- Finde heraus, wie die gemischte Schreibweise 2 entsteht.

Unendliche Weiten ...

Situationsbeschreibung

Du absolvierst ein Praktikum in einem astronomischen Institut – der Sternwarte. Dein Betreuer hat dich damit beauftragt, eine Karte des Universums anzufertigen. Die Abstände zur Erde sollen dabei an einer Zahlenhalbgeraden veranschaulicht werden, wobei der Abstand der Erde zum Mond 1 cm betragen soll. Probleme bereiten hierbei die unterschiedlich großen Entfernungen der Planeten und Sterne zur Erde. Bei deinen Recherchen stößt du auf die sogenannte logarithmische Skala. Bei einer logarithmischen Skala werden anstelle der z.B. in Kilometern gemessenen Entfernungen x deren Logarithmus log x abgetragen. Gleiche Abstände auf dieser Skala entsprechen dem gleichen Faktor zwischen den Größen.



Handlungsaufträge

1. Informiere dich über den Abstand der Erde zu **zwei** anderen Planeten, zur **Sonne** und zum **Mond**.
2. Stell dir vor der Abstand zwischen Erde und Mond entspricht der Länge eines Din A4 Blattes. Wie viele Din A4 Blätter müsste man nebeneinander legen, um zur Sonne oder einem deiner recherchierten Planeten zu kommen? Wie errechnet sich die Anzahl? Diskutiere.
3. Dein Auftraggeber möchte nun, dass du die Karte des Universums mit den oben genannten Kriterien anfertigst, das heißt deine Zahlenhalbgerade wird im Maßstab 1 : 28 600 000 000 gezeichnet. Wo müsste dann die Sonne usw. eingezeichnet werden? Benutze die oben recherchierten Daten. Diskutiere, ob es eine solche Karte geben kann.
4. Selbst bei einem noch kleineren Maßstab müssten wir feststellen, dass es unmöglich scheint eine übersichtliche und maßstabgetreue Darstellung des Universums anzufertigen Hier nutzt man die oben erklärte Logarithmische Skalierung. Versuche nun mithilfe der oben genannten Hinweise eine Zahlenhalbgerade des Universums anzufertigen. Der Abstand zwischen Erde und Mond sei 1 cm.

Lernsituation

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich!	Das kann ich fast!	Das kann ich noch nicht!

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Übertrage die Tabelle und vervollständige sie.

	quadrierte Zahl	ausführliche Schreibweise	Potenz- bzw. Produktwert
a)	3^2	$3 \cdot 3$	
b)	5^2		
c)		$7 \cdot 7$	
d)			81
e)			1
f)			2500
g)			$\frac{1}{4}$
h)			$\frac{16}{25}$
i)	$\left(\frac{2}{7}\right)^2$		

2 Übertrage das Hunderterfeld in dein Heft.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Markiere alle Quadratzahlen farbig.

b) Beschreibe die Veränderung der Abstände benachbarter Quadratzahlen. Gib die Ursache der Veränderung an.

c) Bestimme die Summe aller Quadratzahlen im Hunderterfeld. Schätze zuerst.

3 Bestimme zu den folgenden Zahlen jeweils ihre Quadrat- und ihre Kubikzahl.

a) 2 **b)** 6 **c)** 10 **d)** 12 **e)** 18
f) 25 **g)** 40 **h)** 55 **i)** 200 **j)** 250

4 **a)** Bestimme die 2. und 3. Potenz der Zahlen.

① 1; 10; 100 ② 2; 20; 200
③ 12; 1,2; 0,12 ④ 5; 0,5; 0,05

b) Beschreibe den Zusammenhang zwischen den Zahlen bei den Teilaufgaben aus a).

5 Berechne im Kopf.

a) $\sqrt{25}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{625}$; $\sqrt{10\,000}$

b) $\sqrt{0{,}04}$; $\sqrt{0{,}16}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{0{,}25}$; $\sqrt{\frac{36}{49}}$; $\sqrt{0{,}0009}$

c) $\sqrt[3]{27}$; $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{512}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{1728}$

6 Berechne mit dem Taschenrechner und runde auf zwei Dezimalen.

a) $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{50}$; $\sqrt{80}$; $\sqrt{111}$; $\sqrt{300}$

b) $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{2{,}5}$; $\sqrt{1{,}44}$; $\sqrt{17{,}6}$; $\sqrt{35{,}8}$; $\sqrt{\frac{4}{8}}$

c) $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2{,}7}$; $\sqrt[3]{0{,}04}$; $\sqrt[3]{22{,}5}$; $\sqrt[3]{730{,}6}$

7 Zeichne jeweils ein Quadrat mit folgendem Flächeninhalt in dein Heft.

a) 6 cm^2 **b)** 20 cm^2 **c)** 30 cm^2

8 ① $\sqrt{4}$; $\sqrt{40}$; $\sqrt{400}$; $\sqrt{4000}$; $\sqrt{40\,000}$; ...
② $\sqrt{9}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{900}$; $\sqrt{9000}$; $\sqrt{90\,000}$; ...
③ $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{100}$; $\sqrt[3]{1000}$; $\sqrt[3]{10\,000}$; ...
④ $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{80}$; $\sqrt[3]{800}$; $\sqrt[3]{8000}$; $\sqrt[3]{80\,000}$; ...

a) Berechne und setze die Reihe um drei weitere Schritte fort.

b) Beschreibe auftretende Gesetzmäßigkeiten und überprüfe diese an weiteren Beispielen.

9 Gegeben sind Würfel. Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie.

	Kantenlänge	Volumen	Oberfläche
a)	4 cm		
b)	1,5 m		
c)		729 cm^3	
d)		$421\frac{7}{8}$ m^3	
e)			384 mm^2
f)			121,5 m^2
g)			91,26 dm^2

10 **a)** Stelle die zugehörige Potenz auf und berechne dann x.

① $\log_2 256 = x$ ② $\log_{15} x = 3$
③ $\lg 0{,}0000001 = x$ ④ $\log_3 \frac{1}{9} = x$

b) Bestimme x.

① $3^x = 2187$ ② $x^4 = 1296$
③ $0{,}5^x = 0{,}0625$ ④ $x^4 = 121$

11 Vereinfache, falls möglich.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$ $\quad \sqrt{3} + \sqrt{8}$ $\quad \sqrt{3} : \sqrt{8}$
b) $\sqrt{27} : \sqrt{18}$ $\quad \sqrt{27} - \sqrt{18}$ $\quad \sqrt{27} \cdot \sqrt{18}$
c) $\sqrt{99 - \sqrt{11}}$ $\quad \sqrt{99 + \sqrt{11}}$ $\quad \sqrt{99} : \sqrt{11}$
d) $\sqrt{2{,}5} \cdot \sqrt{4}$ $\quad \sqrt{2{,}5} + \sqrt{4}$ $\quad \sqrt{2{,}5 - \sqrt{4}}$

12 Berechne die Terme, indem du die angegebenen Zahlen einsetzt.

a) $5 \cdot \left(\sqrt{a} + \frac{3}{4}\right)$ $\qquad a = 0{,}25$
b) $\sqrt{75 \cdot b} \cdot \sqrt{3 \cdot b}$ $\qquad b = 4$
c) $\sqrt{\frac{2x^2}{3y}}$ $\qquad x = \sqrt{2};\ y = 12$

13 Setze Ziffern so in die Lücken ein, dass die Rechnungen stimmen. Findest du mehrere Möglichkeiten?

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{50}$ $\qquad$ **b)** $\sqrt{\square 9} \cdot \sqrt{\square} = \sqrt{196}$
c) $\sqrt{\square 0} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{1\square\square}$ $\qquad$ **d)** $\sqrt{432} : \sqrt{\square} = 6$
e) $\frac{\sqrt{1083}}{\sqrt{\square}} = 19$ $\qquad$ **f)** $\sqrt{\square} \cdot \sqrt{57{,}\square} = 17$

14 Welche Zahl ist irrational, welche rational?

a) $\sqrt{4};\ \sqrt{6};\ \sqrt{8};\ \sqrt{100};\ \sqrt{104};\ \sqrt{400};\ \sqrt{1000}$
b) $0;\ 1;\ \sqrt{0};\ \sqrt{1};\ \frac{1}{3};\ \sqrt{\frac{1}{3}};\ \frac{1}{9};\ \sqrt{\frac{1}{9}};\ \sqrt{\frac{12}{7}}$

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

① Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
② Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
③ Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

15 Quadrieren lässt sich durch das Ziehen der Wurzel rückgängig machen.

16 Es gilt: $\sqrt{0} = 0$ und $\sqrt{1} = 1$

17 $\sqrt[3]{5^3} = 5^3$

18 Die Seitenlänge eines Quadrats kann man mithilfe der Kubikwurzel aus dem Flächeninhalt eines Quadrats bestimmen.

19 Die Kubikwurzel wird auch als dritte Wurzel bezeichnet.

20 Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 5 m^2 hat die Seitenlänge 2,5 m.

21 Ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 cm und 4 cm kann in ein flächengleiches Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{12}$ cm umgewandelt werden.

22 $\sqrt{100} + \sqrt{49} = \sqrt{100 + 49}$

23 Zwei Quadratwurzeln, die multipliziert werden, lassen sich zu einer Quadratwurzel zusammenfassen.

24 $3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

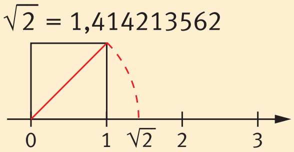
25 $\sqrt{6}$ ist eine irrationale Zahl.

26 Jede Quadratwurzel ist eine irrationale Zahl.

27 Jede Quadratwurzel liegt zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen.

28 Das Logarithmieren ist die Umkehroperation zum Wurzelziehen.

Aufgabe	Ich kann ...	Hilfe
1, 2, 3, 4, 9	Quadrat- und Kubikzahlen berechnen.	S. 16
7, 8, 9, 11, 12, 13, 18, 27	mit Wurzeln umgehen.	S. 18
5, 6, 9, 15, 16, 17, 19, 20	Quadrat- und Kubikwurzeln berechnen.	S. 18 S. 20
14, 26	irrationale und rationale Zahlen unterscheiden.	S. 22
10, 28	den Logarithmus berechnen.	S. 24

S. 16	16 ist eine Quadratzahl, denn $4^2 = 16$. 64 ist eine Kubikzahl, denn $4^3 = 64$. 64 ist auch eine Quadratzahl, denn $8^2 = 64$.	Bei Potenzen können **alle rationalen Zahlen** als Basis a auftreten. Potenzen mit dem **Exponenten 2** und einer **natürlichen Zahl als Basis** nennt man **Quadratzahlen**: $a \cdot a = a^2 \quad (a \in \mathbb{N})$ Potenzen mit dem **Exponenten 3** und einer **natürlichen Zahl als Basis** nennt man **Kubikzahlen**: $a \cdot a \cdot a = a^3 \quad (a \in \mathbb{N})$
S. 18	$a \underset{\text{Wurzelziehen}}{\overset{\text{Quadrieren}}{\rightleftarrows}} a^2 \qquad \sqrt{0} = 0 \qquad \sqrt[3]{0} = 0$ $\sqrt{144} = 12$, denn $12 \cdot 12 = 144$ „Die Quadratwurzel aus 144 ist 12." $\sqrt[3]{729} = 9$ „Die Kubikwurzel aus 729 ist 9."	Die **Umkehrung des Potenzierens** bezeichnet man als **Wurzelziehen** (**Radizieren**). Die **Quadratwurzel** aus einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl b, die quadriert a ergibt. Es gilt: $\sqrt{a} = b$, wenn $b \cdot b = b^2 = a$ $(a, b > 0)$ Die **Kubikwurzel** aus einer positiven Zahl a ist diejenige positive Zahl b, deren dritte Potenz a ergibt. Es gilt: $\sqrt[3]{a} = b$, wenn $b \cdot b \cdot b = b^3 = a$ $(a, b > 0)$
S. 20	$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{16 \cdot 9}$ $4 \cdot 3 = \sqrt{144}$ $12 = 12$ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}}$ $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$	**Multiplikation von Quadratwurzeln** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ für $a, b > 0$ **Division von Quadratwurzeln** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ für $a, b > 0$
S. 20	$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$	Bei der **Addition** und **Subtraktion** lassen sich zwei Quadratwurzeln **nicht** zu einer Quadratwurzel **zusammenfassen**.
S. 22	$\sqrt{2} = 1{,}414213562$ 	Eine Zahl nennt man **irrational**, wenn man sie **nicht als Bruch** zweier ganzer Zahlen darstellen kann. Die zugehörige Dezimalzahl hat unendlich viele Nachkommastellen.
S. 24	Potenz $6^3 = 216$ Wurzel $\sqrt[3]{216} = 6$ Logarithmus $\log_6 216 = 3$	**Potenzieren**, **Radizieren** (Wurzelziehen) und **Logarithmieren** sind zueinander Umkehroperationen. Potenzieren $a^c = b$ Radizieren $\sqrt[c]{b} = a$ Logarithmieren $\log_a b = c$