FORMEL 10

Mathematik

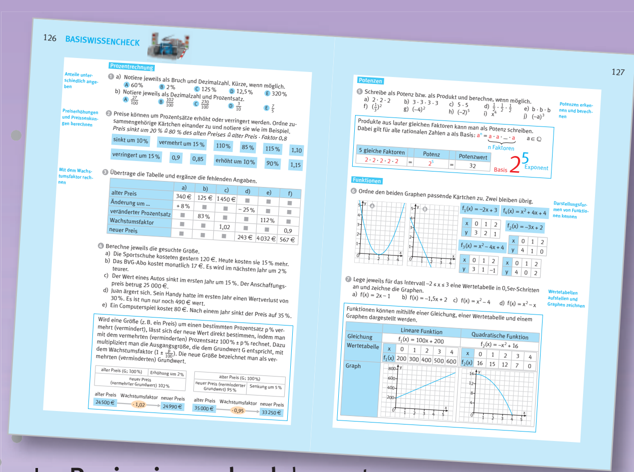
Berlin
Brandenburg

C.C.BUCHNER

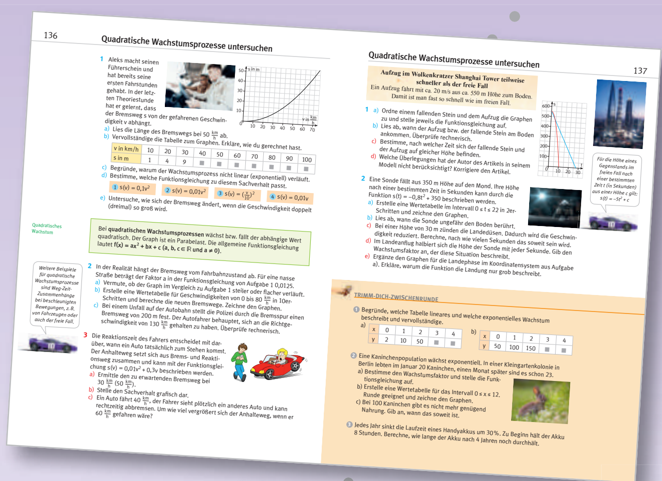
TEILDRUCK
Der vollständige Band
erscheint im Festeinband

Der Buchaufbau

Auf der **Auftaktseite** findest du Fragen und Bilder zum Nachdenken und Diskutieren.



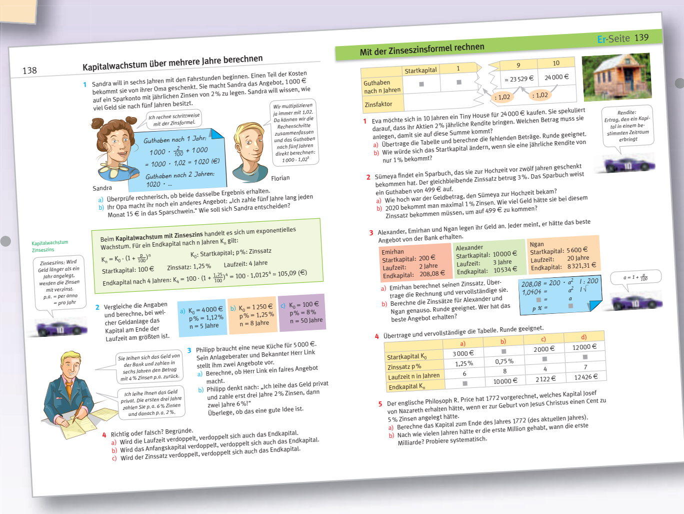
Im **Basiswissencheck** kannst du dein Vorwissen prüfen. Der Test zeigt deine Stärken, aber auch, wo du deine Wissenslücken noch schließen musst. Dein Lehrer wird dir dazu Möglichkeiten anbieten.



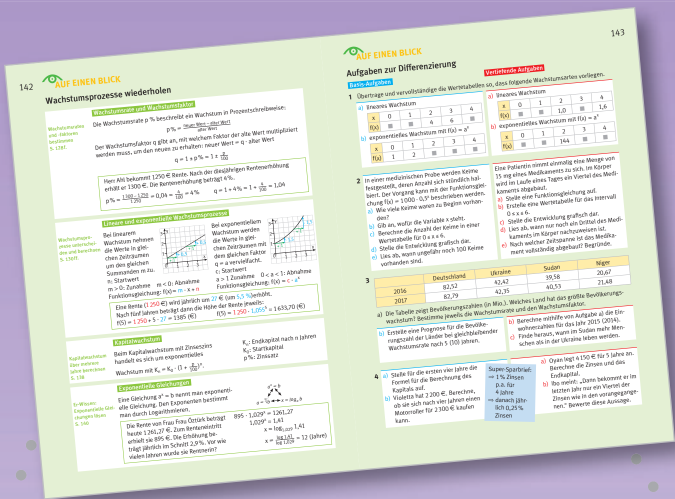
Die **Aufgaben** gibt es in **zwei Schwierigkeitsstufen**.

- Grundniveau
- vertiefendes Niveau

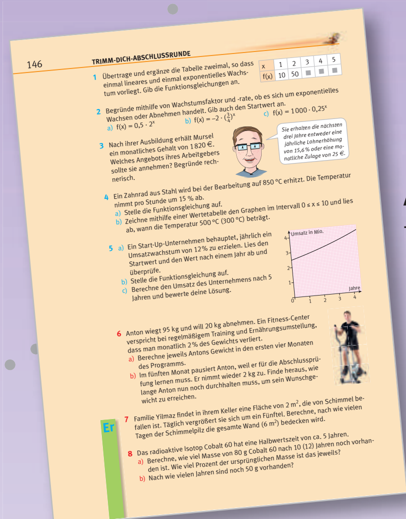
Das **Merkwissen** ist **grün umrahmt**. So findest du es leicht.
Mit den **Trimm-dich-Zwischenrunden** kannst du prüfen, ob alles „sitzt", was du bisher gelernt hast.



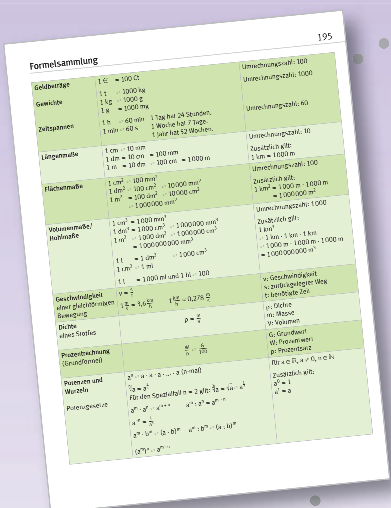
Einige Seiten behandeln weitere Inhalte auf **Erweiterungsniveau**.



Auf einen Blick: Der Stoff des Kapitels ist jetzt komplett. Die erste Seite enthält das **Grundwissen** des Kapitels in kompakter Form. Auf den nächsten drei Seiten kannst du dein Wissen und Können mit **abwechslungsreichen Aufgaben** auf **unterschiedlichen Anforderungsstufen festigen** und **vertiefen**.

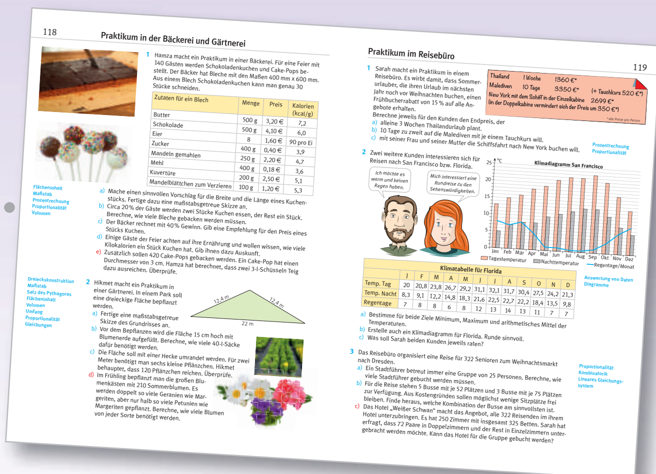


Das Kapitel ist abgeschlossen. Bist du fit? In den **Trimm-dich-Abschlussrunden** kannst du es testen.



Im Anhang findest du eine **Formelsammlung**, wie du sie auch in den Abschlussprüfungen benutzen wirst.

Wofür braucht man Mathematik im Alltag? Die drei Kapitel **Ausbildung und Beruf, Zukunft** und **Lebenshaltungskosten** befassen sich vertieft mit interessanten Themen und bereiten dich auf die Abschlussprüfungen vor. In den Aufgaben auf der letzten Seite **Allerlei Merkwürdiges** musst du Größen abschätzen und Informationen recherchieren.



FORMEL 10

Mathematik

Herausgegeben von Martina Liebchen

Bearbeitet von Andreas Dau, Grit Ehlert, Tobias Herz, Ricardo John, Daniel Kleinen, Kerstin Landsberg, Martina Liebchen, Jennifer Prechter, Martin Schmidt, Yannick Schreyer, Elke Skrip, Torsten Studier und Andreas Whyte

C.C.Buchner

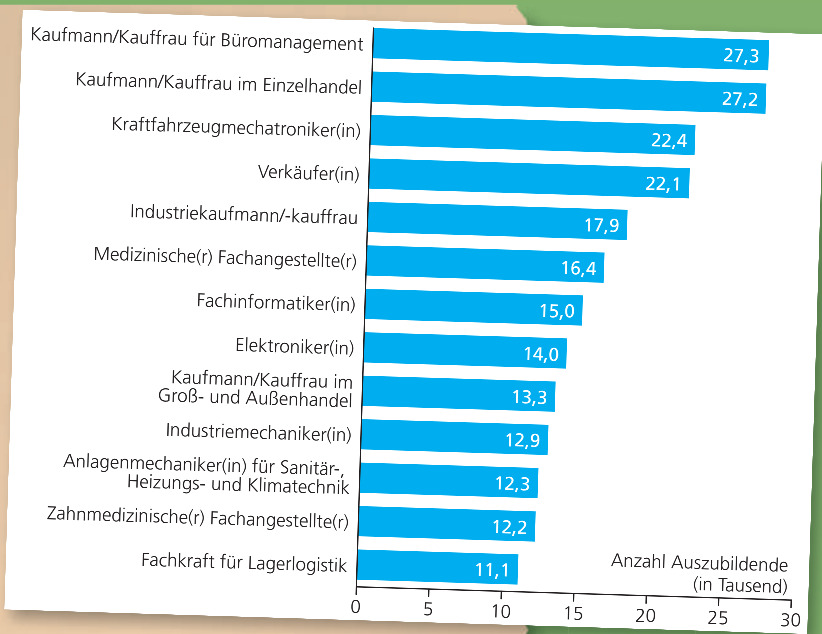
Inhaltsverzeichnis

*Im Teildruck nicht enthalten
Das Kapitel „Grundlagentraining“ ist erhältlich unter
www.ccbuchner.de/medien (60040-01).

Ausbildung und Beruf und Mathematik

Wisst ihr schon …

… was ihr nach der Schule beruflich machen wollt? Heute gibt es in Deutschland über 300 anerkannte Ausbildungsberufe; jedes Jahr werden rund 530 000 Ausbildungsverträge abgeschlossen. Das Diagramm zeigt einen Auszug aus den beliebtesten Ausbildungsberufen im Jahr 2018.



Braucht man für alle Ausbildungsberufe Mathematik? In vielen Berufen spielt das Fach eine wichtige Rolle. Im technischen oder kaufmännischen Bereich ist das offensichtlich, manchmal taucht Mathematik aber auch an unerwarteter Stelle auf.

- Welche Bereiche der Mathematik kommen in welchem Beruf vor? Informiert euch in eurer Familie, bei Freunden, beim Berufsberater.




Hikmet, Ersin, Schokofeh und Ivelina haben schon Praktika in verschiedenen Berufsfeldern gemacht.

- Überlegt euch jeweils eine Situation, bei der sie in ihrem Praktikum Mathematik brauchten.

Praktikum in der Bäckerei und Gärtnerei

1 Hamza macht ein Praktikum in einer Bäckerei. Für eine Feier mit 140 Gästen werden Schokoladenkuchen und Cake-Pops bestellt. Der Bäcker hat Bleche mit den Maßen 400 mm x 600 mm. Aus einem Blech Schokoladenkuchen kann man genau 30 Stücke schneiden.

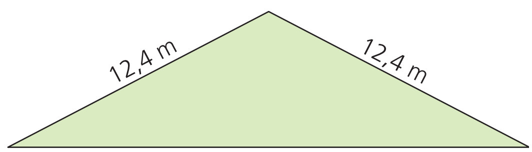
Zutaten für ein Blech	Menge	Preis	Kalorien (kcal/g)
Butter	500 g	3,20 €	7,2
Schokolade	500 g	4,10 €	6,0
Eier	8	1,60 €	90 pro Ei
Zucker	400 g	0,40 €	3,9
Mandeln gemahlen	250 g	2,20 €	4,7
Mehl	400 g	0,18 €	3,6
Kuvertüre	200 g	2,50 €	5,1
Mandelblättchen zum Verzieren	100 g	1,20 €	5,3

Flächeninhalt
Maßstab
Prozentrechnung
Proportionalität
Volumen

a) Mache einen sinnvollen Vorschlag für die Breite und die Länge eines Kuchenstücks. Fertige dazu eine maßstabsgetreue Skizze an.
b) Circa 20 % der Gäste werden zwei Stücke Kuchen essen, der Rest ein Stück. Berechne, wie viele Bleche gebacken werden müssen.
c) Der Bäcker rechnet mit 40 % Gewinn. Gib eine Empfehlung für den Preis eines Stücks Kuchen.
d) Einige Gäste der Feier achten auf ihre Ernährung und wollen wissen, wie viele Kilokalorien ein Stück Kuchen hat. Gib ihnen dazu Auskunft.
e) Zusätzlich sollen 420 Cake-Pops gebacken werden. Ein Cake-Pop hat einen Durchmesser von 3 cm. Hamza hat berechnet, dass zwei 3-l-Schüsseln Teig dazu ausreichen. Überprüfe.

Dreieckskonstruktion
Maßstab
Satz des Pythagoras
Flächeninhalt
Volumen
Umfang
Proportionalität
Gleichungen

2 Hikmet macht ein Praktikum in einer Gärtnerei. In einem Park soll eine dreieckige Fläche bepflanzt werden.



a) Fertige eine maßstabsgetreue Skizze des Grundrisses an.
b) Vor dem Bepflanzen wird die Fläche 15 cm hoch mit Blumenerde aufgefüllt. Berechne, wie viele 40-l-Säcke dafür benötigt werden.

c) Die Fläche soll mit einer Hecke umrandet werden. Für zwei Meter benötigt man sechs kleine Pflänzchen. Hikmet behauptet, dass 120 Pflänzchen reichen. Überprüfe.
d) Im Frühling bepflanzt man die großen Blumenkästen mit 210 Sommerblumen. Es werden doppelt so viele Geranien wie Margeriten, aber nur halb so viele Petunien wie Margeriten gepflanzt. Berechne, wie viele Blumen von jeder Sorte benötigt werden.

1 Sarah macht ein Praktikum in einem Reisebüro. Es wirbt damit, dass Sommerurlauber, die ihren Urlaub im nächsten Jahr noch vor Weihnachten buchen, einen Frühbucherrabatt von 15 % auf alle Angebote erhalten.

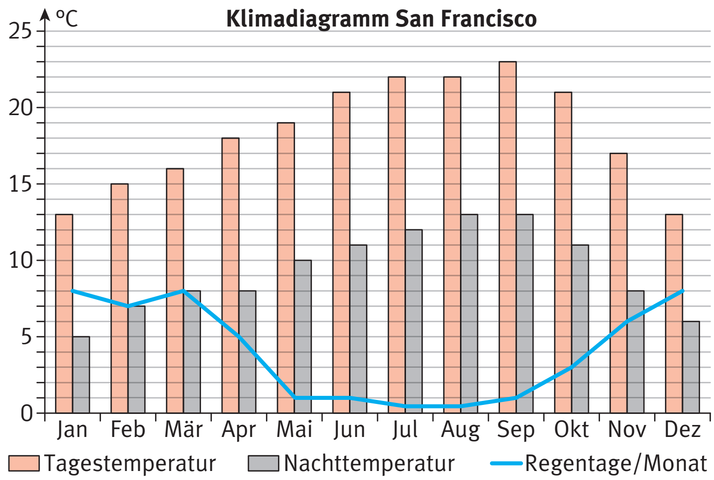
Thailand 1 Woche 1360 €*
Malediven 10 Tage 3350 €* (+ Tauchkurs 520 €*)
New York mit dem Schiff in der Einzelkabine 2699 €*
(in der Doppelkabine vermindert sich der Preis um 350 €*)

*alle Preise pro Person

Berechne jeweils für den Kunden den Endpreis, der
a) alleine 3 Wochen Thailandurlaub plant.
b) 10 Tage zu zweit auf die Malediven mit je einem Tauchkurs will.
c) mit seiner Frau und seiner Mutter die Schiffsfahrt nach New York buchen will.

Prozentrechnung
Proportionalität

2 Zwei weitere Kunden interessieren sich für Reisen nach San Francisco bzw. Florida.



Klimatabelle für Florida												
	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Temp. Tag	20	20,8	23,8	26,7	29,2	31,1	32,1	31,7	30,4	27,5	24,2	21,3
Temp. Nacht	8,3	9,1	12,2	14,8	18,3	21,6	22,5	22,7	22,2	18,4	13,5	9,8
Regentage	7	8	8	6	8	12	13	14	13	11	7	7

Auswertung von Daten
Diagramme

a) Bestimme für beide Ziele Minimum, Maximum und arithmetisches Mittel der Temperaturen.
b) Erstelle auch ein Klimadiagramm für Florida. Runde sinnvoll.
c) Was soll Sarah beiden Kunden jeweils raten?

3 Das Reisebüro organisiert eine Reise für 322 Senioren zum Weihnachtsmarkt nach Dresden.
a) Ein Stadtführer betreut immer eine Gruppe von 25 Personen. Berechne, wie viele Stadtführer gebucht werden müssen.
b) Für die Reise stehen 5 Busse mit je 52 Plätzen und 3 Busse mit je 75 Plätzen zur Verfügung. Aus Kostengründen sollen möglichst wenige Sitzplätze frei bleiben. Finde heraus, welche Kombination der Busse am sinnvollsten ist.
c) Das Hotel „Weißer Schwan“ macht das Angebot, alle 322 Reisenden im ihrem Hotel unterzubringen. Es hat 250 Zimmer mit insgesamt 325 Betten. Sarah hat erfragt, dass 72 Paare in Doppelzimmern und der Rest in Einzelzimmern untergebracht werden möchte. Kann das Hotel für die Gruppe gebucht werden?

Proportionalität
Kombinatorik
Lineares Gleichungssystem

Praktikum im Friseursalon und beim Maler

Auswertung von Daten
Diagramme

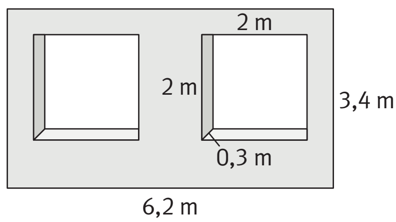
1 Ivelina macht ein Praktikum im Friseursalon. Dort steht die Abrechnung für März an. Der Salon kann sich über Kundenmangel nicht beklagen.

Abrechnung für März		
Einnahmen Frauen		
522-mal	Waschen und Föhnen	25,50 €
490-mal	Schneiden	17,20 €
215-mal	Färben	45,00 €
88-mal	Strähnchen	37,00 €
Einnahmen Männer		
320-mal	Waschen	5,50 €
395-mal	Schneiden	8,70 €
125-mal	Färben	21,45 €
Einnahmen Kinder		
39-mal	Nassschnitt	9,50 €
13-mal	Trockenschnitt	6,50 €

a) Berechne, wie viele Einnahmen im März zu verzeichnen waren.
b) Ermittle die durchschnittlichen Einnahmen für einen Tag im März mit 24 Arbeitstagen.
c) Für welche Kundengruppe sollte gezielt geworben werden? Berechne die Anteile der Monatseinnahmen für Frauen, Männer und Kinder und stelle sie grafisch in einem Kreisdiagramm dar.

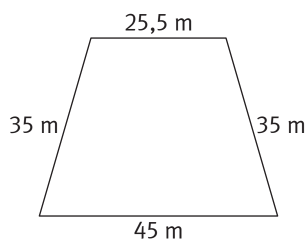
Flächeninhalt
Proportionalität

2 Elvisa macht ein Praktikum bei einer Malerin. Wegen eines Wasserschadens muss die Fensterseite eines Lehrerzimmers neu gestrichen werden. Die Innenflächen der zwei Fenster müssen auch gestrichen werden. Sie sind 30 cm in die Wand eingelassen. Ermittle die Anzahl der Eimer Farbe, die besorgt werden müssen. Ein Eimer reicht für 15 m^2 und die Flächen müssen zweimal gestrichen werden, damit die Farbe deckt.



Satz des Pythagoras
Flächeninhalt
Umfang
Proportionalität
Prozentrechnung

3 Die Skizze zeigt zwei gegenüberliegende Wände der Turnhalle. Die beiden Flächen benötigen einen neuen Anstrich. Für das Streichen von 30 m^2 werden zwei Arbeitsstunden eingeplant; die Kanten der Flächen müssen aufwändig vorbereitet werden. Dafür wird für 20 m eine Stunde vorgesehen. Die Farbe kostet für 70 m^2 28 €, Pinsel und andere Materialien einmalig 60 €. Pro Arbeitsstunde berechnet die Malerin 30 €.



a) Elvisa berechnet 20 Arbeitstage mit je 8 Stunden. Überprüfe.
b) Erstelle für das Schulamt ein Preisangebot zuzüglich 19 % Mehrwertsteuer.

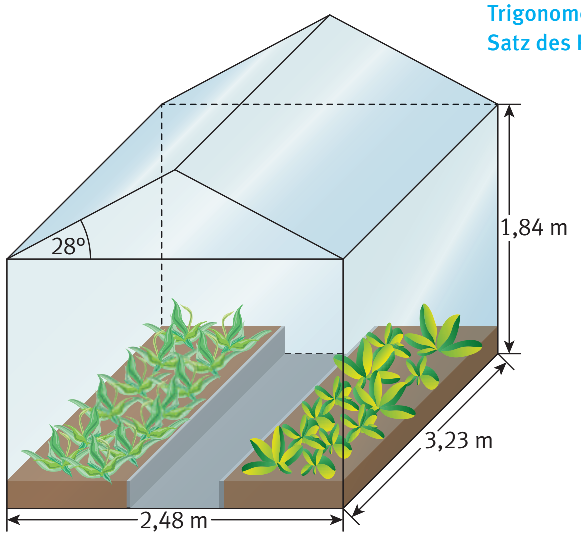
1 Paul macht ein Praktikum in einem Baumarkt. Ein Kunde hat in einem Katalog ein Angebot für ein Gewächshaus mit einer Grundfläche von 8 m² gefunden und dazu einige Fragen. Berate den Kunden.

Flächeninhalt
Trigonometrie
Satz des Pythagoras

Passen die Angaben zur ungefähren Größe der Grundfläche?

Wie hoch ist das Gewächshaus? Es soll nicht höher als 2,50 m sein.

Ich brauche noch einen Sonnenschutz für die graue Dachfläche, sonst wird es für die Pflanzen im Sommer zu warm. Reicht eine Stoffbahn mit einer Breite von 1,20m? Wie viele Quadratmeter Stoff brauche ich?



2 a) Die kugelförmigen Springbrunnen aus Granit mit einem jeweiligen Durchmesser von 76 cm, 120 cm und 160 cm im Werbeprospekt stoßen auf großes Interesse. Vor Inbetriebnahme sollten sie noch dreimal gegen Grünbelag und Verschmutzung imprägniert werden. Fünf Liter Steinimprägnierung reichen für 40 m². Paul hat ausgerechnet, dass man ungefähr 0,7 l für die kleine, 1,7 l für die mittlere und 3 l für die große Kugel benötigt. Überprüfe.

Oberflächeninhalt
Volumen
Proportionalität
Lineare Funktionen

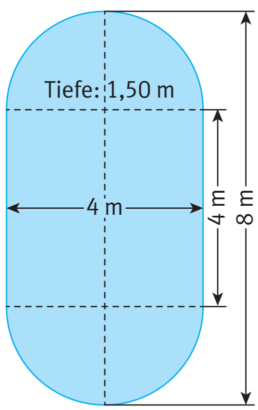
b) Berechne, wie schwer die Kugeln jeweils sind (Dichte Granit 2,7 g/cm³).

c) Ein Kunde kauft den großen Springbrunnen und will ihn transportieren. Er kann privat ein Auto für einen Pauschalpreis von 80 € mieten. Der Baumarkt bietet ihm ein Auto für eine Grundgebühr von 50 € und pro Stunde 10 € an. Stelle die Angebote grafisch dar und begründe, wann welches günstiger ist.

3 Die nächste Kundin hat einen Pool in ihrem Garten und möchte für die Befüllung eine Pumpe kaufen. Im Garten befindet sich ein Brunnen, der 7 m tief ist. Beantworte die Fragen der Kundin und gib ihr eine Kaufempfehlung.

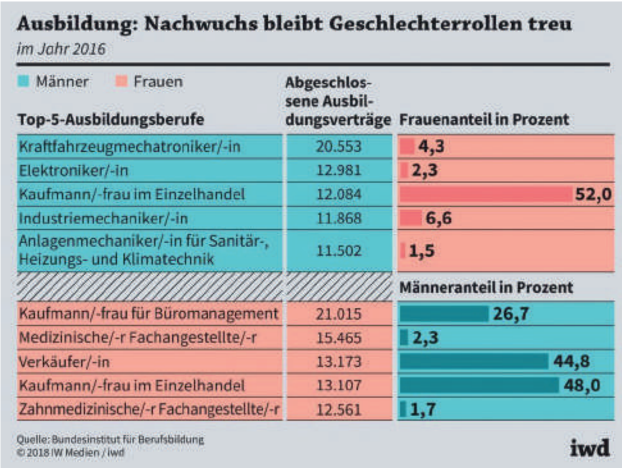
Flächeninhalt Volumen
Proportionalität

Modell	Classic	Comfort	Eco
Kosten	79,00 €	124,00 €	179,00 €
Max. Fördermenge (in l pro h)	3400 l/h	3800 l/h	4900 l/h
Leistung (in Watt)	700 W	900 W	1100 W
Max. Ansaughöhe	6 m	8 m	7 m



Der Pool soll bis 15 cm unter den Rand gefüllt werden. Wie lange dauert es, bis er voll ist?

Mit welchen Stromkosten muss ich rechnen? Mein Ökostromanbieter berechnet 26,5 Cent je kWh.



Ausbildung: Nachwuchs bleibt Geschlechterrollen treu
im Jahr 2016

Männer Frauen

Top-5-Ausbildungsberufe	Abgeschlossene Ausbildungsverträge	Frauenanteil in Prozent
Kraftfahrzeugmechatroniker/-in	20.553	4,3
Elektroniker/-in	12.981	2,3
Kaufmann/-frau im Einzelhandel	12.084	52,0
Industriemechaniker/-in	11.868	6,6
Anlagenmechaniker/-in für Sanitär-, Heizungs- und Klimatechnik	11.502	1,5
		Männeranteil in Prozent
Kaufmann/-frau für Büromanagement	21.015	26,7
Medizinische/-r Fachangestellte/-r	15.465	2,3
Verkäufer/-in	13.173	44,8
Kaufmann/-frau im Einzelhandel	13.107	48,0
Zahnmedizinische/-r Fachangestellte/-r	12.561	1,7

Quelle: Bundesinstitut für Berufsbildung
© 2018 IW Medien / iwd

iwd

1 „Männer bauen – Frauen erziehen“
Frauen und Männer folgen bei der Berufswahl immer noch klassischen Rollenmustern.

a) Berechne die absoluten Zahlen der Ausbildungsverträge von Frauen als Kraftfahrzeugmechatronikerin und von Männern als Kaufmann für Büromanagement.

b) Stelle für den Beruf Kaufmann/-frau im Einzelhandel die prozentualen Anteile von Männern und Frauen in einem Kreisdiagramm dar.

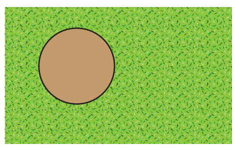
c) Nur eine der Aussagen ① und ② stimmt. Begründe.

① Die Anzahl der Ausbildungsverträge Elektroniker/in für Frauen und Medizinische/r Fachangestellte/r für Männer ist gleich.
② Ungefähr drei Viertel der Ausbildungsverträge Kaufmann/-frau für Büromanagement werden von Frauen abgeschlossen.

d) In einem Zeitungsartikel stand:
„Der Frauenanteil in den traditionell männlichen Berufen nimmt stetig zu. In Brandenburg verdient schon mehr als ein Fünftel der berufstätigen Frauen ihr Geld in traditionellen männlichen Berufen; in Berlin waren es mit 26,5 % kaum weniger.“
Nimm Stellung zu dieser Aussage.

2 Der 28 m hohe Turm in der Burg in Bad Belzig stammt aus dem 13. Jahrhundert. Der Durchmesser beträgt 10 m.

a) Die Rasenfläche um den Turm soll erneuert werden. Sie ist 30 m lang und 18 m breit. Berechne die Kosten, wenn 1 m^2 mit 6,75 € netto berechnet wird.



b) Bestimme die Rechnungshöhe einschließlich 19 % Mehrwertsteuer.

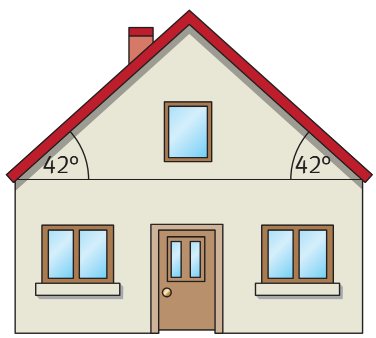
c) 1859 wurden die Außenmauern erneuert. Berechne die Größe der Fläche, die ungefähr bearbeitet werden musste.

3 Der Architekt entwirft ein Wohnhaus.
Das symmetrische Giebeldreieck des Satteldachs ist 8,5 m breit.

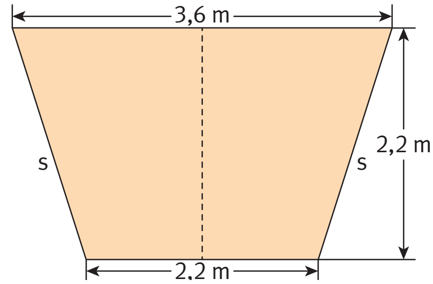
a) Konstruiere das Dreieck im Maßstab 1 : 100.

b) Bestimme die Größe des Winkels an der Spitze.

c) Der Bauherr wünscht sich eine Giebelhöhe von 4 m. Überprüfe rechnerisch, ob der Entwurf das berücksichtigt hat.



4 Der Kindergarten braucht einen neuen Sandkasten.



a) Die Grundfläche (gleichschenkliges Trapez) soll mindestens 6 m^2 groß sein. Prüfe, ob dieser Sandkasten die Vorgabe erfüllt.

b) Er wird nun bis zu einer Höhe von 30 cm mit Spielsand aufgefüllt werden. Berechne, wie viel Kubikmeter Sand gekauft werden müssen.

c) Nachts soll der Sandkasten abgedeckt werden. Begründe, welche Plane den Sandkasten vollständig bedeckt.
① 2 m x 4 m ② 3 m x 2 m ③ 4 m x 2,5 m

d) Die Ränder des Buddelkastens sollen mit Holzbrettern zum Sitzen ausgestattet werden. Berechne dazu den Umfang des Sandkastens.

5 Auf einer Station in Krankenhaus liegen viele Patienten, die an der Zuckerkrankheit (Diabetes) leiden. Eine Ursache kann Übergewicht sein.

Mithilfe des Body-Mass-Index (BMI) kann man das Körpergewicht eines Menschen bewerten. Man berechnet ihn mit folgender Formel

$$\text{BMI (in kg/m}^2) = \frac{\text{Körpergewicht in kg}}{(\text{Körpergröße in m})^2}$$

Dabei werden die Werte auf eine Stelle nach dem Komma gerundet.

Für einen erwachsenen Menschen gilt:

BMI	Einordnung
< 18,5	Untergewicht
18,5 bis 24,9	Normalgewicht
25 bis 29,9	Übergewicht
ab 30	Adipositas

a) Überprüfe die BMI-Werte der Patienten. Korrigiere gegebenenfalls.

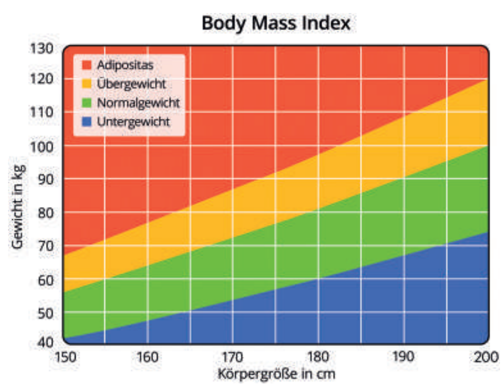
	weibliche Patienten				männliche Patienten		
	Gewicht in kg	Größe in m	BMI		Gewicht in kg	Größe in m	BMI
1	72,8	1,68	25,8	1	105,6	1,88	29,9
2	83,5	1,75	27,3	2	99,5	1,75	30,5
3	58,4	1,61	22,5	3	89,7	1,68	25,8
4	65,9	1,54	27,8	4	78,4	1,75	25,6
5	54,2	1,60	21,2	5	69,0	1,68	24,4

b) Berechne jeweils den prozentualen Anteil der Frauen (Männer), die auf der Station übergewichtig sind.

c) Frau Yilmaz ist 1,65 m groß und hat einen BMI von 27. Berechne ihr Gewicht.

d) Herr Müller hat einen BMI von 21,1 und wiegt 70 kg. Berechne seine Körpergröße.

e) Im Krankenhaus hängt dieses Plakat. Gib jeweils die Spannen in kg an, zwischen denen ein 1,65 m (1,80 m) großer Mensch Normalgewicht hat.



1 Wie viele Arbeitstage, wie viele Arbeitsstunden hat ein Jahr? Schätze damit ab:

a) Wie viele Stunden im Jahr schneidet eine Friseurin Haare?

b) Wie viele Behandlungen führt ein Zahnarzt im Jahr durch?

c) Wie viele Autos repariert ein Kfz-Mechaniker in einem Jahr?

d) Wie viele Blumensträuße bindet eine Floristin an einem Tag?




2 a) Wie lang sind die Papierstreifen, die an einem Tag (in einem Monat; in einem Jahr) aus den Kassen eines Supermarkts kommen?
b) Ist der Papierstreifen nach einem Jahr so lang wie der Teil der Spree, der durch Berlin fließt?
c) Kann man mit den Papierstreifen nach einem Jahr ein Fußballfeld auslegen?
Recherchiere benötigte Angaben im Internet.

3 a) Wie viele Menschen arbeiten wohl im Treptower, dem höchsten Bürogebäude Berlins?
b) Wie lange braucht ein Fensterputzer, um das Gebäude von außen zu putzen?
Recherchiere benötigte Angaben im Internet.

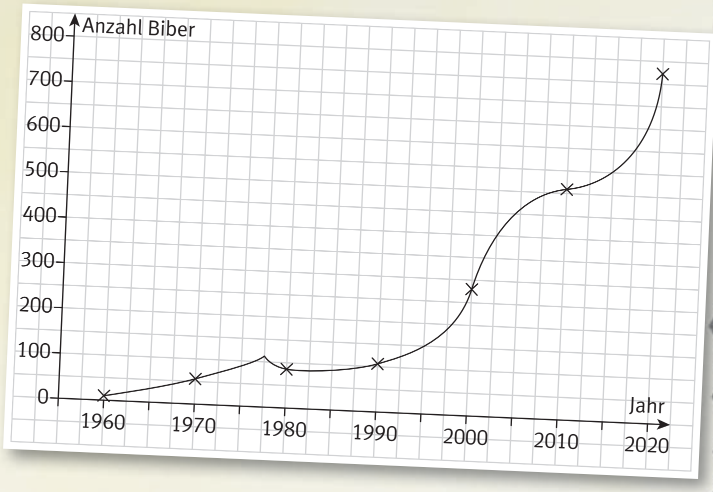
4 Stelle dir vor: Alle erwerbsfähigen Einwohner in Berlin (oder deiner Heimatstadt) verzichten einen Monat auf 10 % ihres Bruttoverdienstes und werfen alles in einen Topf. Welche Einrichtungen könnte man für diese Summe bauen? Einen Bahnhof, ein Schwimmbad, eine Schule, ...?
Recherchiere benötigte Angaben.

Wachstumsprozesse

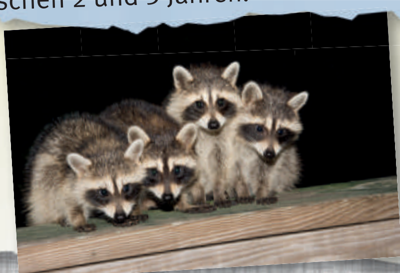
Biber leben in Biberburgen mit bis zu vier Jungen in und am Wasser. Die Pflanzenfresser können bis zu 20 Minuten tauchen. Ihre Lebenserwartung liegt bei ungefähr 20 Jahren.

Biber waren ursprünglich in ganz Europa beheimatet. Im 19. Jahrhundert hatte der Mensch den großen Nager fast ausgerottet. Seit der Mitte des 20. Jahrhunderts werden Biber in Deutschland wieder eingebürgert.

- In Brandenburg wurde das Bibervorkommen in der Schorfheide in einem Diagramm dargestellt. Beschreibe die Entwicklung.
- Lies ab, wie viele Biber es ungefähr 1960 (1990; 2020) gab.
- Lies ab, nach wie vielen Jahren es mehr als 200 (500) Biber gab.
- Begründe, warum die Kurve zunächst langsam, dann aber schnell steigt.
- Wie wird die Entwicklung weitergehen? Vermute zuerst, dann recherchiere.



Waschbären leben in gewässerreichen Wäldern. Sie fressen sowohl Pflanzen als auch Weich- und Wirbeltiere. Die Weibchen bekommen pro Jahr 2 bis 5 Junge. Die Lebenserwartung in freier Wildbahn liegt zwischen 2 und 3 Jahren.



Waschbären stammen ursprünglich aus Nordamerika. Am Ende des 2. Weltkrieges 1945 entkamen etwa 25 Tiere aus einer Pelztierfarm in der Nähe von Berlin, als eine Bombe einschlug. Die Zahl der jetzt in Ostdeutschland lebenden Waschbären kann durch ein mathematisches Modell abgeschätzt werden.
Man geht davon aus, dass sich ungefähr alle 5 Jahre der Bestand verdoppelt.

- Berechne die Zahl der Nachkommen der 25 Tiere nach 5 (10; 20; 30; 40) Jahren.
- Wie viele Waschbären leben nach diesem Modell 2020 in Ostdeutschland?
- Stelle die Entwicklung von 1945 bis 1975 in einem Verlaufsdiagramm wie bei den Bibern dar. Beschreibe und vergleiche.
- Begründe, auch mithilfe des Informationstextes, warum das Modell nur ungefähre Schätzwerte liefert.
- Eine hohe Population von Waschbären bedroht das ökologische Gleichgewicht. Informiere dich, was das bedeutet und was man dagegen tun kann.

Prozentrechnung

Anteile unterschiedlich angeben

1 a) Notiere jeweils als Bruch und Dezimalzahl. Kürze, wenn möglich.
A 60 % B 2 % C 125 % D 12,5 % E 320 %
b) Notiere jeweils als Dezimalzahl und Prozentsatz.
A $\frac{27}{100}$ B $\frac{102}{100}$ C $\frac{230}{100}$ D $\frac{3}{10}$ E $\frac{7}{5}$

Preiserhöhungen und Preissenkungen berechnen

2 Preise können um Prozentsätze erhöht oder verringert werden. Ordne zusammengehörige Kärtchen einander zu und notiere sie wie im Beispiel.
Preis sinkt um 20 % ≙ 80 % des alten Preises ≙ alter Preis · Faktor 0,8

sinkt um 10 %	vermehrt um 15 %	110 %	85 %	115 %	1,10
verringert um 15 %	0,9	0,85	erhöht um 10 %	90 %	1,15

Mit dem Wachstumsfaktor rechnen

3 Übertrage die Tabelle und ergänze die fehlenden Angaben.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
alter Preis	340 €	125 €	1 450 €	■	■	■
Änderung um ...	+ 8 %	■	■	– 25 %	■	■
veränderter Prozentsatz	■	83 %	■	■	112 %	■
Wachstumsfaktor	■	■	1,02	■	■	0,9
neuer Preis	■	■	■	243 €	4 032 €	567 €

4 Berechne jeweils die gesuchte Größe.
a) Die Sportschuhe kosteten gestern 120 €. Heute kosten sie 15 % mehr.
b) Das BVG-Abo kostet monatlich 17 €. Es wird im nächsten Jahr um 2 % teurer.
c) Der Wert eines Autos sinkt im ersten Jahr um 15 %. Der Anschaffungspreis betrug 25 000 €.
d) Juan ärgert sich. Sein Handy hatte im ersten Jahr einen Wertverlust von 30 %. Es ist nun nur noch 490 € wert.
e) Ein Computerspiel kostet 80 €. Nach einem Jahr sinkt der Preis auf 35 %.

Wird eine Größe (z. B. ein Preis) um einen bestimmten Prozentsatz p % vermehrt (vermindert), lässt sich der neue Wert direkt bestimmen, indem man mit dem vermehrten (verminderten) Prozentsatz 100 % ± p % rechnet. Dazu multipliziert man die Ausgangsgröße, die dem Grundwert G entspricht, mit dem Wachstumsfaktor $(1 \pm \frac{p}{100})$. Die neue Größe bezeichnet man als vermehrten (verminderten) Grundwert.

alter Preis (G; 100 %)	Erhöhung um 2 %
neuer Preis (vermehrter Grundwert) 102 %	

alter Preis (G; 100 %)	
neuer Preis (verminderter Grundwert) 95 %	Senkung um 5 %

alter Preis	Wachstumsfaktor	neuer Preis
24 500 €	· 1,02 →	24 990 €

alter Preis	Wachstumsfaktor	neuer Preis
35 000 €	· 0,95 →	33 250 €

Potenzen

Potenzen erkennen und berechnen

5 Schreibe als Potenz bzw. als Produkt und berechne, wenn möglich.

a) $2 \cdot 2 \cdot 2$ b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ c) $5 \cdot 5$ d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ e) $b \cdot b \cdot b$
f) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ g) $(-4)^2$ h) $(-2)^5$ i) x^4 j) $(-a)^3$

Produkte aus lauter gleichen Faktoren kann man als Potenz schreiben.
Dabei gilt für alle rationalen Zahlen a als Basis: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$ $a \in \mathbb{Q}$

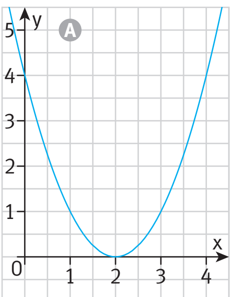
5 gleiche Faktoren		Potenz		Potenzwert
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	=	2^5	=	32

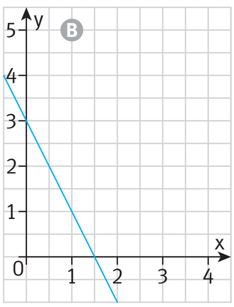
Basis 2^5 Exponent

Funktionen

Darstellungsformen von Funktionen kennen

6 Ordne den beiden Graphen passende Kärtchen zu. Zwei bleiben übrig.





$f_1(x) = -2x + 3$

$f_4(x) = x^2 + 4x + 4$

x	0	1	2
y	3	2	1

$f_2(x) = -3x + 2$

x	0	1	2
y	4	1	0

$f_3(x) = x^2 - 4x + 4$

x	0	1	2
y	3	1	–1

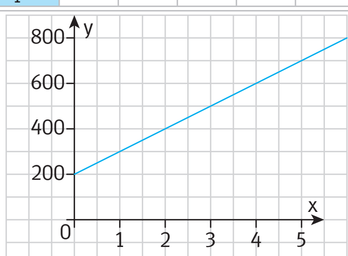
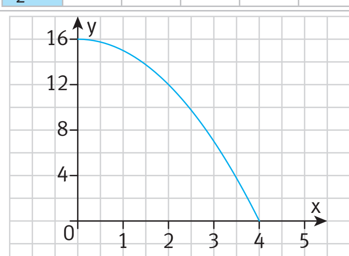
x	0	1	2
y	4	0	2

Wertetabellen aufstellen und Graphen zeichnen

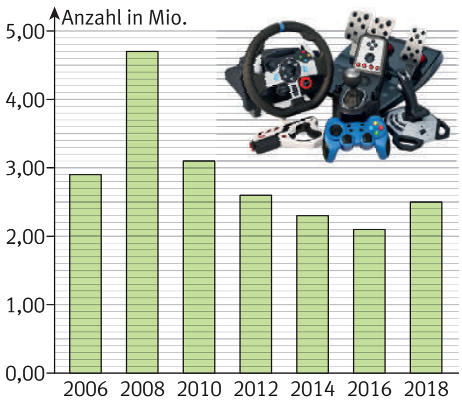
7 Lege jeweils für das Intervall $-2 \le x \le 3$ eine Wertetabelle in 0,5er-Schritten an und zeichne die Graphen.

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = -1{,}5x + 2$ c) $f(x) = x^2 - 4$ d) $f(x) = x^2 - x$

Funktionen können mithilfe einer Gleichung, einer Wertetabelle und einem Graphen dargestellt werden.

	Lineare Funktion	Quadratische Funktion
Gleichung	$f_1(x) = 100x + 200$	$f_2(x) = -x^2 + 16$
Wertetabelle	x: 0, 1, 2, 3, 4 $f_1(x)$: 200, 300, 400, 500, 600	x: 0, 1, 2, 3, 4 $f_2(x)$: 16, 15, 12, 7, 0
Graph		

Unregelmäßige Wachstumsprozesse untersuchen



1 Ollys Spiele-Börse hat die Verkaufszahlen von Spielekonsolen in Deutschland in Zweijahresschritten grafisch dargestellt.

a) Beschreibe die Entwicklung der Verkaufszahlen.

b) Berechne, wie viele Konsolen innerhalb von zwei Jahren mehr oder weniger verkauft wurden.

c) Olly hat für 2006 bis 2008 die prozentuale Zunahme der Verkaufszahlen berechnet. Beschreibe sein Vorgehen und berechne für die nächsten Zeiträume genauso. Was fällt dir auf?

$\frac{4{,}7-2{,}9}{2{,}9} \approx 0{,}62 = 62\,\%$

d) Stelle diese prozentualen Änderungen in einem zweiten Säulendiagramm dar. Beschreibe die Besonderheit.

Wachstum
Abnahme
Wachstumsrate

Nimmt der Wert einer Größe, z. B. in Natur und Technik oder in der Wirtschaft, zu, liegt **Wachstum** vor; nimmt er ab, spricht man von **Abnahme**.

Für das **absolute Wachstum** gilt: d = neuer Wert – alter Wert

Für das **relative (prozentuale) Wachstum** gilt: $p\,\% = \frac{\text{neuer Wert} - \text{alter Wert}}{\text{alter Wert}}$

Dieser Prozentsatz wird als **Wachstumsrate** bezeichnet.

Die Schülerfirma hat 2019 40 Kalender verkauft, 2020 60 Kalender.
d = 20 (Exemplare) $\quad p\,\% = \frac{60-40}{40} = 0{,}5 = 50\,\%$

d (p %) > 0: Wachstum

d (p %) < 0: Abnahme (negatives Wachstum)

Die Größe der Wachstumsrate kann sich durch Verkleinern bzw. Vergrößern der Zeitintervalle erheblich verändern.

2 Beurteile die folgenden Aussagen.

a) „2016 wurden die wenigsten Konsolen verkauft, da war die prozentuale Abnahme am größten."

b) „Die beste Zeit der Konsolen ist für immer vorbei."

c) „Zwischen 2008 und 2016 betrug die prozentuale Abnahme circa –55 %." „Das kann nicht stimmen, die Addition der Wachstumsraten für die Zeiträume von jeweils 4 Jahren ergibt circa –64 %!" Begründe den Unterschied.

3 Die Tabelle zeigt gerundete Werte des Deutschen Aktien Index von 2008 bis 2012 jeweils zum Jahresbeginn.

a) Stelle die Werte als Säulendiagramm dar.

b) Gib an, in welchen Zeiträumen es ein Wachstum bzw. eine Abnahme gab und bestimme diese.

c) Bestimme die Wachstumsraten und stelle sie in einem zweiten Säulendiagramm dar.

Jahr	Wert
2008	8 000
2009	4 900
2010	6 000
2011	7 000
2012	5 900

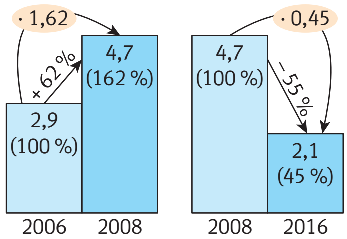
4 Berechne jeweils die Wachstumsrate.

a) Sören erreichte im Mai 10 000 Punkte in seinem Lieblingscomputerspiel. Im Juni schaffte er 8 000.

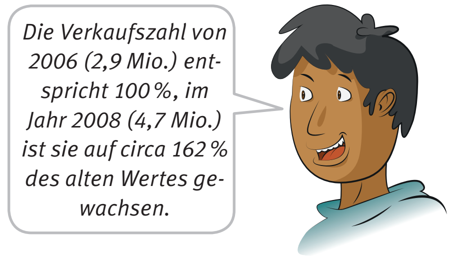
b) Mehmet verdiente im Januar 200 € durch Nachhilfe. Im Februar verdient er 240 €.

c) Im September besuchten 2 000 Gäste den Klettergarten. Im regnerischen Oktober kamen nur noch 250 Gäste.

1 a) Erkläre die rechte Grafik wie Ali.
b) Überlege, wie die Wachstumsrate und der Wachstumsfaktor zusammenhängen.
c) Bestimme die Wachstumsfaktoren zu den weiteren Wachstumsraten aus Aufgabe 1 c) von Seite 134 und überprüfe die Ergebnisse.



Entwicklung der Verkaufszahlen von Spielekonsolen



Wachstumsfaktor

Ist eine Wachstumsrate zwischen einem alten und einem neuen Wert bekannt, kann der neue Wert durch Multiplikation des alten Wertes mit dem **Wachstumsfaktor q** berechnet werden: neuer Wert = q · alter Wert.

Für eine Zunahme gilt:
$q = 1 + p\,\% = 1 + \frac{p}{100}$

Zunahme um 23 %:
$q = 1 + 0{,}23 = 1{,}23$
⇒ neuer Wert = 1,23 · alter Wert

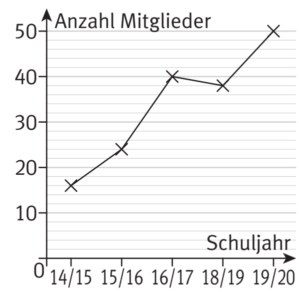
Für eine Abnahme gilt:
$q = 1 - p\,\% = 1 - \frac{p}{100}$

Abnahme um 23 %:
$q = 1 - 0{,}23 = 0{,}77$
⇒ neuer Wert = 0,77 · alter Wert

2 Bestimme den Wachstumsfaktor.
a) um 3 % erhöhen b) um 350 % ansteigen c) Ein Viertel mehr
d) um 10 % verringern e) um 35 % absenken f) Ein Fünftel weniger

3 Gib den Wachstumsfaktor bzw. die Wachstumsrate an.
a) p % = 12 % b) p % = 134 % c) p % = –22 % d) p % = –99 %
e) q = 1,07 f) q = 2,50 g) q = 0,45 h) q = 0,785

4 Dora hat die Mitgliederzahlen ihres Schulchores grafisch dargestellt. Um mehr Werbung zu machen, möchte sie noch darstellen, wie stark die Mitgliederzahlen jedes Jahr gewachsen sind.
a) Lies die Werte für jedes Schuljahr ab und übertrage sie in eine Tabelle.
b) Berechne die Wachstumsfaktoren und die Wachstumsraten für jeden Zeitraum.



5 In der Rugby-Weltrangliste werden jedes Jahr Punkte für die Nationen vergeben und eine Rangfolge aufgestellt. Vervollständige die Tabelle.

	Neuseeland	Deutschland	Arabische Emirate	Fidschi-Inseln	Russland
Punkte 2014	93,81 (1.)	56,20 (26.)	30,00 (97.)	74,21 (11.)	■ (19.)
Punkte 2019	92,54 (1.)	57,83 (26.)	■ (70.)	■ (8.)	65,20 (19.)
p %	■	■	■	5 %	■
q	■	■	1,375	■	1,066

Regelmäßige Wachstumsprozesse untersuchen

Ajshe Mahmut

1 Ajshe und Mahmut sollen für die Nachbarin ab und zu einkaufen gehen. Sie machen ihr jeweils ein Angebot. Welches sollte die Nachbarin wählen?

a) Vervollständige die Tabelle für Mahmuts Angebot bis zum 10. Einkauf.

b) Vergleiche: Wie viel hat jeder nach dem 10. Einkauf insgesamt verdient?

c) Stelle den jeweiligen Gesamtverdienst von 0 bis 10 Einkäufen in einem Koordinatensystem dar.

d) Beschreibe den Verlauf der Graphen. Woran erkennt man, ab wann welches Angebot besser ist?

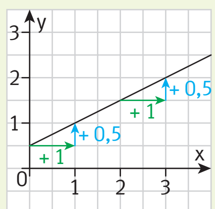
Anzahl Einkäufe	
Verdienst pro Einkauf	
Verdienst insgesamt	

Lineares und exponentielles Wachstum

Bei regelmäßigen Wachstumsprozessen sind zwei Formen wichtig:

Lineares Wachstum
In gleichen Zeiträumen nehmen die Werte um den gleichen Summanden m zu.

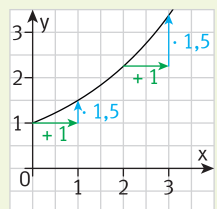
x	y
0	0,5
1	1
2	1,5
3	2



Die Wertepaare liegen auf einer Geraden.

Exponentielles Wachstum
In gleichen Zeiträumen werden die Werte mit dem gleichen Faktor a vervielfacht.

x	y
0	1
1	1,5
2	2,25
3	3,375



Die Wertepaare liegen auf einer immer stärker ansteigenden Kurve.

Auch regelmäßige Abnahmeprozesse können linear oder exponentiell verlaufen.

2 Begründe, ob die Wachstumsprozesse aus Aufgabe 1 linear oder exponentiell verlaufen.

3 Untersuche die folgenden Wachstumsprozesse und begründe die Wachstumsart. Falls lineares oder exponentielles Wachstum vorliegt, erstelle eine Wertetabelle für das Intervall $0 \le x \le 10$ und zeichne einen Graphen in einem geeigneten Ausschnitt davon.

a) Anne steckt monatlich 2,50 € in ihr Sparschwein, um eine Taucherbrille für den nächsten Urlaub zu kaufen.

b) Onkel Franz gibt seinem Lieblingsneffen Kilian zunächst einen Cent, verspricht ihm aber jeden Monat jeweils einen dreimal so hohen Betrag wie im vorangegangenen zu schenken.

c) Veronika spart das Geburtstagsgeld (55 €), ihren Verdienst als Babysitterin (32 €) und ihr Taschengeld (25 €), um sich neue Stiefel zu kaufen.

d) Abed hat sich von seiner Mutter 50 € für ein Computerspiel geliehen. Er vereinbart mit ihr, jede Woche 5 € zurückzuzahlen.

A

x	y
0	$1 = 2^0$
1	$2 = 2^1$

B

x	y
0	0
1	8

C

x	y
0	$3 = 3 \cdot 2^0$
1	$6 = 3 \cdot 2^1$

D

x	y
0	15
1	20

1 Eine Hefekultur von 3 g verdoppelt ihre Masse bei warmer Umgebung stündlich.

2 Eine Bodenfläche (in m²) wird mit DIN-A3-Blättern ohne Überlappung bedeckt.

3 Einem Verein treten pro Monat durchschnittlich fünf Mitglieder bei.

4 Ein DIN-A4-Blatt wird fortlaufend gefaltet, zu Beginn besteht es aus einer Schicht.

1 a) Die Tabellen stellen Wachstumsprozesse dar. Ordne jeder Tabelle den passenden Text zu. Begründe. Wofür stehen jeweils die Variablen x und y?
b) Übertrage die Tabellen und vervollständige sie bis x = 10. Stelle die Veränderung der x- und y-Werte mit Pfeilen wie im Merkkasten auf Seite 136 dar.
c) Erkläre die Potenzschreibweise. Überlege, wie du in allen Beispielen weitere y-Werte auch direkt berechnen kannst.

Lineares und exponentielles Wachstum
Funktionsgleichungen

Lineare und exponentielle Wachstumsprozesse lassen sich mithilfe von Funktionsgleichungen beschreiben.

Lineares Wachstum
$f(x) = m \cdot x + n$
Der y-Achsenabschnitt n gibt den Startwert für x = 0 an, die Steigung m die Änderung während einer Einheit.
Für n = 0 gilt: $f(x) = m \cdot x$

Ein Baby bekommt zur Geburt 50 € geschenkt und zu jedem weiteren Geburtstag 20 €. Für den Kontostand zum dritten Geburtstag gilt:
$f(3) = 20 \cdot 3 + 50 = 110$ (€)

Exponentielles Wachstum
$f(x) = c \cdot a^x$
c gibt den Startwert für x = 0 an, a den Faktor der Vervielfachung während einer Einheit. a nennt man Wachstumsfaktor.
Für c = 1 gilt: $f(x) = a^x$

Ein Baby bekommt zur Geburt 5 €, zu jedem weiteren Geburtstag den dreifachen Betrag. Am dritten Geburtstag erhält das Kind folgenden Betrag:
$f(3) = 5 \cdot 3^3 = 135$ (€)

lineare(s) Wachstum (Abnahme): $m > 0$ $(m < 0)$

exponentielle(s) Wachstum (Abnahme): $a > 1$ $(0 < a < 1)$

$a^0 = 1$
$a^1 = a$

2 Stelle zu Aufgabe 1 die Funktionsgleichungen auf und berechne so
a) die Anzahl der Papierschichten nach theoretisch 20 Faltungen (Dicke pro Schicht: 0,15 mm).
b) die Masse der Hefekultur nach 20 Stunden.
c) die Anzahl der DIN-A3-Blätter für ein Fußballfeld (Größe: 7 140 m²).
d) die Anzahl der Vereinsmitglieder nach einem Vierteljahr.

3 a) Prüfe jeweils, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt. Begründe.
b) Stelle die Funktionsgleichung auf.
c) Zeichne die zugehörigen Graphen.

x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	3	6	9	12	15
$f_2(x)$	0,5	1,5	4,5	13,5	40,5
$f_3(x)$	9,5	7	4,5	2	−0,5
$f_4(x)$	8	4	2	1	0,5

Exponentielle Zunahmen untersuchen

Franz

1 Dieter hat sich einen Oldtimer für 10 000 € gekauft. Jedes Jahr steigt der Wert des Wagens um 10 %. Nun möchte er den Oldtimer gegen ein Motorrad für 20 000 € eintauschen.

a) Begründe, warum Dieter von der Überlegung seines Freundes Franz nicht überzeugt ist.

b) Erkläre und vervollständige Dieters Rechnung. Überlege, wie es weitergehen könnte und berechne damit direkt den Wert des Oldtimers nach 10 Jahren.

Wert nach 1 Jahr: $10\,000 \cdot 1{,}1 = 11\,000$ (€)

Wert nach 2 Jahren: $11\,000 \cdot 1{,}1 = 10\,000 \cdot \underbrace{1{,}1 \cdot 1{,}1}_{1{,}1^2} = \blacksquare$

Wert nach 3 Jahren: $\blacksquare \cdot 1{,}1 = 10\,000 \cdot \underbrace{1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1}_{1{,}1^3} = \blacksquare$

Exponentielles Wachstum mit Wachstumsrate (-faktor)

Bei einer Zunahme mit konstanter prozentualer Wachstumsrate p % liegt **exponentielles Wachstum** mit dem dazugehörigen Wachstumsfaktor
$q = a = 1 + p\,\% = 1 + \frac{p}{100}$ und der Funktionsgleichung $f(x) = c \cdot a^x$ vor.

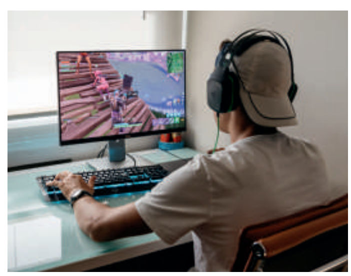
Die Anzahl der Bakterien einer Kultur vermehrt sich stündlich um 25 %. Zu Beginn existieren 1 000 Bakterien. Wie viele Bakterien sind dann in 10 Stunden vorhanden?
Wachstumsfaktor: $q = a = 1 + 25\,\% = 1{,}25$
Funktionsgleichung: $f(x) = 1\,000 \cdot 1{,}25^x$
Anzahl Bakterien nach 10 Stunden: $f(10) = 1\,000 \cdot 1{,}25^{10} \approx 9\,313$

2 Stelle für die Wertentwicklung des Oldtimers eine Funktionsgleichung auf und berechne damit den Wert nach 12 (15; 17) Jahren.

3 Die Funktionsgleichungen beschreiben exponentielle Wachstumsprozesse (x gibt die Anzahl der Jahre an). Bestimme den Startwert, die Wachstumsrate p % und den jeweiligen Endwert für x = 2 (5; 7) Jahre.

a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$ b) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}03^x$ c) $f(x) = 0{,}2 \cdot 2{,}0^x$

4 Ein Online-Computerspiel hat 1,5 Millionen Spieler weltweit. Eine neue Version lässt die Spielerzahl monatlich um 15 % wachsen.



a) Stelle zu diesem Sachverhalt eine Funktionsgleichung auf.

b) Erstelle eine Wertetabelle für das Intervall $0 \leq x \leq 12$ in 2er-Schritten (x: Anzahl Monate). Runde geeignet und zeichne den Graphen.

c) Lies ab, wann ungefähr 3 (4) Millionen Spieler registriert sind.

d) Beurteile: Ist die Wachstumsrate für einen längeren Zeitraum realistisch?

e) Finde heraus, wann das Spiel bei gleichbleibendem Wachstum 10 Millionen Spieler hat.

1 Momo will sich einen neuen Kleinwagen für 10 000 € kaufen. Jedes Jahr sinkt der Wert des Wagens um 10 %.

a) Berechne den Wert des Wagens nach einem Jahr (zwei Jahren).
b) Momo könnte den Wagen auch gebraucht kaufen. Der Verkäufer hatte seinen Neuwagen vier Jahre lang gefahren und möchte nun noch 6 000 € dafür haben. Sollte Momo dieses Angebot annehmen?
c) Überlege, ob du den Wert aus Aufgabe b) auch direkt berechnen kannst.

Exponentielle Abnahme mit Wachstumsrate (-faktor)

Bei einer Abnahme mit konstanter prozentualer Wachstumsrate p % liegt eine **exponentielle Abnahme** mit dem dazugehörigen Wachstumsfaktor $q = a = 1 - p\,\% = 1 - \frac{p}{100}$ und der Funktionsgleichung $f(x) = c \cdot a^x$ vor.

Die Anzahl der Bakterien einer Kultur verringert sich in schmutzigem Wasser stündlich um 25 %. Zu Beginn existieren 1 000 Bakterien. Wie viele Bakterien sind noch nach vier Stunden vorhanden?
Wachstumsfaktor: $q = a = 1 - 25\,\% = 0{,}75$
Funktionsgleichung: $f(x) = 1\,000 \cdot 0{,}75^x$
Anzahl Bakterien nach 4 Stunden: $f(4) = 1\,000 \cdot 0{,}75^4 \approx 316$

2 Stelle für die Wertentwicklung des Neuwagens aus Aufgabe 1 eine Funktionsgleichung auf und berechne damit den Wert nach 12 (15; 17) Jahren.

3 Die Funktionsgleichungen beschreiben exponentielle Abnahmeprozesse (x gibt die Anzahl der Jahre an). Bestimme den Startwert, die Wachstumsrate p % und den jeweiligen Endwert für x = 2 (5; 7) Jahre.
a) $f(x) = 2 \cdot 0{,}3^x$ b) $f(x) = 1\,000 \cdot 0{,}97^x$ c) $f(x) = 0{,}2 \cdot 0{,}11^x$

4 Melda will sich einen Tee zubereiten. Sie lässt das kochende Wasser kurz auf 90 °C abkühlen. In einem Forum hat sie gelesen, dass das Wasser sich in jeder Minute um 1,5 % abkühlt und dass 60 °C die ideale Trinktemperatur wäre. Wie lange muss sie nun warten?

a) Stelle zu diesem Sachverhalt eine Funktionsgleichung auf.
b) Erstelle eine Wertetabelle für das Intervall $0 \leq x \leq 50$ in 5er-Schritten. Runde geeignet.
c) Zeichne den Graphen.
d) Lies ab, wann Melda den Tee trinken kann.
e) Melda dauert das Warten zu lange. Was könnte sie tun, um ihren Tee schneller trinken zu können?
f) Finde heraus, wann der Tee lauwarm (35 °C) ist bzw. die Zimmertemperatur von 23 °C erreicht hat.

Eine Kiefer ist beim Pflanzen 1,20 m hoch und wächst pro Jahr um ca. 44 cm.

Der Holzbestand eines kleinen Waldes beträgt etwa 11 200 m². Jährlich wächst er um 3 %.

1 Wie groß ist die Kiefer und der Holzbestand nach 20 Jahren? Übertrage die Lösungswege und vervollständige sie. Ordne die angegebenen Schritte den Lösungen zu.

① ■ wächst jedes Jahr um ■.	① ■ wächst jedes Jahr um ■.
② Lineares Wachstum mit ■	② ■ Wachstum mit ■
③ Startwert: ■	③ Startwert: ■
④ x steht für ■.	④ x steht für ■.
⑤ f(x) = ■	⑤ f(x) = ■
⑥ f (20) = ■	⑥ f(20) = ■
⑦ Die Kiefer ist nach 20 Jahren ■ groß.	⑦ Der Holzbestand ■.

Bedeutung der Variablen x bestimmen – Funktionswert berechnen – aufmerksam lesen, wichtige Werte erkennen – Funktionsgleichung aufstellen – Startwert ermitteln – entscheiden, welche Wachstumsart vorliegt – Antwortsatz formulieren

Nehmen die Werte um den gleichen Summanden zu oder werden sie mit dem gleichen Faktor vervielfacht?

2 Beim Tauchen muss man den Umgebungsdruck und die Lichtintensität beachten.

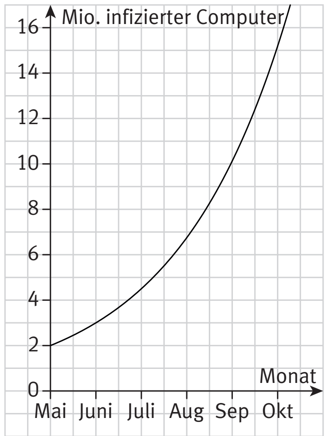
Im Wasser nimmt die Lichtintensität pro Meter Wassertiefe um 40 % ab. An der Wasseroberfläche beträgt sie 100 %.

Beim Tauchen steigt der Umgebungsdruck pro Meter Wassertiefe um 0,1 bar. An der Wasseroberfläche beträgt dieser 1 bar.

a) Stelle für beide Sachverhalte die Funktionsgleichung auf.
b) Erstelle jeweils eine Wertetabelle für das Intervall $0 \le x \le 6$ und zeichne die Graphen in geeignete Koordinatensysteme.
c) Der Weltrekord im Tauchen liegt bei 332,35 m Tiefe. Welchem Druck musste der Taucher standhalten?
d) Finde heraus, ab welcher Wassertiefe die Lichtintensität auf unter 10 % sinkt.

3 Ein 1000 m² großer Baggersee wird erweitert. Jede Woche vergrößern Bagger die Wasserfläche um 20 m². Eine schnell wachsende Algenart verdoppelt wöchentlich ihre Fläche. Zu Beginn bedecken die Algen eine Fläche von 50 m².
a) Stelle für beide Wachstumsvorgänge eine Funktionsgleichung auf.
b) Bestimme grafisch, wann der ganze See mit Algen bedeckt ist.

1 Im Mai 2016 wurde der Computervirus RAMNIT auf vielen Computern weltweit gefunden.
a) Lies ab, wie viele Computer Anfang Mai befallen waren.
b) Bestimme mithilfe des Graphen die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor.
c) Stelle die Funktionsgleichung auf.
d) Berechne, wie viele Computer Anfang Dezember (Anfang Mai des darauffolgenden Jahres) befallen waren.
e) Begründe, weshalb die Verbreitung des Virus nicht immer so weitergehen konnte.



2 Eine Tasse Kaffee enthält 50 bis 100 mg Koffein, das von Magen und Darm rasch und nahezu vollständig an das Blut abgegeben wird.
Die Koffeinmenge im Blut wird stündlich gemessen.

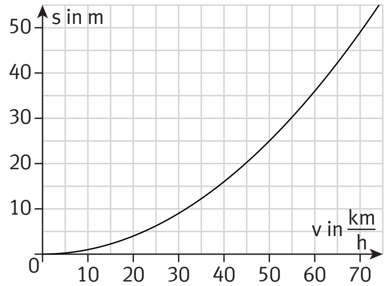
Zeit in h	0	1	2	3
Koffeinmenge (mg)	50	40,0	32,0	25,6

a) Begründe, dass es sich um exponentielle Abnahme handelt. Bestimme dazu den Wachstumsfaktor und die Wachstumsrate.
b) Stelle für die Entwicklung der Koffeinmenge die Funktionsgleichung auf und berechne die Koffeinmenge nach 4 (5; 6; 7; 8) Stunden. Runde geeignet.
c) Zeichne den Graphen im Intervall $0 \le x \le 8$ in ein geeignetes Koordinatensystem und lies ab, zu welchem Zeitpunkt sich ungefähr nur noch ein Viertel der Koffeinmenge im Blut befindet.
d) Finde heraus, nach wie viel Stunden die Koffeinmenge unter 1 mg sinkt.

3 Auf einem 850 m^2 großen Baggersee wachsen Wasserhyazinthen, die zu Beginn der Untersuchung eine Fläche von 30 m^2 bedecken. Bei günstigen Umweltbedingungen vergrößert sich die bedeckte Fläche wöchentlich um einen festen Prozentsatz. Nach einer Woche bedecken die Hyazinthen bereits eine Fläche von 42 m^2.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf, die diesen Wachstumsvorgang beschreibt.
b) Zeichne den Graphen.
c) Lies ab, wann die Wasserhyazinthen den ganzen See bedecken würden.
d) Berechne, wie groß die Fläche eine Woche (zwei Wochen) vor Untersuchungsbeginn war.
e) Angenommen, die Fläche der Wasserhyazinthen vergrößert sich wöchentlich nicht wie oben berechnet, sondern …
(A) um 30 % (B) um 20 % (C) um 50 %
Finde heraus, wann die Pflanzen dann jeweils den ganzen See bedecken würden.

1 Aleks macht seinen Führerschein und hat bereits seine ersten Fahrstunden gehabt. In der letzten Theoriestunde hat er gelernt, dass der Bremsweg s von der gefahrenen Geschwindigkeit v abhängt.



a) Lies die Länge des Bremswegs bei 50 $\frac{km}{h}$ ab.
b) Vervollständige die Tabelle zum Graphen. Erkläre, wie du gerechnet hast.

v in km/h	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
s in m	1	4	9	■	■	■	■	■	■	■

c) Begründe, warum der Wachstumsprozess nicht linear (exponentiell) verläuft.
d) Bestimme, welche Funktionsgleichung zu diesem Sachverhalt passt.

1 $s(v) = 0{,}1v^2$ 2 $s(v) = 0{,}01v^2$ 3 $s(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ 4 $s(v) = 0{,}01v$

e) Untersuche, wie sich der Bremsweg ändert, wenn die Geschwindigkeit doppelt (dreimal) so groß wird.

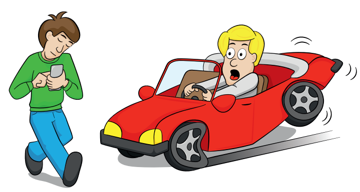
Quadratisches Wachstum

Bei **quadratischen Wachstumsprozessen** wächst bzw. fällt der abhängige Wert quadratisch. Der Graph ist ein Parabelast. Die allgemeine Funktionsgleichung lautet $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ **(a, b, c ∈ ℝ und a ≠ 0)**.

Weitere Beispiele für quadratische Wachstumsprozesse sind Weg-Zeit-Zusammenhänge bei beschleunigten Bewegungen, z. B. von Fahrzeugen oder auch der freie Fall.

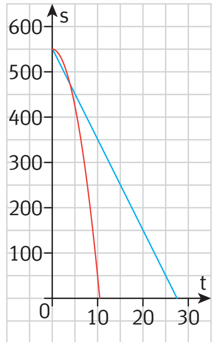
2 In der Realität hängt der Bremsweg vom Fahrbahnzustand ab. Für eine nasse Straße beträgt der Faktor a in der Funktionsgleichung von Aufgabe 1 0,0125.
a) Vermute, ob der Graph im Vergleich zu Aufgabe 1 steiler oder flacher verläuft.
b) Erstelle eine Wertetabelle für Geschwindigkeiten von 0 bis 80 $\frac{km}{h}$ in 10er-Schritten und berechne die neuen Bremswege. Zeichne den Graphen.
c) Bei einem Unfall auf der Autobahn stellt die Polizei durch die Bremsspur einen Bremsweg von 200 m fest. Der Autofahrer behauptet, sich an die Richtgeschwindigkeit von 130 $\frac{km}{h}$ gehalten zu haben. Überprüfe rechnerisch.

3 Die Reaktionszeit des Fahrers entscheidet mit darüber, wann ein Auto tatsächlich zum Stehen kommt. Der Anhalteweg setzt sich aus Brems- und Reaktionsweg zusammen und kann mit der Funktionsgleichung $s(v) = 0{,}01v^2 + 0{,}3v$ beschrieben werden.



a) Ermittle den zu erwartenden Bremsweg bei 30 $\frac{km}{h}$ (50 $\frac{km}{h}$).
b) Stelle den Sachverhalt grafisch dar.
c) Ein Auto fährt 40 $\frac{km}{h}$, der Fahrer sieht plötzlich ein anderes Auto und kann rechtzeitig abbremsen. Um wie viel vergrößert sich der Anhalteweg, wenn er 60 $\frac{km}{h}$ gefahren wäre?

Aufzug im Wolkenkratzer Shanghai Tower teilweise schneller als der freie Fall
Ein Aufzug fährt mit ca. 20 m/s aus ca. 550 m Höhe zum Boden. Damit ist man fast so schnell wie im freien Fall.



1 a) Ordne einem fallenden Stein und dem Aufzug die Graphen zu und stelle jeweils die Funktionsgleichung auf.
b) Lies ab, wann der Aufzug bzw. der fallende Stein am Boden ankommen. Überprüfe rechnerisch.
c) Bestimme, nach welcher Zeit sich der fallende Stein und der Aufzug auf gleicher Höhe befinden.
d) Welche Überlegungen hat der Autor des Artikels in seinem Modell nicht berücksichtigt? Korrigiere den Artikel.

Für die Höhe eines Gegenstands im freien Fall nach einer bestimmten Zeit t (in Sekunden) aus einer Höhe c gilt: $s(t) = -5t^2 + c$

2 Eine Sonde fällt aus 350 m Höhe auf den Mond. Ihre Höhe nach einer bestimmten Zeit in Sekunden kann durch die Funktion $s(t) = -0{,}8t^2 + 350$ beschrieben werden.

a) Erstelle eine Wertetabelle im Intervall $0 \le t \le 22$ in 2er-Schritten und zeichne den Graphen.
b) Lies ab, wann die Sonde ungefähr den Boden berührt.
c) Bei einer Höhe von 30 m zünden die Landedüsen. Dadurch wird die Geschwindigkeit reduziert. Berechne, nach wie vielen Sekunden das soweit sein wird.
d) Im Landeanflug halbiert sich die Höhe der Sonde mit jeder Sekunde. Gib den Wachstumsfaktor an, der diese Situation beschreibt.
e) Ergänze den Graphen für die Landephase im Koordinatensystem aus Aufgabe a). Erkläre, warum die Funktion die Landung nur grob beschreibt.

TRIMM-DICH-ZWISCHENRUNDE

1 Begründe, welche Tabelle lineares und welche exponentielles Wachstum beschreibt und vervollständige.

a)

x	0	1	2	3	4
y	2	10	50	■	■

b)

x	0	1	2	3	4
y	50	100	150	■	■

2 Eine Kaninchenpopulation wächst exponentiell. In einer Kleingartenkolonie in Berlin lebten im Januar 20 Kaninchen, einen Monat später sind es schon 23.

a) Bestimme den Wachstumsfaktor und stelle die Funktionsgleichung auf.
b) Erstelle eine Wertetabelle für das Intervall $0 \le x \le 12$. Runde geeignet und zeichne den Graphen.
c) Bei 100 Kaninchen gibt es nicht mehr genügend Nahrung. Gib an, wann das soweit ist.

3 Jedes Jahr sinkt die Laufzeit eines Handyakkus um 30 %. Zu Beginn hält der Akku 8 Stunden. Berechne, wie lange der Akku nach 4 Jahren noch durchhält.

Kapitalwachstum über mehrere Jahre berechnen

1 Sandra will in sechs Jahren mit den Fahrstunden beginnen. Einen Teil der Kosten bekommt sie von ihrer Oma geschenkt. Sie macht Sandra das Angebot, 1 000 € auf ein Sparkonto mit jährlichen Zinsen von 2 % zu legen. Sandra will wissen, wie viel Geld sie nach fünf Jahren besitzt.

Sandra

Guthaben nach 1 Jahr:

$1\,000 \cdot \frac{2}{100} + 1\,000$

$= 1000 \cdot 1{,}02 = 1\,020$ (€)

Guthaben nach 2 Jahren:

$1020 \cdot \ldots$

Florian

a) Überprüfe rechnerisch, ob beide dasselbe Ergebnis erhalten.
b) Ihr Opa macht ihr noch ein anderes Angebot: „Ich zahle fünf Jahre lang jeden Monat 15 € in das Sparschwein.“ Wie soll sich Sandra entscheiden?

Kapitalwachstum
Zinseszins

Zinseszins: Wird Geld länger als ein Jahr angelegt, werden die Zinsen mit verzinst.
p.a. = per anno = pro Jahr

Beim **Kapitalwachstum mit Zinseszins** handelt es sich um exponentielles Wachstum. Für ein Endkapital nach n Jahren K_n gilt:

$K_n = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$ K_0: Startkapital; p %: Zinssatz

Startkapital: 100 € Zinssatz: 1,25 % Laufzeit: 4 Jahre

Endkapital nach 4 Jahren: $K_4 = 100 \cdot (1 + \frac{1{,}25}{100})^4 = 100 \cdot 1{,}0125^4 \approx 105{,}09$ (€)

2 Vergleiche die Angaben und berechne, bei welcher Geldanlage das Kapital am Ende der Laufzeit am größten ist.

a)	b)	c)
$K_0 = 4\,000$ €	$K_0 = 1\,250$ €	$K_0 = 100$ €
p % = 1,12 %	p % = 1,25 %	p % = 8 %
n = 5 Jahre	n = 8 Jahre	n = 50 Jahre

3 Philipp braucht eine neue Küche für 5 000 €. Sein Anlageberater und Bekannter Herr Link stellt ihm zwei Angebote vor.
a) Berechne, ob Herr Link ein faires Angebot macht.
b) Philipp denkt nach: „Ich leihe das Geld privat und zahle erst drei Jahre 2 % Zinsen, dann zwei Jahre 6 %!“
Überlege, ob das eine gute Idee ist.

4 Richtig oder falsch? Begründe.
a) Wird die Laufzeit verdoppelt, verdoppelt sich auch das Endkapital.
b) Wird das Anfangskapital verdoppelt, verdoppelt sich auch das Endkapital.
c) Wird der Zinssatz verdoppelt, verdoppelt sich auch das Endkapital.

	Startkapital	1	…	9	10
Guthaben nach n Jahren	■	■		≈ 23 529 €	24 000 €
Zinsfaktor			: 1,02	: 1,02	

1 Eva möchte sich in 10 Jahren ein Tiny House für 24 000 € kaufen. Sie spekuliert darauf, dass ihr Aktien 2 % jährliche Rendite bringen. Welchen Betrag muss sie anlegen, damit sie auf diese Summe kommt?

a) Übertrage die Tabelle und berechne die fehlenden Beträge. Runde geeignet.

b) Wie würde sich das Startkapital ändern, wenn sie eine jährliche Rendite von nur 1 % bekommt?

Rendite: Ertrag, den ein Kapital in einem bestimmten Zeitraum erbringt

2 Sümeya findet ein Sparbuch, das sie zur Hochzeit vor zwölf Jahren geschenkt bekommen hat. Der gleichbleibende Zinssatz betrug 3 %. Das Sparbuch weist ein Guthaben von 499 € auf.

a) Wie hoch war der Geldbetrag, den Sümeya zur Hochzeit bekam?

b) 2020 bekommt man maximal 1 % Zinsen. Wie viel Geld hätte sie bei diesem Zinssatz bekommen müssen, um auf 499 € zu kommen?

3 Alexander, Emirhan und Ngan legen ihr Geld an. Jeder meint, er hätte das beste Angebot von der Bank erhalten.

Emirhan		Alexander		Ngan	
Startkapital:	200 €	Startkapital:	10 000 €	Startkapital:	5 600 €
Laufzeit:	2 Jahre	Laufzeit:	3 Jahre	Laufzeit:	20 Jahre
Endkapital:	208,08 €	Endkapital:	10 534 €	Endkapital:	8 321,31 €

a) Emirhan berechnet seinen Zinssatz. Übertrage die Rechnung und vervollständige sie.

b) Berechne die Zinssätze für Alexander und Ngan genauso. Runde geeignet. Wer hat das beste Angebot erhalten?

$$\begin{array}{rcll} 208{,}08 & = & 200 \cdot a^2 & \mid :200 \\ 1{,}0404 & = & a^2 & \mid \sqrt{\ } \\ ■ & = & a & \\ p\,\% & = & ■ & \end{array}$$

$a = 1 + \frac{p}{100}$

4 Übertrage und vervollständige die Tabelle. Runde geeignet.

	a)	b)	c)	d)
Startkapital K_0	3 000 €	■	2 000 €	12 000 €
Zinssatz p %	1,25 %	0,75 %	■	■
Laufzeit n in Jahren	6	8	4	7
Endkapital K_n	■	10 000 €	2 122 €	12 426 €

5 Der englische Philosoph R. Price hat 1772 vorgerechnet, welches Kapital Josef von Nazareth erhalten hätte, wenn er zur Geburt von Jesus Christus einen Cent zu 5 % Zinsen angelegt hätte.

a) Berechne das Kapital zum Ende des Jahres 1772 (des aktuellen Jahres).

b) Nach wie vielen Jahren hätte er die erste Million gehabt, wann die erste Milliarde? Probiere systematisch.

Exponentielle Gleichungen lösen

Ich habe schon viele Zahlen ausprobiert, das dauert ja ewig … Kann man das nicht schneller rechnen?

1 Emre gewinnt in einer Quizshow 12 500 €, die er bei einer Bank mit einem Zinssatz von 1,3 % anlegt. Finde heraus, wie viele Jahre er brauchen wird, um …

sein Geld zu verdoppeln.

15 000 € auf seinem Konto zu haben.

sich seine Traumvilla für 1 Mio. € kaufen zu können.

Exponentielle
Gleichungen
Logarithmus

Eine Gleichung $a^x = b$, bei der die Variable im Exponenten auftritt, nennt man **Exponentialgleichung** oder **exponentielle Gleichung**. Den Exponenten bestimmt man durch **Logarithmieren**.

Exponent, Potenzwert, Basis: $a^x = b$ $\quad$ $\log_a b = x$

Exponent, Potenzwert, Basis: $5^3 = 125$ $\quad$ $\log_5 125 = 3$

„Der Logarithmus von b zur Basis a ist x."

„Der Logarithmus von 125 zur Basis 5 ist 3."

$2^x = 7000 \quad | \log_2$
$x = \log_2 7000$
$x = \log 7000 : \log 2 \approx 12{,}773$

„Logarithmus von 7 000 zur Basis 2"
Probe: $2^{12{,}773} \approx 7000$

$a^x = b$
$a = \sqrt[x]{b} \longleftrightarrow x = \log_a b$

Taschenrechner:
$\log_a b$
= $\boxed{\log}\,\boxed{b} : \boxed{\log}\,\boxed{a}$
Wie rechnet dein Taschenrechner?

2 Stelle jeweils eine Gleichung auf, womit die Anzahl der Jahre aus Aufgabe 1 bestimmt werden kann und löse.

3 Bestimme den Logarithmus. Überprüfe die Lösung durch Potenzieren.

a) $\log_2 512$ b) $\log_2 4096$ c) $\log_2 0{,}25$ d) $\log_2 \frac{1}{64}$ e) $\log_2 \frac{1}{128}$

f) $\log_3 243$ g) $\log_3 729$ h) $\log_3 \frac{1}{9}$ i) $\log_3 \frac{1}{27}$ j) $\log_3 \frac{1}{81}$

4 Löse die Gleichungen mithilfe des Logarithmus. Runde sinnvoll.

a) $2048 = 2^x$ b) $81 = 3^x$ c) $0{,}125 = 0{,}5^x$
d) $1500 = 3 \cdot 1{,}2^x$ e) $790 = 2500 \cdot 0{,}8^x$ f) $0{,}5 = 8 \cdot 0{,}25^x$

5 Caro möchte als Influencerin Geld verdienen. Dazu braucht sie viele Follower. Nach einer Woche hat sie 127 Follower und sie rechnet mit einem Zuwachs von 23 % pro Woche.

a) Berechne, wann Caro den Status „Amateur", „Semi-Pro", „Influencer" und „It-Girl" erreicht hat.
b) Hältst du Caros Einschätzung für realistisch? Begründe deine Antwort.

Status	Anzahl Follower
Anfänger	50 Follower
Amateur	300 Follower
Semi-Pro	15 000 Follower
Influencer	250 000 Follower
It-Girl	1 Mio. Follower

1 Cholerabakterien kommen vor allem in verunreinigtem Trinkwasser vor. In zwei Petrischalen wird die Entwicklung der Anzahl der Bakterien untersucht. Einer Schale wurden Antibiotika hinzugegeben.

Cholerabakterien ohne Antibiotika

Zeit (min)	Anzahl Bakterien
0	80
30	160
60	320
90	■
■	■

Cholerabakterien mit Antibiotika

Zeit (min)	Anzahl Bakterien
0	80
20	40
40	20
■	10
■	■

a) Beschreibe, wie sich Cholerabakterien mit und ohne Hinzugabe von Antibiotika entwickeln. Vervollständige die Wertetabellen.
b) Veranschauliche beide Vorgänge in einem Koordinatensystem.
c) Stelle für beide Wachstumsprozesse die Funktionsgleichungen auf.
d) Vervollständige die nebenstehende Rechnung. Gib die Bedeutung der Variablen x an.
e) Berechne, wie viele Bakterien nach 5 h (6 h 15 min) in der Kultur ohne Antibiotika leben.

Nach welcher Zeit leben über 10 000 Bakterien in der Kultur ohne Antibiotika?

$10\,000 = 80 \cdot 2^x$

$125 = 2^x$

$x = \frac{\log 125}{\log 2} \approx$ ■

=> ungefähre Zeitspanne: ■ $\cdot$ 30 min = ■

Die Zeitspanne, in der ein Wert bei exponentiellem Wachstum verdoppelt wird, heißt Verdopplungszeit.

Die Zeit, in der ein Wert bei exponentiellem Wachstum halbiert wird, heißt Halbwertszeit.

2 In einem Tiramisu sind rohe Eier verarbeitet. Diese enthalten Salmonellen. Bei sommerlichen Temperaturen verdoppelt sich die Anzahl der Salmonellen innerhalb von 20 Minuten. Für einen gesunden erwachsenen Menschen liegt die minimale Infektionsdosis bei 10 000 Keimen.
a) Zu Beginn enthält das Tiramisu 50 Salmonellen. Stelle eine Funktionsgleichung auf, die die Vermehrung der Salmonellen beschreibt.
b) Berechne, wann das Tiramisu spätestens ungenießbar geworden ist, wenn es um 12:00 Uhr aus dem Kühlschrank genommen wird. Bewerte die Lösung.

3 In einem Labor lagern je 180 mg Schwefel 37, Strontium 90 und Plutonium 239.
a) Gib für den Zerfall der Isotope die Funktionsgleichung an.
b) Berechne, nach welcher Zeit von jedem Isotop nur noch 11,25 mg vorhanden sind.

Isotop	Halbwertszeit
Schwefel 37	5 Minuten
Plutonium 239	24 100 Jahre
Uran 235	704 Mio. Jahre
Strontium 90	28,5 Jahre

4 Atommüll besteht aus radioaktiven Stoffen, die nicht mehr genutzt werden. Zu hochradioaktivem Atommüll gehört z. B. Uran 235. Berechne, nach wie vielen Jahren noch 10 % (5 %; 1 %) einer zu einem bestimmten Zeitpunkt ermittelten Masse von Uran 235 übrig sind.

Wachstumsprozesse wiederholen

Wachstumsrate und Wachstumsfaktor

Wachstumsraten und -faktoren bestimmen
S. 128 f.

Die Wachstumsrate p % beschreibt ein Wachstum in Prozentschreibweise:

$$p\,\% = \frac{\text{neuer Wert} - \text{alter Wert}}{\text{alter Wert}}$$

Der Wachstumsfaktor q gibt an, mit welchem Faktor der alte Wert multipliziert werden muss, um den neuen zu erhalten: neuer Wert = q · alter Wert

$$q = 1 \pm p\,\% = 1 \pm \frac{p}{100}$$

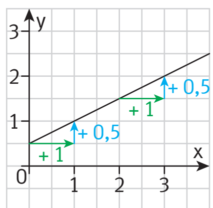
Herr Ahl bekommt 1250 € Rente. Nach der diesjährigen Rentenerhöhung erhält er 1300 €. Die Rentenerhöhung beträgt 4 %.

$p\,\% = \frac{1300 - 1250}{1250} = 0{,}04 = \frac{4}{100} = 4\,\%$ $\qquad q = 1 + 4\,\% = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$

Lineare und exponentielle Wachstumsprozesse

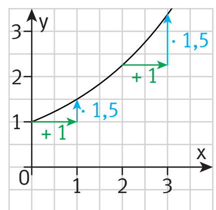
Wachstumsprozesse unterscheiden und berechnen
S. 130 ff.

Bei linearem Wachstum nehmen die Werte in gleichen Zeiträumen um den gleichen Summanden m zu.



n: Startwert
m > 0: Zunahme $\quad$ m < 0: Abnahme
Funktionsgleichung: $f(x) = m \cdot x + n$

Bei exponentiellem Wachstum werden die Werte in gleichen Zeiträumen mit dem gleichen Faktor q = a vervielfacht.



c: Startwert
a > 1 Zunahme $\quad$ 0 < a < 1: Abnahme
Funktionsgleichung: $f(x) = c \cdot a^x$

Eine Rente (1 250 €) wird jährlich um 27 € (um 5,5 %) erhöht.
Nach fünf Jahren beträgt dann die Höhe der Rente jeweils:
$f(5) = 1\,250 + 5 \cdot 27 = 1385$ (€) $\qquad f(5) = 1\,250 \cdot 1{,}055^5 \approx 1\,633{,}70$ (€)

Kapitalwachstum

Kapitalwachstum über mehrere Jahre berechnen
S. 138

Beim Kapitalwachstum mit Zinseszins handelt es sich um exponentielles Wachstum mit $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

K_n: Endkapital nach n Jahren
K_0: Startkapital
p %: Zinssatz

Exponentielle Gleichungen

Er-Wissen: Exponentielle Gleichungen lösen
S. 140

Eine Gleichung $a^x = b$ nennt man exponentielle Gleichung. Den Exponenten bestimmt man durch Logarithmieren.

$$a^x = b$$
$$a = \sqrt[x]{b} \longleftrightarrow x = \log_a b$$

Die Rente von Frau Frau Öztürk beträgt heute 1 261,27 €. Zum Renteneintritt erhielt sie 895 €. Die Erhöhung beträgt jährlich im Schnitt 2,9 %. Vor wie vielen Jahren wurde sie Rentnerin?

$$895 \cdot 1{,}029^x = 1261{,}27$$
$$1{,}029^x \approx 1{,}41$$
$$x = \log_{1{,}029} 1{,}41$$
$$x = \frac{\log 1{,}41}{\log 1{,}029} \approx 12 \text{ (Jahre)}$$

Aufgaben zur Differenzierung

Basis-Aufgaben | **Vertiefende Aufgaben**

1 Übertrage und vervollständige die Wertetabellen so, dass folgende Wachstumsarten vorliegen.

Basis-Aufgaben

a) lineares Wachstum

x	0	1	2	3	4
f(x)	■	■	4	6	■

b) exponentielles Wachstum mit $f(x) = a^x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	1	2	■	■	■

Vertiefende Aufgaben

a) lineares Wachstum

x	0	1	2	3	4
f(x)	■	■	1,0	■	1,6

b) exponentielles Wachstum mit $f(x) = a^x$

x	0	1	2	3	4
f(x)	■	■	144	■	■

2 In einer medizinischen Probe werden Keime festgestellt, deren Anzahl sich stündlich halbiert. Der Vorgang kann mit der Funktionsgleichung $f(x) = 1\,000 \cdot 0{,}5^x$ beschrieben werden.

a) Wie viele Keime waren zu Beginn vorhanden?
b) Gib an, wofür die Variable x steht.
c) Berechne die Anzahl der Keime in einer Wertetabelle für $0 \le x \le 6$.
d) Stelle die Entwicklung grafisch dar.
e) Lies ab, wann ungefähr noch 100 Keime vorhanden sind.

Eine Patientin nimmt einmalig eine Menge von 15 mg eines Medikaments zu sich. Im Körper wird im Laufe eines Tages ein Viertel des Medikaments abgebaut.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf.
b) Erstelle eine Wertetabelle für das Intervall $0 \le x \le 6$.
c) Stelle die Entwicklung grafisch dar.
d) Lies ab, wann nur noch ein Drittel des Medikaments im Körper nachzuweisen ist.
e) Nach welcher Zeitspanne ist das Medikament vollständig abgebaut? Begründe.

3

	Deutschland	Ukraine	Sudan	Niger
2016	82,52	42,42	39,58	20,67
2017	82,79	42,35	40,53	21,48

a) Die Tabelle zeigt Bevölkerungszahlen (in Mio.). Welches Land hat das größte Bevölkerungswachstum? Bestimme jeweils die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor.

b) Erstelle eine Prognose für die Bevölkerungszahl der Länder bei gleichbleibender Wachstumsrate nach 5 (10) Jahren.

b) Berechne mithilfe von Aufgabe a) die Einwohnerzahlen für das Jahr 2015 (2014).
c) Finde heraus, wann im Sudan mehr Menschen als in der Ukraine leben werden.

4 a) Stelle für die ersten vier Jahre die Formel für die Berechnung des Kapitals auf.
b) Violetta hat 2 200 €. Berechne, ob sie sich nach vier Jahren einen Motorroller für 2 300 € kaufen kann.

Super-Sparbrief:
⇒ 1 % Zinsen p.a. für 4 Jahre
⇒ danach jährlich 0,25 % Zinsen

a) Oyan legt 4 150 € für 5 Jahre an. Berechne die Zinsen und das Endkapital.
b) Ibo meint: „Dann bekommt er im letzten Jahr nur ein Viertel der Zinsen wie in den vorangegangenen.“ Bewerte diese Aussage.

1 Bestimme jeweils die Wachstumsrate und den Wachstumsfaktor.

a) Raissa beginnt ihre Ausbildung als Polizistin. Im ersten Jahr verdient sie 1 255 €, im zweiten 1 658 €.

b) Die Zahl der Verkehrsunfälle mit Fahrrädern in Berlin nahm im letzten Jahr von 7 971 auf 6 590 ab.

2 In einem Fernsehquiz werden einem Kandidaten maximal 10 Fragen gestellt. Man kann zwischen zwei Optionen wählen. Bei einer falschen Antwort geht jeweils der ganze Gewinn verloren.

① Die Kandidat hat 100 € Startguthaben. Jede richtige Antwort verdoppelt das Guthaben.

② Jede richtige Antwort bringt 500 €.

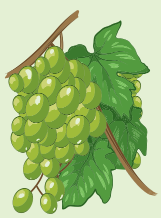
a) Beschreibe das jeweilige Wachstum.

b) Berechne jeweils das Guthaben für eine bis zehn richtige Antworten.

c) Stelle beide Optionen grafisch dar und entscheide, ab welcher Antwort eine Option günstiger als die andere ist.

d) Wie würdest du dich entscheiden? Begründe.

3 Untersuche die Art des Wachstums. Gib ggf. den Summanden oder den Wachstumsfaktor und die Wachstumsrate an.



Tomaten	
Tage	cm
0	2
1	2,5
2	3
3	3,5

Wein	
Tage	cm
0	4,5
1	5,4
2	6,48
3	7,78

Wildrose	
Tage	cm
0	10
1	10,5
2	11,5
3	12,1

4 a) Gib jeweils die Funktionsgleichung an.

b) Erstelle dazu eine Wertetabelle im Intervall $0 \le x \le 10$.

c) Zeichne jeweils den Graphen in einem geeigneten Ausschnitt.

① Ebru kauft einen Oldtimer für 45 000 €. Der Wert steigt jährlich um 7 %.

② Sabine hat schon 45 € gespart. Jeden Monat kommen 12,50 € dazu.

③ Kim nimmt 20 mg eines Medikaments. Täglich werden im Körper 10 % abgebaut.

④ Der Tank eines Autos enthält 50 l Benzin, pro 100 km werden 6 l verbraucht.

5 Tim sitzt täglich 8 Stunden am Smartphone. Um seine Noten zu verbessern, will er jede Woche 10 % weniger Zeit für die Nutzung aufbringen.

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf.

b) Erstelle eine Wertetabelle für $0 \le x \le 10$ und zeichne den Graphen.

c) Berechne, wie viel Zeit Tim nach 3 Monaten am Smartphone verbringt.

d) Lies ab, wann sich die Nutzungsdauer im Vergleich zu Beginn halbiert hat.

e) Finde heraus, wann Tim unter einer Stunde täglich am Smartphone sitzt.

6 Zu Beginn einer Grippewelle wurden 144 800 Erkrankte von den Arztpraxen gemeldet; die durchschnittliche Infektionsrate pro Woche betrug 3,9 %. Zu Beginn der 7. Woche nahm die Zahl der Erkrankten langsam wieder ab.

a) Berechne die Anzahl der Erkrankten für die ersten sechs Wochen.

b) Berechne, wie viel Prozent der Berliner zum Ende der sechsten Woche Grippe hatten (Einwohnerzahl Berlin: 3,75 Mio.).

c) Berechne die Anzahl der Erkrankten eine Woche vor Beginn der Grippewelle.

7 Kayas Opa hat zu seiner Geburt 8000 € auf einem Konto angelegt, das damals eine jährliche Verzinsung von 1,8 % hatte.
a) Berechne den Kontostand zu Kayas 10. (12., 16.) Geburtstag.
b) Der 18-jährige Kaya möchte ein Jahr im Ausland studieren. Die Kosten betragen 12000 €. Finde heraus, wann er diesen Betrag angespart hat.

8 Der 2 km^2 große Wannsee ist ein beliebter Ausflugsort. Eine Algenart bereitet jedoch Sorge: Sie bedeckt im Frühjahr eine Fläche von 1,5 m^2, die sich bei günstigen Bedingungen jede Woche verdoppelt.

a) Berechne die Größe der Fläche nach 5 (7; 10) Wochen.
b) Wenn die Algen ein $\frac{1}{16}$ der Fläche des Sees bedecken, muss eine Algensperre am Zufluss eingebaut werden. Schätze ab, wann das der Fall ist und überprüfe den Wert rechnerisch.

9 Im März 2018 startete die Youtuberin BeaBeauty mit ihrem neuen Beauty-Kanal und hatte sofort 50 Abonnenten. Monatlich rechnet sie mit einen Zuwachs von 7 %.
a) Berechne, wie viele Abonnenten BeaBeauty nach zwei Jahren hat.
b) Bea möchte 500 Abonnenten haben. Finde heraus, wann das soweit sein wird.
c) Nach welcher Zeit hätte Bea 500 Abonnenten, wenn die Zahl monatlich nur um 4 % (sogar um 9 %) wachsen würde?
d) Ein Kanal, der nur Tipps für Makeup gibt, hatte im März 2018 noch 100 Abonnenten. Monatlich melden sich durchschnittlich 3 Personen ab, während Beas Kanal um 7 % monatlich wächst. Bestimme grafisch, wann beide Kanäle ungefähr gleich viele Abonnenten haben.

10 Ein Freibad verzeichnet seit einigen Jahren Besucherrückgänge. 2019 besuchten 53 500 Gäste das Bad, 2020 kamen nur noch 51 895 Personen

a) Bestimme Wachstumsrate und -faktor.
b) Berechne die Besucherzahlen bei gleichbleibender Abnahme:
1 für 2018 (2015)
2 für 2022 (2025)
c) Wenn die Jahreseinnahmen durch Eintrittspreise (Erwachsene: 5,50 €) weniger als 200 000 € betragen, ist das Bad nicht mehr rentabel und muss geschlossen werden. Wann könnte das soweit sein? Beurteile deine Lösung.

11 Berechne fehlende Größen. Runde geeignet.

	K_0 (€)	n (Jahre)	p %	K_n (€)
a)	10 120	12	0,6 %	■
b)	■	3	0,35 %	4 294,78
c)	750	1	■	758,25
d)	500	6	■	527,61
e)	2 222	■	0,5 %	2 324,01

12 Bestimme die fehlende Größe.
a) $\log_a 9 = 2$
b) $\log_a 64 = 3$
c) $\log_a 125 = 3$
d) $\log_a 81 = 2$
e) $\log_5 b = 3$
f) $\log_2 b = 4$

13 In einem Salat mit Mayonnaise befinden sich zu Beginn 30 Salmonellen. Bei 21 °C verdoppelt sich deren Anzahl innerhalb von 1,5 Stunden.

a) Berechne, wie viele Salmonellen nach 2 (3; 4) Stunden im Salat vorhanden sind.
b) Berechne, nach welcher Zeit der Salat nicht mehr verspeist werden sollte. Die minimale Infektionsdosis bei einem erwachsenen Menschen beträgt 10 000 Salmonellen.

Er

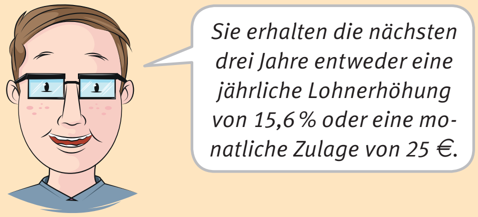
1 Übertrage und ergänze die Tabelle zweimal, so dass einmal lineares und einmal exponentielles Wachstum vorliegt. Gib die Funktionsgleichungen an.

x	1	2	3	4	5
f(x)	10	50	■	■	■

2 Begründe mithilfe von Wachstumsfaktor und -rate, ob es sich um exponentielles Wachsen oder Abnehmen handelt. Gib auch den Startwert an.

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot 2^x$ b) $f(x) = -2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$ c) $f(x) = 1\,000 \cdot 0{,}25^x$

3 Nach ihrer Ausbildung erhält Mursel ein monatliches Gehalt von 1 820 €. Welches Angebots ihres Arbeitgebers sollte sie annehmen? Begründe rechnerisch.



4 Ein Zahnrad aus Stahl wird bei der Bearbeitung auf 850 °C erhitzt. Die Temperatur nimmt pro Stunde um 15 % ab.

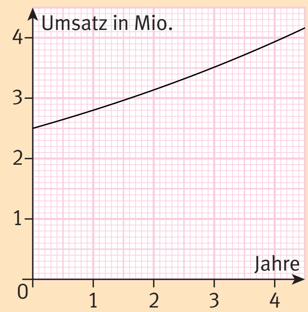
a) Stelle die Funktionsgleichung auf.

b) Zeichne mithilfe einer Wertetabelle den Graphen im Intervall $0 \le x \le 10$ und lies ab, wann die Temperatur 500 °C (300 °C) beträgt.

5 a) Ein Start-Up-Unternehmen behauptet, jährlich ein Umsatzwachstum von 12 % zu erzielen. Lies den Startwert und den Wert nach einem Jahr ab und überprüfe.

b) Stelle die Funktionsgleichung auf.

c) Berechne den Umsatz des Unternehmens nach 5 Jahren und bewerte deine Lösung.



6 Anton wiegt 95 kg und will 20 kg abnehmen. Ein Fitness-Center verspricht bei regelmäßigem Training und Ernährungsumstellung, dass man monatlich 2 % des Gewichts verliert.

a) Berechne jeweils Antons Gewicht in den ersten vier Monaten des Programms.

b) Im fünften Monat pausiert Anton, weil er für die Abschlussprüfung lernen muss. Er nimmt wieder 2 kg zu. Finde heraus, wie lange Anton nun noch durchhalten muss, um sein Wunschgewicht zu erreichen.

Er

7 Familie Yilmaz findet in ihrem Keller eine Fläche von 2 m², die von Schimmel befallen ist. Täglich vergrößert sie sich um ein Fünftel. Berechne, nach wie vielen Tagen der Schimmelpilz die gesamte Wand (6 m²) bedecken wird.

8 Das radioaktive Isotop Cobalt 60 hat eine Halbwertszeit von ca. 5 Jahren.

a) Berechne, wie viel Masse von 80 g Cobalt 60 nach 10 (12) Jahren noch vorhanden ist. Wie viel Prozent der ursprünglichen Masse ist das jeweils?

b) Nach wie vielen Jahren sind noch 50 g vorhanden?

FORMEL 10

Mathematik

Herausgegeben von Martina Liebchen

Bearbeitet von Andreas Dau, Grit Ehlert, Tobias Herz, Ricardo John, Daniel Kleinen, Kerstin Landsberg, Martina Liebchen, Jennifer Prechter, Martin Schmidt, Yannick Schreyer, Elke Skrip, Torsten Studier und Andreas Whyte

Bildnachweis:
ī 2018 IW Medien · iwd 5 – S. 122; AdobeStock / Ffolas – S. 118; - / lowphoto – S. 139; - / shooterg03 – S. 121; - / Zerbor – S. 123; Getty Images Plus / iStock Editorial, imagemanufaktur – S. 124; - / iStock Editorial, JJFarquitectos – S. 132; - / iStockphoto, Abykov – S. 145; - / iStock-photo, AlexLMX – S. 128; - / iStockphoto, amadeusamse – S. 125; - / iStockphoto, AntiMartina – S. 136; - / iStockphoto, AntonioGuillem – S. 124; - / iStockphoto, AVTG – S. 134; - / iStockphoto, Balde_kostas – S. 132; - / iStockphoto, BrianAJackson – S. 124; - / iStockphoto, ChamilleWhite – S. 118; - / iStockphoto, ciupaciups – S. 118; - / iStockphoto, CreativeNature_nl – S. 137; - / iStock-photo, Dr_Microbe – S. 141; - / iStockphoto, EEI_Tony – S. 125; - / iStockphoto, Eivaisla – S. 133; - / iStockphoto, FlamingoImages – S. 121; - / iStockphoto, Friday909 – S. 135; - / iStockphoto, gkr-photo – S. 145; - / iStockphoto, industryview – S. 124; - / iStockphoto, Alina Kulbasnaia – S. 124; - / iStockphoto, leaf – S. 124; - / iStockphoto, LightFieldStudios – S. 136; - / iStockphoto, Little_Things – S. 125; - / iStockphoto, LSOphoto – S. 124; - / iStockphoto, Richard Meissner – S. 145; - / iStockphoto, MoustacheGirl – S. 134; - / Nenov – S. 118; - / iStockphoto, RuthBlack – S. 118; - / iStockphoto, sarayut – S. 135; - / Getty Images Plus / iStockphoto, starush – S. 146; - / iStock-photo, tomlelouch – S. 137; - / iStockphoto, Vladimiroquai – S. 133; - / iStockphoto, worldofstock – S. 144; iStockphoto / Imo – S. 118; Uwe Kraft Fotografie, Düsseldorf – Cover; Mauritius Images / Alamy Stock Photo, Julie g Woodhouse – S. 122; Gerd-Rudolf Neumann, Berlin – S. 117 (4); Pixabay / RitaE – S. 125; Statista GmbH, Hamburg – S. 117; www.wikimedia.org – S. 135

Bitte beachten: An keiner Stelle im Schülerbuch dürfen Eintragungen vorgenommen werden. Das gilt besonders für die Lösungswörter und die Leerstellen in Aufgaben und Tabellen.

Dieses Werk folgt der reformierten Rechtschreibung und Zeichensetzung. Ausnahmen bilden Texte, bei denen künstlerische und lizenzrechtliche Gründe einer Änderung entgegenstehen.

Teildruck
2. Auflage, 1. Druck 2020
Alle Drucke dieser Auflage sind, weil untereinander unverändert, nebeneinander benutzbar.

www.ccbuchner.de

Redaktion: Sonja Krause
Grafische Gestaltung: ARTBOX Grafik und Satz GmbH, Bremen
Illustrationen: Nils Sprenger, psstundpeng.de, Bremen

ISBN der vollständigen Auflage 978-3-661-**60040**-6

C.C.BUCHNER T60040