

1 Potenzen und Potenzfunktionen

EINSTIEG

Die Auftaktseite eines Kapitels enthält zwei verschiedene Elemente: Zunächst werden die Schüler mit einem offenen Einstiegsbeispiel an das neue Kapitel herangeführt. Zentral ist dabei immer der Anwendungsbezug: Kein Lehrplaninhalt ist rein innermathematisch, sodass den Schülern von Beginn an gezeigt werden sollte, dass Mathematik nichts Abstraktes ist, sondern oft im Leben der Schüler vorkommt. In einem Unterrichtsgespräch zur Auftaktseite können viele der kommenden Lerninhalte schon heuristisch erarbeitet, Vermutungen geäußert und Zusammenhänge erschlossen werden.

KX

- **Funktionen bzw. deren Graphen begegnen dir in vielen Bereichen des Lebens: in der Natur, in technischen Bereichen und sogar bei vielen Freizeitaktivitäten. Besonders häufig sieht man Geraden und Parabeln, also die Graphen linearer und quadratischer Funktionen. Finde Beispiele.**

Lösungsmöglichkeit:

lineare Funktionen: Start eines Flugzeugs, ...

quadratische Funktionen: Torbogen, Brücke, Flugkurve eines Balles, ...

KX

- **Findest du in den Bildern weitere bekannte Funktionen wieder?**

Hyperbeln als Graphen von Potenzfunktionen mit negativen, ganzzahligen Exponenten

Exponentialfunktionen, Potenzfunktionen

Sinus- und Kosinusfunktion

Potenzfunktionen

AUSBLICK

Die Aufzählung am Ende der Seite bietet einen Ausblick auf die wesentlichen Lernziele des Kapitels und schafft so eine hohe Transparenz für Schüler und Lehrer. Durch einen informierenden Unterrichtseinstieg können sich Schüler und Lehrer auf das Kommende einstellen. Idealerweise wird im Unterricht der Bezug hergestellt zwischen der Einstiegssituation und den im Ausblick angegebenen Lernzielen.

KAPITEL 1

VERSTÄNDNIS

- K6** ■ $4 \cdot 6$ beschreibt ein Produkt aus den Zahlen 4 und 6 mit dem Ergebnis 24.
 6^4 beschreibt die vierte Potenz der Zahl 6, also den Term $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.
- K1** ■ Nach den Rechengesetzen für Potenzen mit gleichen Basen gilt: $a^m \cdot a^m = a^{m+m} = a^{2m}$.
 Nach den Rechengesetzen für Potenzen mit gleichen Exponenten und dem Potenzieren von Potenzen gilt aber auch: $a^m \cdot a^m = (a \cdot a)^m = (a^2)^m = a^{2m}$.
 Beide Aussagen sind also richtig und es gilt: $a^{2m} = (a \cdot a)^m = a^m \cdot a^m$.

- K5** 1 a) $2,43 \cdot 10^{10}$ b) $6,7 \cdot 10^{14}$ c) 10^7 d) $4,7 \cdot 10^{-11}$
 e) $2,00412 \cdot 10^{-5}$ f) $6,1 \cdot 10^{-8}$ g) $5 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 0,5 \mu\text{m}$

- K5** 2 a) 34 500 b) 4 350 000 000 000 c) 80 900 000
 d) 0,0902 e) 0,00000000188 f) 0,00000000006025
 g) 80 700 000 Menschen h) 0,000000075 cm

- K4** 3 a) $4,0817341 \cdot 10^{-6}$ b) 3 121 428,273 c) $1,2091 \cdot 10^{12}$

- K3** 4 a) $10^{12} \text{ Byte} = 10^9 \text{ kB} = 10^6 \text{ MB} = 10^3 \text{ GB} = 1 \text{ TB}$
 oder: $1 \text{ Byte} = 10^{-3} \text{ kB} = 10^{-6} \text{ MB} = 10^{-9} \text{ GB} = 10^{-12} \text{ TB}$
 b) DVD: 8,5 GB USB-Stick: 32 GB Festplatte: 1,5 TB = 1500 GB
 Die Speicherkapazität des USB-Sticks ist fast vier mal so groß wie die der DVD und die Festplatte hat etwa die 46-fache Speicherkapazität des USB-Sticks.
 c) Es gilt: $12,5 \text{ GB} \cdot 225 = 2812,5 \text{ GB} \approx 2,8 \text{ TB} > 2 \text{ TB}$
 Eine 2 TB-Platte reicht nicht.
 d) $16 \text{ GB} = 16\,000\,000 \text{ kB}$
 $\frac{16\,000\,000 \text{ kB}}{4 \text{ kB}} = 4\,000\,000$
 Auf einem USB-Stick mit 16 GB Speicherkapazität lassen sich rund 4 Millionen solcher Seiten speichern.
 e) $8,5 \text{ GB} = 8\,500\,000\,000 \text{ Byte}$
 $\frac{8\,500\,000\,000 \text{ Byte}}{175 \frac{\text{Byte}}{\text{min}}} \approx 48\,571\,429 \text{ min} \approx 92,41 \text{ Jahre}$
 Eine Schreibkraft würde etwa 92 Jahre und 5 Monate dafür brauchen.

- K5** 5 Die Ergebnisse sind teils gerundet.
 a) $2 \cdot 10^{-12}$ b) $9,54 \cdot 10^{-10}$ c) -64
 d) $3 \cdot 10^{-15}$ e) $2,32 \cdot 10^{-4}$ f) $-5,96 \cdot 10^8$
 g) $3,79 \cdot 10^9$ h) $5,57 \cdot 10^{-10}$ i) -79

- K5** 6 a) $16,2 \cdot \frac{10^8 \cdot 10^{-4}}{10^5} = 1,62 \cdot 10^{-1} = 1,62$ b) $16,2 \cdot 10^1 = 162$
 c) $16,2 \cdot 10^{-9} = 1,62 \cdot 10^{-8}$ d) $16,2 \cdot 10^0 = 16,2$
 e) $16,2 \cdot 10^{10} = 1,62 \cdot 10^{11}$ f) $16,2 \cdot 10^9$

- Kx** 7 a) a^6 b) x c) $0,6yz^2$ d) $36a^3b^5c^{-6}$ e) $3m^{-3}n^{-1}$
 f) $\left(\frac{(2x+b) \cdot (2x-b)}{2x+b}\right)^{3+n} = (2x-b)^{3+n}$ g) xy^{2a+2} h) $a^{-1}b^{-1}xy$

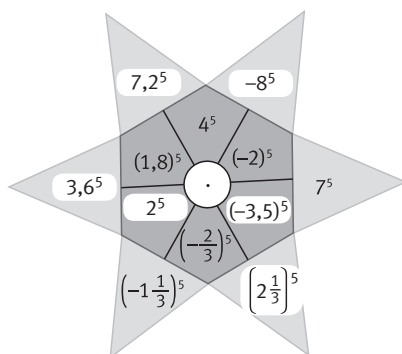
- K3** 8 a) Das Wasservolumen beträgt $800\,000\,000\text{ cm}^3$.
 b) $800\text{ m}^3 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \approx 2,52 \cdot 10^{10}\text{ m}^3$
 In einem Jahr würden etwa 25 Milliarden Kubikmeter Wasser durch den Rhein fließen.

- K5** 9 a) a^{12} b) x^{-2} c) b d) c^5 e) y^7 f) s^{11}
 g) $\left(\frac{w}{f}\right)^{23}$ h) b^{-20} i) $(ab)^3$ j) g^{15} k) e^{-12} l) h^{12}

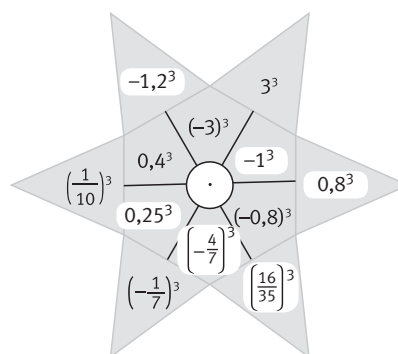
- K5** 10 a) $50^2 = 2500$ b) $2^2 = 4$ c) $6^2 = 36$ d) $4^3 = 64$
 e) $8^2 = 64$ f) $(-10)^4 = 10\,000$ g) $3^3 = 27$ h) $3^4 = 81$
 i) $1^8 = 1$ j) $\left(\frac{5}{2}\right)^1 = \frac{5}{2}$ k) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ l) $2^4 = 16$

- K5** 11 a) $(3,5 \cdot 4,1)^2 \approx 205,923$ b) $2,2^{11} \approx 5843,183$ c) $1,6^{-1} = 0,625$
 d) $\left(\frac{5,4}{6}\right)^3 \approx 0,729$ e) $8,3^{27} \approx 6,533 \cdot 10^{24}$ f) $(-2 \cdot 5)^4 = 10\,000$
 g) $2,05^{35} \approx 8,154 \cdot 10^{10}$ h) $8,3^4 \approx 4745,832$ i) $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)^8 = 6,561 \cdot 10^{-5}$
 j) $\frac{12}{7} \approx 1,714$ k) $\left(\frac{5}{8}\right)^2 \approx 0,391$ l) $\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{5}\right)^{11} = 2048$

- K5** 12 a)



- b)



- K5** 13 a) $a^2b^2c^2d^2$ b) $\frac{x \cdot y}{d^4e}$ c) $\frac{k^3}{g^2h \cdot l^2}$
 d) $\frac{a^2b}{c^4d^3}$ e) $\frac{m^{12}}{o^{14}p^{-22}} = \frac{m^{12} \cdot p^{22}}{o^{14}}$ f) $\frac{6a^n}{6a^n} = 1$

- K3** 14 a) $2,22 \cdot 10^{12}\text{ €}$

- b) Der Betrag, um den sich die Staatsverschuldung jährlich verringert, lässt sich wie folgt berechnen:
 $6\text{ €} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 = 189\,216\,000\text{ €}$
 Verschuldung Ende 2016: $(2\,218\,415\,926\,000 - 1 \cdot 189\,216\,000)\text{ €} = 2\,218\,226\,710\,000\text{ €}$
 Verschuldung Ende 2017: $(2\,218\,415\,926\,000 - 2 \cdot 189\,216\,000)\text{ €} = 2\,218\,037\,494\,000\text{ €}$
 Verschuldung Ende 2018: $(2\,218\,415\,926\,000 - 3 \cdot 189\,216\,000)\text{ €} = 2\,217\,848\,278\,000\text{ €}$
 ...
 c) $2\,218\,415\,926\,000 - n \cdot 189\,216\,000 = 0 \Leftrightarrow n \approx 11\,725$ (aufgerundet)
 Deutschland wäre theoretisch im Jahr 13740 schuldenfrei.

- Kx** 15 a) täglich: $12,6 \cdot 10^6 \cdot 1,5\text{ l} = 18,9 \cdot 10^6\text{ l} = 18\,900\,000\text{ l}$
 jährlich: $12,6 \cdot 10^6 \cdot 1,5\text{ l} \cdot 365 = 6,8985 \cdot 10^9\text{ l} = 6\,898\,500\,000\text{ l}$
 b) 1 Die Anzahl der Flaschen beträgt $\frac{6,8985 \cdot 10^9\text{ l}}{0,7} = 9,855 \cdot 10^9$
 2 Neben Wasser werden auch andere Getränke konsumiert, welche nicht in Flaschen abgefüllt werden müssen. Zudem benötigt man im Mehrwegsystem deutlich weniger Flaschen.

KAPITEL 1

- Kx** 16 Im Blut befinden sich $4000 \cdot 5 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{13}$ rote Blutkörperchen.
Für die Länge der Strecke gilt somit $l = 2 \cdot 10^{13} \cdot 7,5 \cdot 10^{-6} \text{m} = 1,5 \cdot 10^8 \text{m}$.
Die Anzahl der roten Blutkörperchen nebeneinander aufgereiht würde eine Länge von 150 000 Kilometern ergeben.
- K3** 17 a) $1,466 \cdot 10^8 \cdot 60 \text{kg} = 8,796 \cdot 10^9 \text{kg}$
Im Jahr 2014 wurden insgesamt rund $8,8 \cdot 10^6 \text{t}$ Kaffee geerntet.
b) $\frac{8,796 \cdot 10^9 \text{kg}}{7,1 \cdot 10^9} \approx 1,24 \text{kg}$
Für jeden Menschen wurden im Durchschnitt etwa 1240 g Kaffee geerntet.
- K3** 18 Für die Geschwindigkeit v und die Weglänge s kann mit Formel $t = \frac{s}{v}$ die Zeit t berechnet werden:
 $t = \frac{4,3 \cdot 10^5 \text{km}}{6300 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 68,3 \text{h}$
Der Asteroid würde auf direktem Weg zur Erde rund 68 Stunden brauchen.
- K2** 19 Bei einem jährlichen Rückgang um 20 % gilt für den Anteil x der Population in 20 Jahren:
 $x = 0,8^{20} \approx 0,01 = \frac{1}{100}$
Nach 20 Jahren ist also nur noch 1 % des Tierbestandes übrig.
- Kx** 20 Sabines Vorschlag entspricht der Notation $\frac{\left[\left(5^2\right)^2\right]^2}{5} = \frac{5^{16}}{5} = 5^{15}$.
Sabine hat somit Recht.
- Kx** 21 a) In den 10 Kartons befinden sich $10 \cdot 3^3 = 270$ Seifen.
b) Insgesamt hat die Drogerie $10 \cdot 3^2 = 90$ Geschenckpackungen. Nachdem sie 54 Packungen verkauft hat, bleiben noch 36 Packungen übrig.

VERSTÄNDNIS

- KX** ■ Für ein a , welches nicht Element der positiven reellen Zahlen ist, würde der Exponent $\frac{1}{n}$ das Ziehen der Wurzel aus einer negativen Zahl bedeuten. Im Bereich der reellen Zahlen ist dies nicht möglich.
- KX** ■ $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{m}} = x^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = x^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{x^{n+m}} = \sqrt[n \cdot m]{x^{m+n}}$

KX 1 $\sqrt[3]{75} \approx 4,22$ $\sqrt[5]{125} \approx 2,63$ $\sqrt[1,3]{175} \approx 53,14$ $\sqrt[6]{222} \approx 2,46$
 $\sqrt[3]{729} \approx 9,00$ $\sqrt[3]{125} \approx 16,24$ $\sqrt[25]{25} \approx 1,14$

KX 2 a) $x^{\frac{62}{45}} = \sqrt[45]{x^{62}}$ b) $y^{\left(\frac{-5}{12}\right)} = \sqrt[12]{y^{-5}}$ c) $6^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{6^{-1}}$ d) $m^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{m^7}$
 e) $\sqrt[5]{4^{-1}} \cdot \sqrt[5]{16}$ f) $1^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{1^3}$ g) $9^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{9^{-1}}$ h) $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3}$
 i) $4^{\frac{-2}{9}} = \sqrt[9]{4^{-2}}$ j) $c^1 = \sqrt[1]{c}$ k) $2^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[4]{a^5}$ l) $(2a)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2a}$

KX 3 a) a^4 b) $\left(x^{\frac{m}{a}}\right)^{an} = x^{mn}$ c) x^{-8m} d) $b^{\frac{-an}{m}} = \sqrt[m]{b^{-an}}$
 e) $n^{\frac{x}{nx}} = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$ f) $\left(x^{\frac{-0,3}{1,2}}\right)^8 = x^{\frac{-2,4}{1,2}} = x^{-2}$ g) $x^{\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{x^5}$ h) y
 i) $x^{\frac{181}{63}} = \sqrt[63]{x^{181}}$ j) $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$ k) $b^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{b^{11}}$ l) $a^{-\sqrt{2}}$
 m) $(32a \cdot b)^{\frac{-1}{4}} = \sqrt[4]{32ab^{-1}}$ n) $1^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1} = 1$ o) $a^{\frac{28}{9}} = \sqrt[9]{a^{28}}$
 p) $(2m^2n)^{\frac{1}{3}} \cdot (4mn^2)^{\frac{1}{3}} = (8m^3n^3)^{\frac{1}{3}} = 2mn$ q) $\sqrt[4]{a^4} = a$ r) $a^{\frac{-31}{4}} = \sqrt[4]{a^{-31}}$

KX 4 a) $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$ b) $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^5 = a$ c) $\left(y^{\frac{5}{2}}\right)^4 = 10$ d) $\left(2^{\frac{1}{a}}\right)^{2a} = 4$
 e) $\sqrt{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{4}}$ f) $\sqrt[5]{x^{\frac{5}{2}}} = x^{\frac{1}{2}}$ g) $\sqrt[3]{\left(ax^{12}\right)^{\frac{1}{4}}} = \left(ax^{12}\right)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{12}}x$
 h) $\sqrt{\left(a^6b^3\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(a^6b^3\right)^{\frac{1}{6}} = ab^{\frac{1}{2}}$

KX 5 R $2x^5 = 64$

$D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{2\}$

O $x^3 = 125$

$D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{5\}$

U $x^0 = 35$

$D = \mathbb{R}^+$ $L = \emptyset$

E $\frac{1}{3}x^4 = 27$

$D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{3\}$

O $x^3 - 125 = 0$

$D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{5\}$

R $x^{-3} = 0,125$

$D = \mathbb{R}^+$ $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

A $x^{-4} + 2 = 83$

$D = \mathbb{R}^+$ $L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

S $3x^{-5} = 96$

$D = \mathbb{R}^+$ $L = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

T $\frac{1}{2}x^4 = 128$

$D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{4\}$

Q $10 \cdot x^{10} = 1 \cdot 10^{11}$

$D = \mathbb{R}_0^+$ $L = \{10\}$

Das Lösungswort lautet: SQUARE ROOT

KX

6 a) Es sind individuelle Lösungen möglich.

b) Lösungsmöglichkeit: Für $a, x, y \in \mathbb{R}_0^+$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$ Es sei $x = a^{\frac{1}{m}}$ und $y = a^{\frac{1}{n}}$.

Beweis: $x^m = a^1 \quad \wedge \quad y^n = a^1$

$$(x^m)^n = (a^1)^n \quad \wedge \quad (y^n)^m = (a^1)^m$$

$$\Leftrightarrow x^{m \cdot n} = a^n \quad \wedge \quad y^{m \cdot n} = a^m$$

Es gilt: $x^{m \cdot n} : x^{m \cdot n} = a^n : a^m$

$$(x : y)^{m \cdot n} = a^{n-m}$$

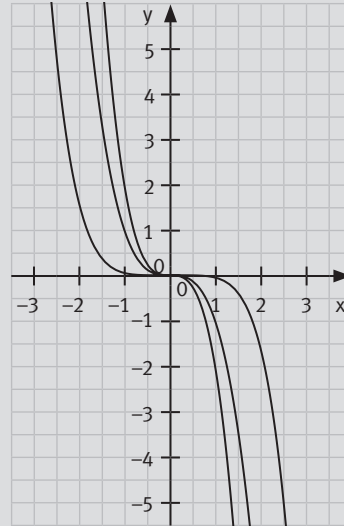
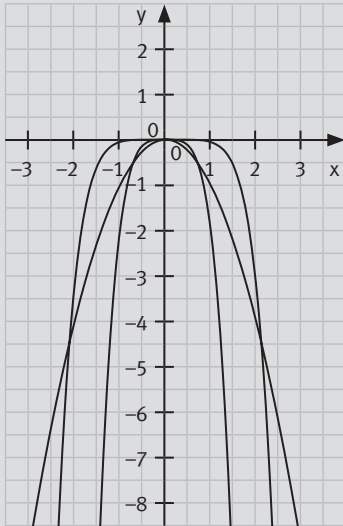
$$x : y = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}}$$

Somit: $a^{\frac{1}{m}} : a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = a^{\left(\frac{1}{m}\right) - \left(\frac{1}{n}\right)}$

VERSTÄNDNIS

K6

- Eigenschaften der Parabeln von Potenzfunktionen der Gleichung $y = a \cdot x^n$ mit $a < 0$ und ...
geradem Exponenten:
Der Funktionsgraph verläuft ...
 - symmetrisch zur y-Achse.
 - durch (0|0).
 - durch den III. und IV. Quadranten.
- Eigenschaften der Parabeln von Potenzfunktionen der Gleichung $y = a \cdot x^n$ mit $a < 0$ und ...
ungeradem Exponenten:
Der Funktionsgraph verläuft ...
 - punktsymmetrisch zu (0|0).
 - durch (0|0).
 - durch den II. und IV. Quadranten.



K6

- Für gerades n sind Potenzfunktionen der Form $y = a \cdot x^n$ symmetrisch zur y-Achse, d. h. es gilt: $f(x) = f(-x)$. Für ungerades n sind sie punktsymmetrisch zum Ursprung, d. h. es gilt: $f(-x) = -f(x)$. Somit genügt es, die Werte nur für $x < 0$ oder $x > 0$ zu berechnen.

K5

1

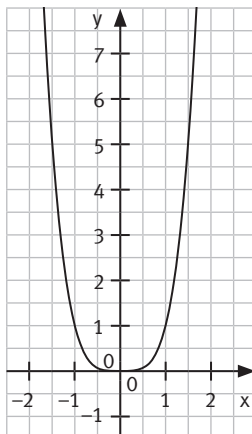
| | A | B | C | D | E |
|---------------|--------|---------------|---------|---------------------------|-------------------------------------|
| a) $y = x^3$ | (0 0) | (-3 -27) | (4 64) | (5 125) | (2 ³ 2 ⁹) |
| b) $y = x^4$ | (-1 1) | (2,5 39,0625) | (3 81) | (6 1296) | (4 ^{1,5} 4 ⁶) |
| c) $y = 2x^3$ | (0 0) | (3 54) | (2 16) | (4 128) | (2 ⁴ 2 ¹³) |
| d) $y = -x^4$ | (0 0) | (1,5 -5,0625) | (2 -16) | (2,5 $-\frac{625}{16}$) | (8 -8 ⁴) |

K5

2

| | | | | | | | | | | | |
|----|---|----|--------|--------|----|--------|---|--------|---|--------|--------|
| a) | x | -2 | -1,5 | -1,2 | -1 | -0,7 | 0 | 0,4 | 1 | 1,3 | 1,5 |
| | y | 16 | 5,0625 | 2,0736 | 1 | 0,2401 | 0 | 0,0256 | 1 | 2,8561 | 5,0625 |

b) $f: y = x^4$

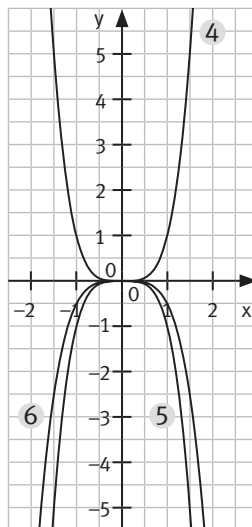
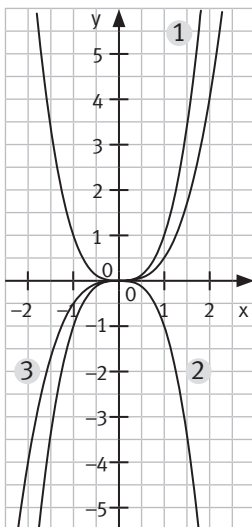


- c) Die Funktion ist für $x \leq 0$ streng monoton fallend und für $x \geq 0$ streng monoton steigend. Die Parabel ist symmetrisch zur y-Achse und es ist $f(0) = 0$. Im Ursprung besitzt sie ein globales Minimum.

KX

3 a)

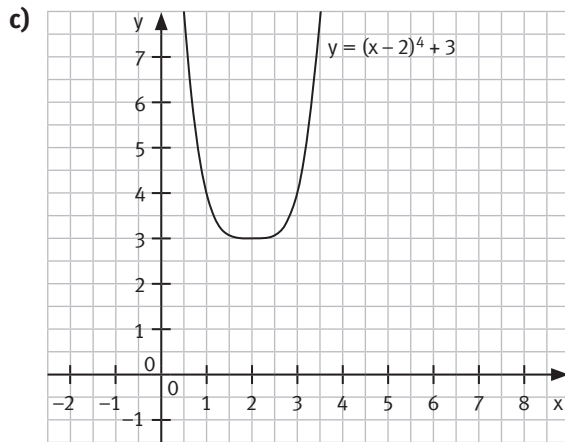
| | | | |
|--------------------------------|---|---|---|
| Eigenschaft | ① $y_1 = x^3$ | ② $y_2 = -x^3$ | ③ $y_3 = \frac{1}{2}x^3$ |
| Definitionsmenge | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| Wertemenge | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| Monotonie | steigend | fallend | steigend |
| Scheitelpunkt S | – | – | – |
| Nullstellen | $x = 0$ | $x = 0$ | $x = 0$ |
| Schnittpunkt P mit der y-Achse | O (0 0) | O (0 0) | O (0 0) |
| Symmetrie | punktsymmetrisch zu O (0 0) | punktsymmetrisch zu O (0 0) | punktsymmetrisch zu O (0 0) |
| Eigenschaft | ④ $y_4 = x^4$ | ⑤ $y_5 = -x^4$ | ⑥ $y_6 = -\frac{1}{2}x^4$ |
| Definitionsmenge | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| Wertemenge | $x \in \mathbb{R}_0^+$ | $x \in \mathbb{R}_0^-$ | $x \in \mathbb{R}_0^-$ |
| Monotonie | fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$ | steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ | steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ |
| Scheitelpunkt S | Tiefpunkt S (0 0) | Hochpunkt S (0 0) | Hochpunkt S (0 0) |
| Nullstellen | $x = 0$ | $x = 0$ | $x = 0$ |
| Schnittpunkt P mit der y-Achse | O (0 0) | O (0 0) | O (0 0) |
| Symmetrie | achsensymmetrisch zur y-Achse | achsensymmetrisch zur y-Achse | achsensymmetrisch zur y-Achse |



- b)
- Der Graph zu $y_1 = 3x^3$ entsteht aus dem von $y = x^3$ durch Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung.
 - Der Graph zu $y_2 = 3x^3 + 2$ entsteht aus dem von $y = x^3$ durch Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung und anschließende Verschiebung um 2 in y-Richtung.
 - Der Graph zu $y_3 = 3(x - 1)^3 + 2$ entsteht aus dem von $y = x^3$ durch Verschiebung um 1 in x-Richtung, Streckung um den Faktor 3 in y-Richtung und anschließende Verschiebung um 2 in positive y-Richtung.
 - Der Graph zu $y_4 = -\frac{1}{2}x^4$ entsteht aus dem von $y = x^4$ durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung und anschließende Spiegelung an der x-Achse.
 - Der Graph zu $y_5 = -\frac{1}{2}x^4 - 1,5$ entsteht aus dem von $y = x^4$ durch Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung, Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um $-1,5$ in y-Richtung.
 - Der Graph zu $y_6 = -\frac{1}{2}(x + 2)^4 - 1,5$ entsteht aus dem von $y = x^4$ durch Verschiebung um -2 in x-Richtung, Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$, Spiegelung an der x-Achse und anschließende Verschiebung um $-1,5$ in y-Richtung.

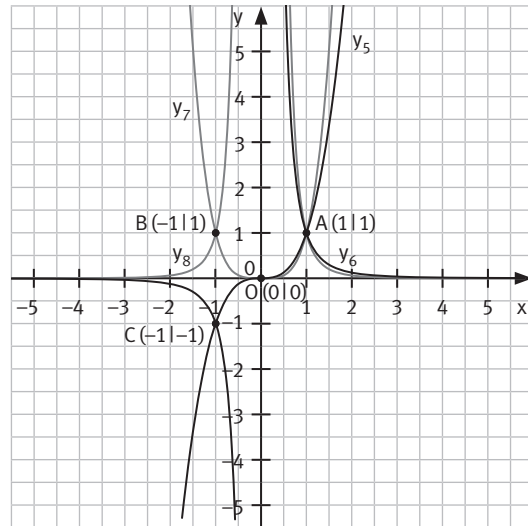
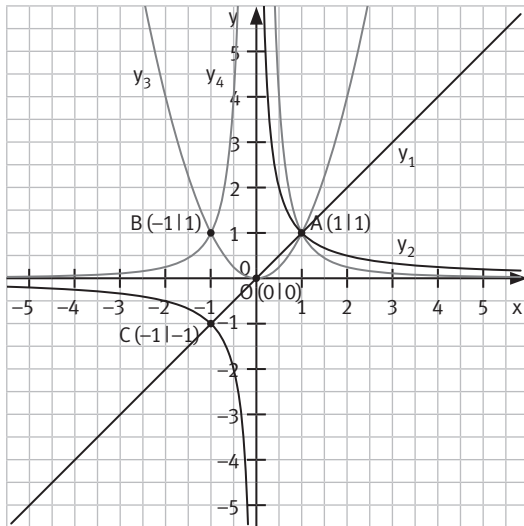
K6 4 a) 1 - B 2 - E 3 - A 4 - D

b) C $y = (x-2)^3$



Der Graph ist streng monoton fallend für $x \leq 2$ und streng monoton steigend für $x \geq 2$. Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S(2|3)$. Die Parabel ist achsensymmetrisch zu $x = 2$ und gegenüber $y = x^4$ um 2 Einheiten entlang der x -Achse und 3 Einheiten entlang der y -Achse verschoben.

KX 5 a)



b) Lösungsmöglichkeit:

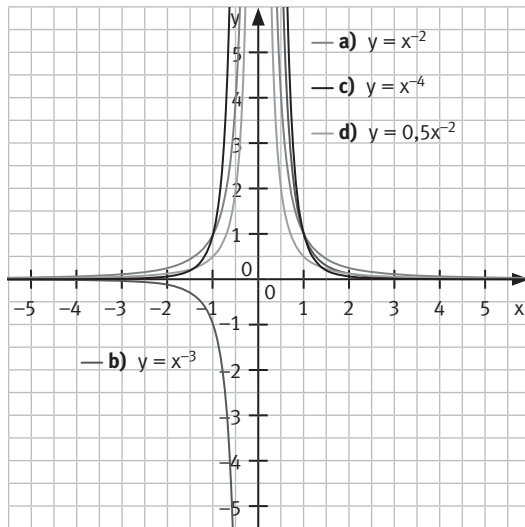
- Die Potenzfunktionen mit negativen, ganzzahligen Exponenten haben als Graph eine Hyperbel.
- Die Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten verlaufen alle durch den Ursprung.

c)

| Punkt | O(0 0) | A(1 1) | B(-1 1) | C(-1 -1) |
|--------------|----------------------|--|----------------------|----------------------|
| Graph zu ... | $y_1; y_3; y_5; y_7$ | $y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6; y_7; y_8$ | $y_3; y_4; y_7; y_8$ | $y_1; y_2; y_5; y_6$ |

KX

6



| | a) $y = x^{-2}$ | b) $y = x^{-3}$ | c) $y = x^{-4}$ | d) $y = 0,5x^{-2}$ |
|------------------------------|---|--|---|---|
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}^+$ | $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $y \in \mathbb{R}^+$ | $y \in \mathbb{R}^+$ |
| Monotonie | steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ | fallend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ | steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ | steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ |
| Nullstellen | keine | keine | keine | keine |
| Schnittpunkt mit der y-Achse | keine | keine | keine | keine |
| Symmetrie | achsensymmetrisch zur y-Achse | punktsymmetrisch zu S(0 0) | achsensymmetrisch zur y-Achse | achsensymmetrisch zur y-Achse |

K4

- 7 a) ① Alle drei Graphen gehören zu Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten, da sie punktsymmetrisch sind zu (0|0).
 ② Alle vier Graphen gehören zu Potenzfunktionen mit geradem Exponenten, da sie achsensymmetrisch sind zur y-Achse.
- b) ① rot: $y = x^1$ grün: $y = x^{-1}$ blau: $y = x^3$
 ② rot: $y = x^2$ grün: $y = x^0$ blau: $y = x^4$ lila: $y = x^{-2}$

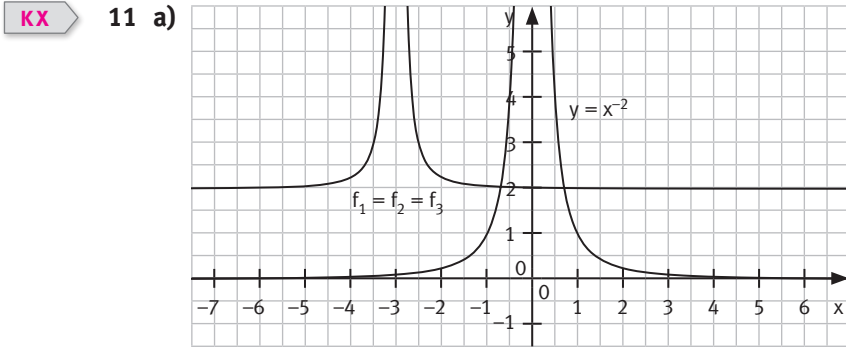
KX

- 8 a) $a = \frac{2}{3}$ b) $a = -1$ c) $a = \frac{1}{200}$ d) $a = -\frac{1}{50}$

K2

- 9 a) A eingesetzt ergibt: $0 = 0$
 B eingesetzt liefert: $3 = a \cdot 1^n \Leftrightarrow a = 3$
 Die Funktionsgleichung lautet: $y = 3x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ beliebig)
- b) A und B eingesetzt ergeben:
 I $4 = a \cdot 2^n \Leftrightarrow a = \frac{4}{2^n}$
 II $0,25 = a \cdot (-1)^n \Leftrightarrow 0,25 = \frac{4}{2^n} \cdot (-1)^n$
 $\frac{1}{16} = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \Leftrightarrow n = 4; a = 0,25$
 Die Funktionsgleichung lautet: $y = 0,25 \cdot x^4$
- c) A und B eingesetzt ergeben:
 I $20\,000 = a \cdot (-10)^n \Leftrightarrow a = \frac{20\,000}{(-10)^n}$
 II $-625 = a \cdot 5^n \Leftrightarrow -625 = 20\,000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
 $-\frac{1}{32} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow n = 5; a = -0,2$
 Die Funktionsgleichung lautet: $y = -0,2x^5$

- K5** 10 a) $x_1 = 2; x_2 = 3$ b) $x_1 = -13; x_2 = 13$ c) $x_1 = -2; x_2 = 1$
 d) $x_1 = -3; x_2 = 4$ e) $x_1 = 0; x_2 = 4$ f) keine Nullstelle
 g) $x = 0$ h) $x = 2$ i) $x = 0$
 j) $x_1 = -1; x_2 = 1$ k) $x = 2,5$ l) $x_1 = -5; x_2 = -1; x_3 = 1$



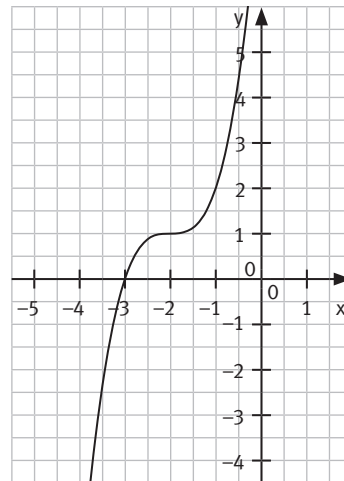
b) Der (identische) Graph der Funktionen f_1, f_2 und f_3 ist gegenüber dem von $y = x^{-2}$ um zwei Einheiten nach oben und drei Einheiten nach links verschoben worden und verläuft enger.

- c) Aus f_1 erhält man durch Umformen $f_2: 0,25 \cdot (x+3)^{-2} + 2 = 0,25 \cdot \frac{1}{(x+3)^2} + 2 = \frac{0,25}{(x+3)^2} + 2$
 Aus f_3 erhält man durch Umformen und die binomischen Formeln f_2 :

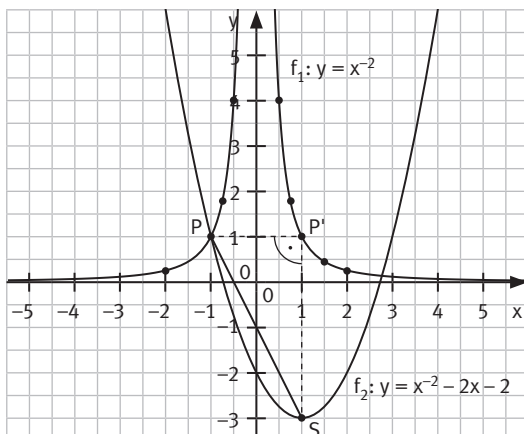
$$\frac{1}{4x^2 + 24x + 36} + 2 = \frac{1}{4 \cdot (x^2 + 6x + 9)} + 2 = \frac{1}{4 \cdot (x+3)^2} + 2 = \frac{0,25}{(x+3)^2} + 2$$

- K5** 12 Lösungsmöglichkeit: Berechnen der Nullstellen der Funktion
 $y = (x+2)^3 + 1$
 $(x+2)^3 + 1 = 0$
 $(x+2)^3 = -1$
 $x+2 = -1$
 $x = -3$

Der Graph in der Randspalte hat jedoch keine Nullstelle bei $x = 3$, sondern bei $x = 1$!
 Seine Funktionsgleichung lautet:
 $y = (x-2)^3 + 1$
 Der Graph zu $y = (x+2)^3 + 1$ sieht folgendermaßen aus:



- K5** 13 a) Zeichnung siehe Teilaufgabe c).
 Die Gleichung von f_1 lautet: $y = x^{-2}$.
 b) Zeichnung siehe Teilaufgabe c)
 c) Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten: $P(-1|1)$.



- d) Der Scheitelpunkt der Funktion f_2 liegt bei $S(1|-3)$.
 Die Strecke $[SP]$ wird durch den Punkt $P'(1|1)$ zu einem rechtwinkligen Dreieck erweitert, bei dem $[SP]$ die Hypotenuse ist. Nach dem Satz des Pythagoras gilt also:

$$\overline{SP} = \sqrt{2^2 + 4^2} \text{ cm} = \sqrt{20} \text{ cm}$$

$$= 2\sqrt{5} \text{ cm} \approx 4,5 \text{ cm}$$
 Der Abstand von P und S beträgt somit etwa 4,5 cm.

VERSTÄNDNIS

- KX** ■ Der Punkt $P(1|1)$ liegt auf dem Graphen aller erwähnten Potenzfunktionen, da für $x = 1$ gilt:
 $f(1) = 1^{\frac{1}{n}} = 1$ bzw. $f(1) = 1^{-\frac{1}{n}} = 1$.
- KX** ■ $y = x^{\frac{1}{n}}$ kann auch als $y = \sqrt[n]{x}$ geschrieben werden.

KX 1 a) 1

| | | | | | | | | |
|-----------------------|---|------|------|------|---|------|------|------|
| x | 0 | 0,2 | 0,25 | 0,75 | 1 | 2 | 2,5 | 4 |
| $y = x^{\frac{1}{3}}$ | 0 | 0,58 | 0,63 | 0,91 | 1 | 1,26 | 1,36 | 1,59 |

2

| | | | | | | | | |
|------------------------|---|------|------|---|------|------|------|------|
| x | 0 | 0,2 | 0,3 | 1 | 1,2 | 2,1 | 3 | 4,5 |
| $y = x^{-\frac{1}{3}}$ | 0 | 1,71 | 1,49 | 1 | 0,94 | 0,78 | 0,69 | 0,61 |

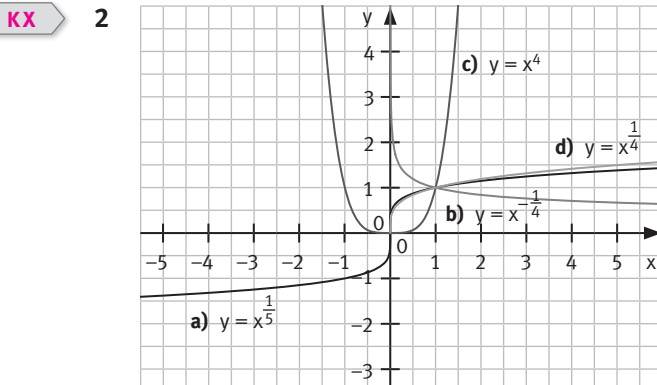
3

| | | | | | | | | |
|------------------------|------|------|---|------|------|------|------|------|
| x | 0,1 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 3,5 | 5 |
| $y = x^{-\frac{1}{5}}$ | 1,58 | 1,15 | 1 | 0,92 | 0,87 | 0,80 | 0,78 | 0,72 |

4

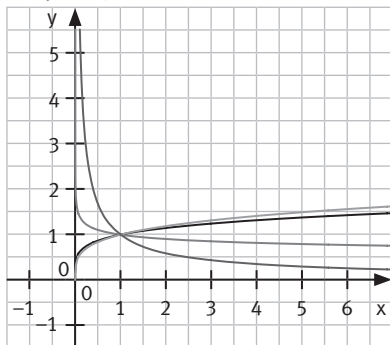
| | | | | | | | | |
|------------------------|---|------|------|------|-----|------|------|------|
| x | 0 | 0,5 | 1,5 | 2 | 3 | 3,5 | 4 | 5 |
| $y = x^{\frac{1}{12}}$ | 0 | 0,94 | 1,03 | 1,06 | 1,1 | 1,11 | 1,12 | 1,14 |

- b) Die Werte für $x = 0$ und $x = 1$ brauchen nicht mit dem Taschenrechner berechnet zu werden, da $0^a = 0$ (außer für $a = 0$) und $1^a = 1$ ist.



| | a) $y = x^{\frac{1}{5}}$ | b) $y = x^{-\frac{1}{4}}$ | c) $y = x^4$ | d) $y = x^{\frac{1}{4}}$ |
|------------------------------|--|---------------------------|---|--------------------------|
| Definitionsmenge | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}^+$ |
| Wertemenge | $y \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}^+$ | $y \in \mathbb{R}^+$ | $y \in \mathbb{R}^+$ |
| Monotonie | steigend für $x < 0$ steigend für $x > 0$ | fallend für $x > 0$ | fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$ | steigend für $x > 0$ |
| Nullstellen | N(0 0) | keine | N(0 0) | N(0 0) |
| Asymptoten | keine | Koordinatenachsen | keine | keine |
| Gleichung der Umkehrfunktion | $y = x^5$ | $y = x^{-4}$ | $y = x^{\frac{1}{4}}$ | $y = x^4$ |

- KX** 3 Der rote und der blaue Graph gehören zu Potenzfunktionen mit negativen Exponenten, da für $x > 0$ beide Graphen monoton fallen und die Koordinatenachsen den Asymptoten entsprechen. Die anderen beiden Graphen sind Potenzfunktionen mit positiven Exponenten, da beide Graphen eine Nullstelle im Ursprung haben und für $x > 0$ monoton steigend sind.

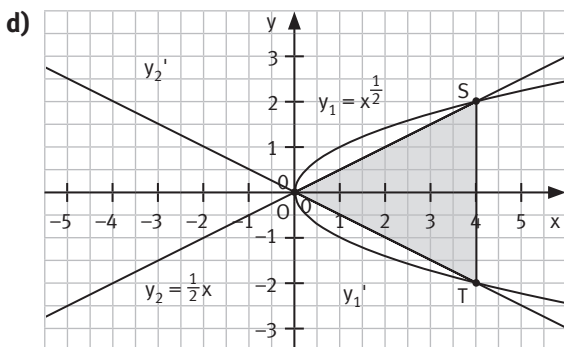


- b) $y = x^{0,25}$
- a) $y = x^{\frac{1}{5}}$
- c) $y = x^{-\frac{1}{7}}$
- d) $y = x^{-0,75}$

KX 4

| | a) $y = x^{\frac{1}{5}}$ | b) $y = x^{0,25}$ | c) $y = x^{-\frac{1}{7}}$ | d) $y = x^{-0,75}$ |
|------------------------------|--------------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------------------|
| Definitionsmenge | $x \in \mathbb{R}_0^+$ | $x \in \mathbb{R}_0^+$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $x \in \mathbb{R}^+$ |
| Wertemenge | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $y \in \mathbb{R}^+$ | $y \in \mathbb{R}^+$ |
| Monotonie | steigend für $x > 0$ | steigend für $x > 0$ | fallend für $x > 0$ | fallend für $x > 0$ |
| Nullstellen | N(0 0) | N(0 0) | keine | keine |
| Asymptoten | keine | keine | Koordinatenachsen | Koordinatenachsen |
| Gleichung der Umkehrfunktion | $y = x^5$ | $y = x^4$ | $y = x^{-7}$ | $y = x^{-\left(\frac{3}{4}\right)}$ |

- K5** 5 a) Zeichnung siehe Teilaufgabe d)
 b) Zeichnung siehe Teilaufgabe d)
 c) S(4|2): Schnittpunkt von y_1 und y_2
 T(4|-2): Schnittpunkt von y_1' und y_2'
 O(0|0): gemeinsamer Punkt aller Graphen



Die Punkte S, O und T spannen ein gleichschenkliges Dreieck auf. Die Basis dieses Dreiecks ist [ST], die zugehörige Höhe verläuft auf der x-Achse.

Mit $\overline{ST} = 4$ LE und $h = 4$ LE gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \text{ FE} = 8 \text{ FE}$$

Der Flächeninhalt der geometrischen Figur beträgt 8 Flächeneinheiten.

KX

6 a) 1

| | | | | | | | | |
|-----------------------|---|------|---|------|------|------|------|------|
| x | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
| $y = x^{\frac{2}{3}}$ | 0 | 0,63 | 1 | 1,31 | 1,59 | 1,84 | 2,08 | 2,31 |

2

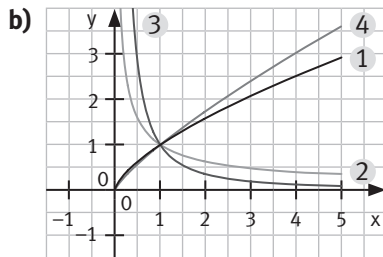
| | | | | | | | | |
|------------------------|------|------|------|---|------|------|------|------|
| x | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 1 | 1,2 | 2,1 | 3 | 4,5 |
| $y = x^{-\frac{2}{3}}$ | 4,64 | 2,93 | 2,23 | 1 | 0,89 | 0,61 | 0,48 | 0,37 |

3

| | | | | | | | | |
|------------------------|-------|-------|------|---|------|------|------|-----|
| x | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 1 | 1,2 | 2,1 | 3 | 4,5 |
| $y = x^{-\frac{3}{2}}$ | 31,62 | 11,18 | 6,09 | 1 | 0,76 | 0,33 | 0,19 | 0,1 |

4

| | | | | | | | | |
|-----------------------|---|------|------|---|------|------|------|------|
| x | 0 | 0,1 | 0,3 | 1 | 1,2 | 2,1 | 3 | 4,5 |
| $y = x^{\frac{4}{5}}$ | 0 | 0,16 | 0,38 | 1 | 1,16 | 1,81 | 2,41 | 3,33 |



c) Es sind individuelle Lösungen möglich.

d) Funktion 3 hat als Exponenten den Umkehrbruch des Exponenten aus Funktion 2. Dadurch fällt der Graph von Funktion 3 steiler als der von Funktion 2.

KX

7 Lösungsmöglichkeit:

• $y = x^{\frac{1}{2}}$ • $y = x^{-\frac{3}{2}}$ • $y = x^{-\frac{1}{2}}$ • $y = x^{\frac{1}{3}}$ • $y = x^4$ mit $y^{-1} = x^{\frac{1}{4}}$

KX

8 Vertauschung von x und y führt zu:

$x = y^{\frac{m}{n}}$ $x = \sqrt[n]{y^m}$ $x^n = y^m$ $\sqrt[m]{x^n} = y$ $y = x^{\frac{n}{m}}$

KX

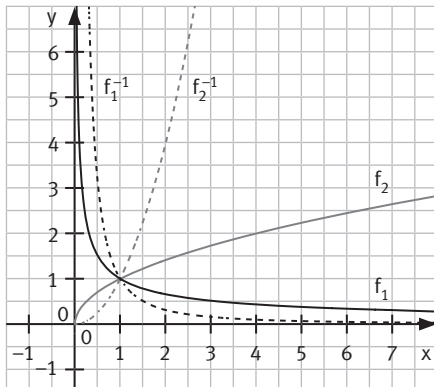
9 a) $f_1^{-1}: x = y^{\frac{2}{7}}$ $f_2^{-1}: x = y^{-\frac{5}{3}}$ $f_3^{-1}: x = y^{0,3} = y^{\frac{3}{10}}$
 $x^7 = y^2$ $x^3 = y^{-5}$ $x^{10} = y^3$
 $y = x^{\frac{7}{2}}$ $y = x^{-\frac{3}{5}}$ $y = x^{\frac{10}{3}}$

Die Umkehrfunktion von $f: y = x^{\frac{m}{n}}$ erhält man, indem der Umkehrbruch im Exponenten gebildet wird: $f^{-1}: y = x^{\frac{n}{m}}$. Das Vorzeichen bleibt dabei erhalten.

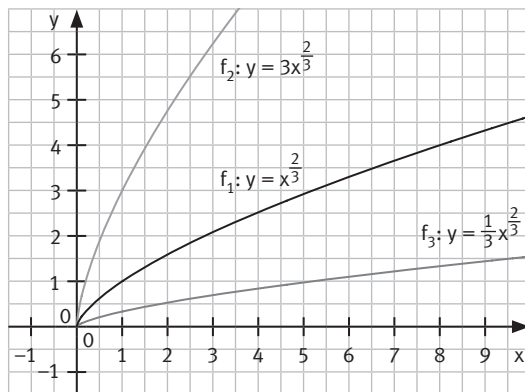
b) Es sind individuelle Lösungen möglich.

KX

10 a) $f_1: y = \sqrt[5]{x^{-3}}$ $f_2: y = \sqrt[2]{x}$
b) $f_1^{-1}: y = x^{-\left(\frac{5}{3}\right)}$ $f_2^{-1}: y = x^2$



KX 15



Ist $0 < a < 1$ ist die Funktion gestaucht. Für $a > 1$ ist die Funktion gestreckt.

KX

16 Einsetzen von x und y in die Gleichung liefert für jede Teilaufgabe $a = 7$.

KX

17 a) n beliebig b) $n = \frac{1}{2}$ c) $n = \frac{1}{2}$ d) $n = \frac{1}{2}$

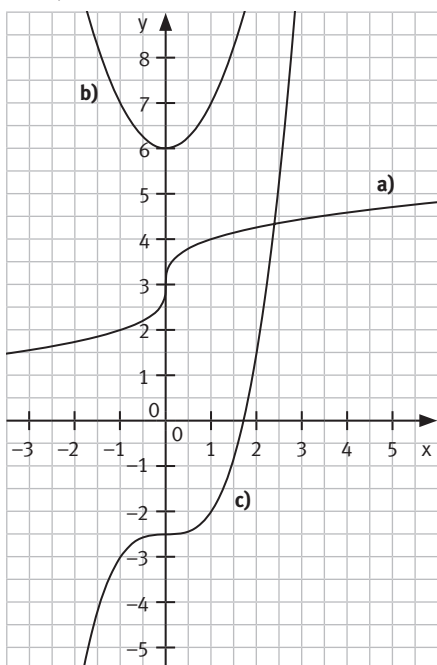
VERSTÄNDNIS

- KX** Die Umkehrfunktion einer (Potenz-)Funktion erhält man, indem man x und y in der Ausgangsgleichung vertauscht und die neue Gleichung dann nach y auflöst.

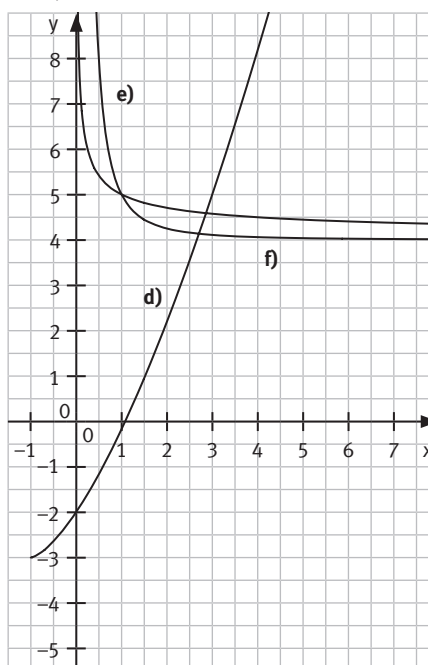
KX 1

| | 1 $f_1: y = \sqrt[3]{x}$ | 2 $f_2: y = \sqrt[4]{x}$ | 3 $f_3: y = x^{-3}$ | 4 $f_4: y = x^{-4}$ |
|----|------------------------------|------------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) | $f(x) = \sqrt[3]{x-3} + 2$ | $f(x) = \sqrt[4]{x-3} + 2$ | $f(x) = (x-3)^{-3} + 2$ | $f(x) = (x-3)^{-4} + 2$ |
| b) | $f(x) = \sqrt[3]{x-7} + 1,5$ | $f(x) = \sqrt[4]{x-7} + 1,5$ | $f(x) = (x-7)^{-3} + 1,5$ | $f(x) = (x-7)^{-4} + 1,5$ |
| c) | $f(x) = \sqrt[3]{x-b} + 2b$ | $f(x) = \sqrt[4]{x-b} + 2b$ | $f(x) = (x-b)^{-3} + 2b$ | $f(x) = (x-b)^{-4} + 2b$ |
| d) | $f(x) = \sqrt[3]{x+b} + b$ | $f(x) = \sqrt[4]{x+b} + b$ | $f(x) = (x+b)^{-3} + b$ | $f(x) = (x+b)^{-4} + b$ |

KX 2 a) bis c)



d) bis f)



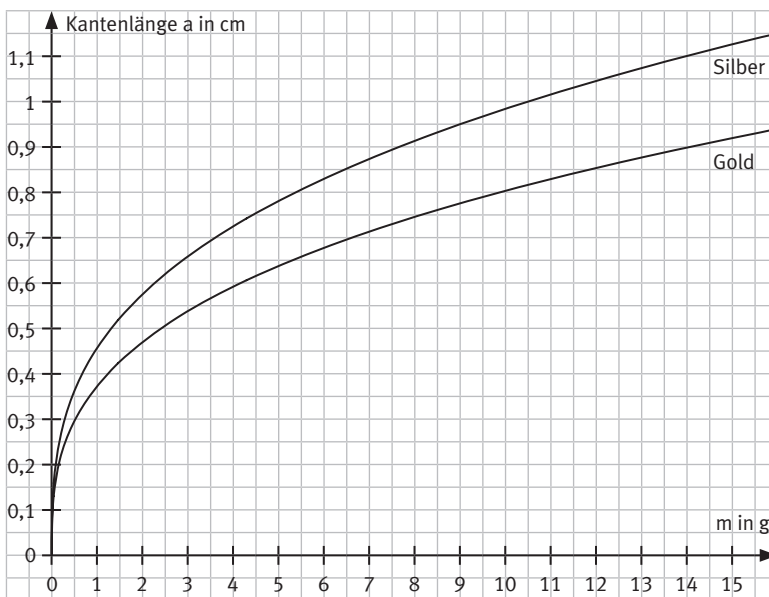
| | | | |
|--------------------|---|--|---|
| | a) $f^{-1}: y = x^{\frac{1}{3}} + 3$ | b) $f^{-1}: y = x^2 + 6$ | c) $f^{-1}: y = \frac{x^3 - 5}{2}$ |
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R}_0^+$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 3$ | $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 6$ | $y \in \mathbb{R}$ |
| Monotonie | steigend | fallend für $x < 0$ steigend für $x > 0$ | steigend |
| Symmetrie | keine | achsensymmetrisch zur y -Achse | Punktsymmetrie zu $(0 -2,5)$ |
| Asymptoten | keine | keine | keine |
| | d) $f^{-1}: y = (x+1)^{\frac{2}{3}} - 3$ | e) $f^{-1}: y = x^{-\frac{1}{2}} + 4$ | f) $f^{-1}: y = x^{-2} + 4$ |
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $x \in \mathbb{R}^+$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq -3$ | $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 4$ | $y \in \mathbb{R}^+$ mit $y \geq 4$ |
| Monotonie | steigend | fallend | fallend |
| Symmetrie | keine | keine | keine |
| Asymptoten | keine | $y = 4$ | $y = 4$ |

KX

- 3 a) Es gilt $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a^3}$
 $\Leftrightarrow \rho \cdot a^3 = m$
 $\Leftrightarrow a^3 = \frac{m}{\rho}$
 $\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$

| | | | | | | | | | |
|---------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| b) Masse m in g | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a _{Gold} | 0 | 0,37 | 0,47 | 0,54 | 0,59 | 0,64 | 0,68 | 0,71 | 0,75 |
| a _{Silber} | 0 | 0,46 | 0,58 | 0,66 | 0,72 | 0,78 | 0,83 | 0,87 | 0,91 |

| | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|-----|------|------|
| Masse m in g | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| a _{Gold} | 0,78 | 0,8 | 0,83 | 0,85 | 0,88 | 0,9 | 0,92 | 0,94 |
| a _{Silber} | 0,95 | 0,98 | 1,02 | 1,05 | 1,07 | 1,1 | 1,13 | 1,15 |

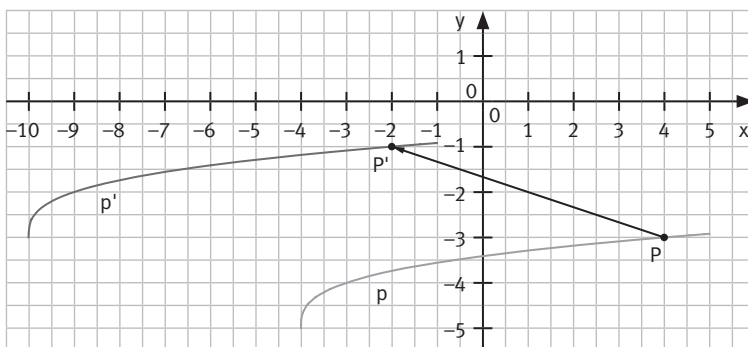


- c) Würfel von 200 g Masse: a_{Gold} = 2,18 cm a_{Silber} = 2,67 cm
 Würfel von 500 g Masse: a_{Gold} = 2,96 cm a_{Silber} = 3,62 cm
 d) Masse eines Goldwürfels mit Kantenlänge a_{Gold} = 2 cm: m = 154,4 g
 Kantenlänge eines Silberwürfels mit 154,4 g: a_{Gold} = 2,45 cm

KX

- 4 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$ $W = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

| | | | | | | | | | |
|--------------------------------|----|----|------|------|------|------|------|------|----|
| b) x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y = (x + 4) ^{1/3} - 5 | -5 | -4 | -3,7 | -3,6 | -3,4 | -3,3 | -3,2 | -3,1 | -3 |



- c) Nullstelle: N(12|0) Schnittpunkt mit der y-Achse: S(0|-3,4)
 d) Der Graph geht durch eine Verschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ aus dem von $y = x^{1/3}$ hervor.
 e) p muss um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ verschoben werden. p': y = (x + 10)^{1/3} - 3

KX 1 a) $1 \cdot 10^{-9}$ b) $1 \cdot 10^{-12}$ c) $1 \cdot 10^9$ d) $3 \cdot 10^{10}$ e) $167,26 \cdot 10^{23}$

KX 2 a) -27 b) $\frac{9}{16}$ c) $0,16$ d) $0,000001$ e) $\frac{5}{3}$
 f) $-0,064$ g) $\frac{4}{9}$ h) $0,00000001$ i) $-0,125$ j) -1

KX 3 a) $x^0 = 1$ b) $20a^7$ c) $9c^{-1}$ d) a^2 e) y^{2n}
 f) $0,2d^{-8}$ g) a^{8+2n} h) $36a^{-6}$ i) $\frac{b^{x-2}}{2^{2x} \cdot b^{-x}}$

KX 4 a) a^{-x-4} Werte eingesetzt: 2^{-6} b) $-\frac{9}{7}y^{-5} + \frac{0,027}{7}y^{-8}$ Werte eingesetzt: $\frac{10}{1701}$
 c) $\frac{3}{8}c - \frac{5}{32}c^3 - \frac{25}{16}c^{-2}$ Werte eingesetzt: $\frac{841}{288}$ d) $\frac{a}{a^2+a+1}$ Werte eingesetzt: $-\frac{2}{3}$

KX 5 a) $a^{10} - a^6$ b) $4 + 2b - 5b^2$ c) $a - a^2 + a^4$
 d) $21a - 32a$ e) $-1 - 2xy^{-3}$ f) $-10c - 6c^3 + 25c^{-1}$

KX 6 a) 5^2 b) $5^{\frac{1}{12}}$ c) $2^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$ d) $2^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{9}} b$ e) $a^{\frac{7}{6}}$
 f) a g) $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}} c$ h) $3 \cdot (2a)^{\frac{7}{10}}$ i) $\frac{64}{\sqrt{27}} a^6 \cdot b^3$

KX 7 a) $3^{\frac{1}{4}}$ b) $27^{\frac{1}{6}}$ c) $64^{\frac{1}{6}}$ d) $216^{\frac{1}{3}} a$
 e) $8^{\frac{1}{3}} ab^2$ f) $512^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{2}}$ g) $-1 \cdot 2^2 \cdot 8^2$ h) $12 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-\left(\frac{3}{2}\right)}$
 i) $16^{\frac{3}{4}} \cdot (-8)^6$ j) $-2 \cdot 4^{-12} \cdot 2^{49}$ k) $2a^{\frac{2}{3}} + xa^{\frac{2}{3}}$ l) $2x^{\frac{1}{2}} + x + 1$

KX 8 a) $a^{\frac{4}{5}} - 2 \cdot (ab)^{\frac{2}{5}} + b^{\frac{4}{5}}$ b) $a^{\frac{4}{7}} - 2(ab)^{\frac{2}{7}} + b^{\frac{4}{7}}$ c) $b^{\frac{6}{8}} - 2(ab)^{\frac{3}{8}} + a^{\frac{6}{8}}$
 d) $a^{\frac{4}{3}} - b^{\left(\frac{4}{5}\right)}$ e) $a^{-1} - b^{\frac{9}{4}}$ f) $a^{\frac{1}{4}} + (ab)^{-\left(\frac{1}{2}\right)} + a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{4}} + 1$

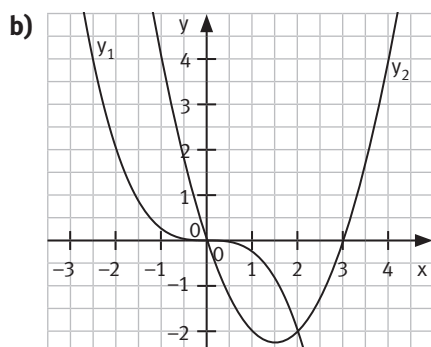
KX 9 Diese Gleichheit gilt für alle reellen Zahlen.

KX 10 a) Man müsste $\frac{1}{3 \cdot 10^{-8}} = 33\,333\,333$ Moleküle aneinander reihen.
 b) Die Kette wäre $28,9 \cdot 10^{19} \cdot 3 \cdot 10^{-8} = 8,67 \cdot 10^{12}$ cm lang.

KX 11 a) Ein Eimer hat 25 Sträuße. Somit bräuchte er 4 Eimer.
 b) Er muss 500 Blumen schneiden, da ein Strauß jeweils 5 Blumen hat.

K5 12 a) Der Graph der Funktion ist bei c) abgebildet.

| | | | | | | | |
|-----------------------|----|------|-------|---|-------|----|-------|
| x | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 1 | 2 | 2,5 |
| $y = -\frac{1}{4}x^3$ | 2 | 0,25 | 0,031 | 0 | -0,25 | -2 | -3,91 |



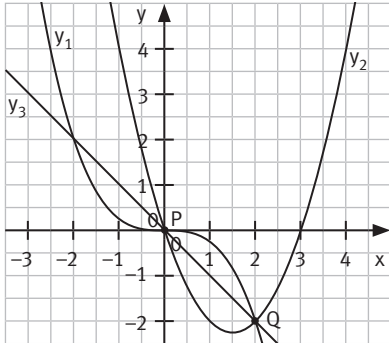
$$y_2 = x^2 - 3x = 0$$

$$\mathbb{L} = \{(0; 3)\}$$

Die Nullstellen der Funktion sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

- c) Für den Bereich $x \geq 0$ ergeben sich folgende Schnittpunkte: P(0|0) und Q(2|-2). Für die Gleichung der Gerade y_3 , die durch P und Q verläuft, ergibt sich die Steigung $m = \frac{-2-0}{2-0} = -1$. Wegen P(0|0) ist der y-Achsenabschnitt $t = 0$.

Somit ist $y_3 = -x$.



- K5** 13
- | | | |
|------------------|----------------------|---------------------------|
| 1 $y_1 = x^2$ | A, K, R, M $\in y_1$ | \Rightarrow MARK |
| 2 $y_2 = x^3$ | A, X, M $\in y_2$ | \Rightarrow MAX |
| 3 $y_3 = x^{-1}$ | A, X, E, L $\in y_3$ | \Rightarrow AXEL / ALEX |
| 4 $y_4 = x^4$ | A, K, I, M $\in y_4$ | \Rightarrow MAIK / MIKA |

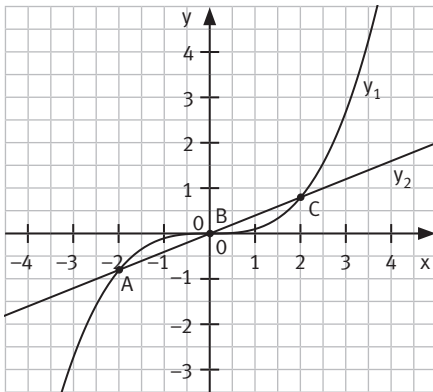
- K5** 14 Punkte, die nicht auf der jeweiligen Funktion liegen:

a) G b) A c) U d) S e) S

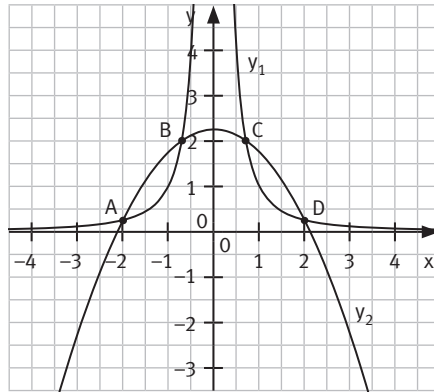
Der Name des bekannten deutschen Mathematikers lautet (Carl Friedrich) Gauß (1777–1885).

- K4** 15 Die Koordinaten sind teils auf zwei Dezimalen gerundet.

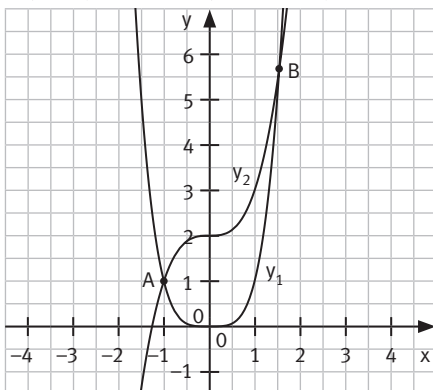
a) A(-2|-0,8) B(0|0)
C(2|0,8)



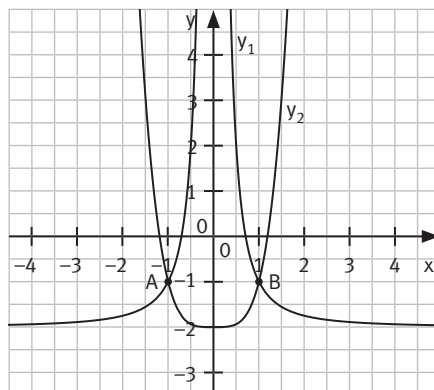
b) A(-2|0,25) B(-0,71|2)
C(0,71|2) D(2|0,25)



c) A(-1|1) B(1,54|5,68)



d) A(-1|-1) B(1|-1)

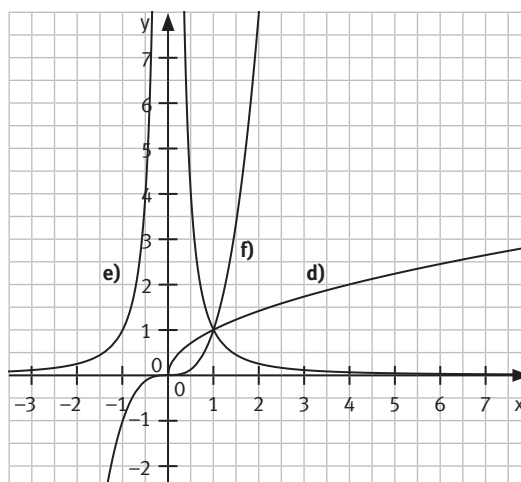
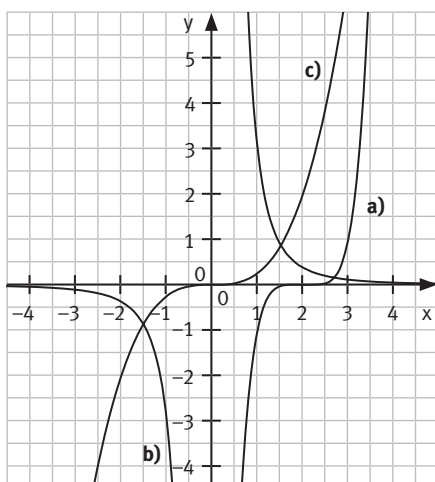


((stimmt der neue Graph zu a)?)

-----> die Gleichung a) in der Tabelle wurde ja nicht verändert.

ggf. bitte neue Gleichung oder neue ggb-Datei für die Graphen liefern ...)

K5 16



| | a) | b) | c) |
|--------------------|-----------------------------------|------------------------------------|--------------------|
| Funktionsgleichung | $y = (x - 2)^2 + 3$ | $y = 3x^{-3}$ | $y = 0,25x^3$ |
| Definitionsbereich | \mathbb{R} | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 3$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $y \in \mathbb{R}$ |
| Nullstellen | keine | keine | $N(0 0)$ |
| | d) | e) | f) |
| Funktionsgleichung | $y = \sqrt{x}$ | $y = x^{-2}$ | $y = x^3$ |
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | \mathbb{R} |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ | $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ | \mathbb{R} |
| Nullstellen | $x = 0$ | keine | $x = 0$ |

K4 17

| | a) | b) | c) |
|--------------------|---|---|--|
| Funktionsgleichung | $y = x^{-2}$ | $y = x^2 - 1$ | $y = x^3$ |
| Definitionsbereich | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ | \mathbb{R} | \mathbb{R} |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ | $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$ | \mathbb{R} |
| Nullstellen | keine | $x_1 = -1; x_2 = 1$ | $x = 0$ |
| Symmetrie | symmetrisch zur y-Achse | symmetrisch zur y-Achse | punktsymmetrisch zu O (0 0) |
| Monotonie | steigend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ | fallend für $x \leq 0$ steigend für $x \geq 0$ | steigend |
| | d) | e) | f) |
| Funktionsgleichung | $y = \frac{4}{3}x - 2$ | $y = x^4$ | $y = x^{-1}$ |
| Definitionsbereich | \mathbb{R} | \mathbb{R} | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| Wertebereich | \mathbb{R} | $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 0$ | $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| Nullstellen | $x = 1,5$ | $x = 0$ | keine |
| Symmetrie | | symmetrisch zur y-Achse | punktsymmetrisch zu O (0 0) |
| Monotonie | steigend | fallend für $x \leq 0$ steigend für $x \geq 0$ | fallend für $x < 0$ fallend für $x > 0$ |

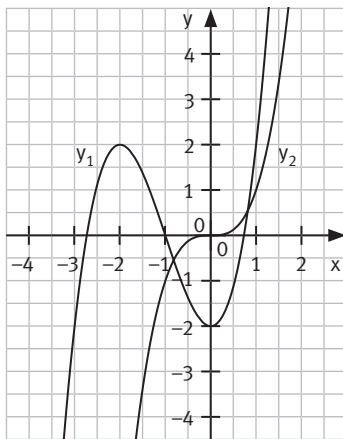
K6

18 a)

| | | | | | | | | | | |
|----------------|--------|----|-------|----|-------|----|----|--------|---|-------|
| x | -3,5 | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
| y ₁ | -8,125 | -2 | 1,125 | 2 | 1,375 | 0 | -2 | -1,125 | 2 | 8,125 |

b) Zeichnung siehe Teilaufgabe c)

c)



Beide Funktionen haben \mathbb{R} als Definitions- und Wertebereich und beide Funktionen verlaufen monoton steigend bei genügend kleinen und genügend großen x -Werten. Weiterhin schneiden sie beide Achsen mindestens einmal.

KX

19 a) $r = \sqrt[3]{\frac{1,0832 \cdot 10^{12}}{\frac{4}{3} \cdot \pi}} \approx 6370 \text{ km}$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot 6370^2 = 509\,904\,364 \text{ km}^2$$

b) Es sind $\frac{509\,904\,364}{100} \cdot 71 = 362\,032\,098 \text{ km}^2$ Landfläche.

c) $m = \rho \cdot V$

$$m = 5,52 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1,0832 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

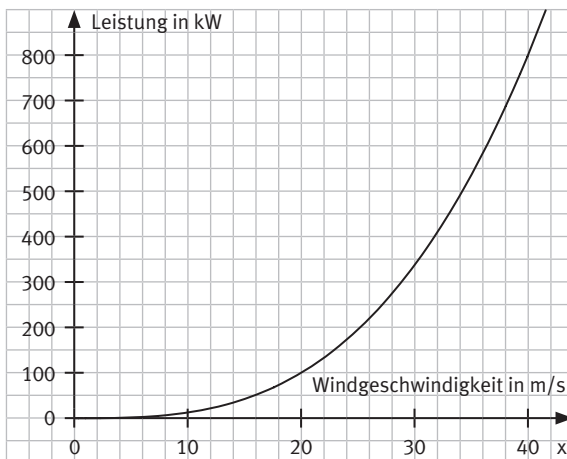
$$m = 5,52 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 1,0832 \cdot 10^{12} \cdot (1000 \text{ m})^3 = 5,52 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 1,0832 \cdot 10^{12} \cdot 10^9 \text{ m}^3$$

$$m = 5,98 \cdot 10^{21} \text{ t}$$

KX

20 a) $12,5 = a \cdot 10^3 \Leftrightarrow a = 0,0125$

b)



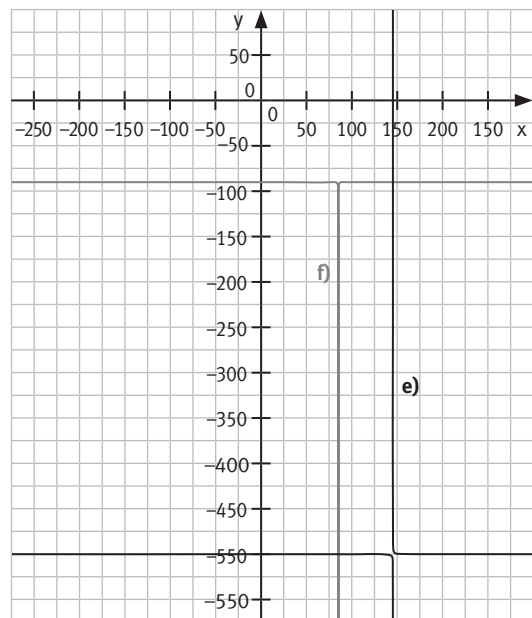
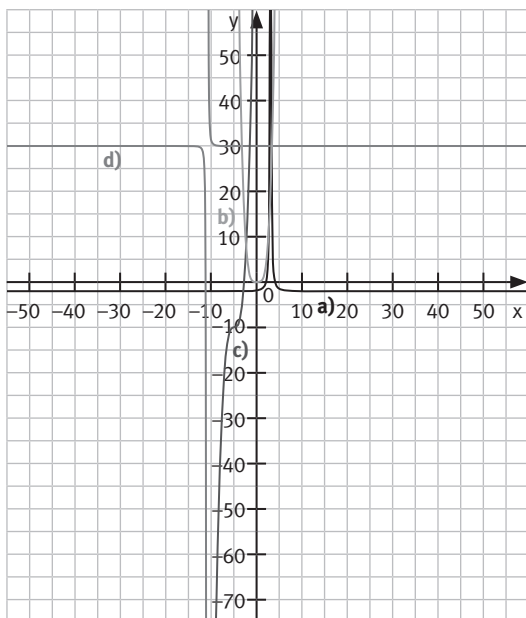
c) für 60 kW: 16,9 m/s

für 100 kW: 20 m/s

KX 21 a) und b)

| | | | | | | |
|--------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}_0^+$ | $x \in \mathbb{R}^+$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 3$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 2$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $y \in \mathbb{R}^+$ | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$ |
| Asymptoten | keine | keine | keine | Koordinaten- achsen | keine | $x = 2$ $y = 1$ |
| | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 1$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -2$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ | $x \in \mathbb{R}$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R}^+$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $y \geq -1$ | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $x \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$ | $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ | $y \in \mathbb{R}$ |
| Asymptoten | $x = 1$ $y = 0$ | keine | keine | keine | $x = 1$ $y = 2$ | keine |

KX 22



| | | | | | | |
|--------------------|-------------------------------------|------------------------|--------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
| Definitionsbereich | $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{-11\}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{-120\}$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{60\}$ |
| Wertebereich | $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ | $y \in \mathbb{R}_0^+$ | $y \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R} \setminus \{30\}$ | $y \in \mathbb{R} \setminus \{-500\}$ | $y \in \mathbb{R}$ mit $y < -90$ |
| Asymptoten | $x = 3$ $y = -2$ | keine | keine | $x = -11$ $y = 30$ | $x = 120$ $y = -500$ | $x = 60$ $y = -90$ |

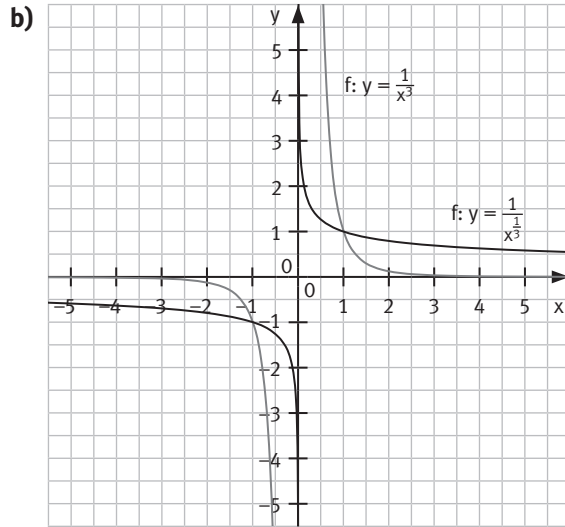
KX 23 a) Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- b) Dies ist nicht möglich, da dafür der Bruch im Funktionsterm $\frac{-3}{(x-1)^2} + 3$ gleich Null sein muss. Das ist aber nicht möglich.
- c) Der Funktionsterm ist eine Summe aus zwei Summanden, von denen der eine 3 ist und der andere eine negative Zahl. Addiert man diese beiden Summanden, ist die Summe nie größer als 3.
- d) Erhöht man die x-Werte, so wird der Nenner des Bruches immer größer, sodass der Bruch insgesamt kleiner wird, er nähert sich der Null an. In Summe nähern sich die Werte des Funktionsterms also der Zahl 3 an.

KX 24 a) $f: y = (x + 4)^{\frac{1}{3}} + 2$ b) $f: y = (x - 3)^{\frac{1}{3}}$

KX

- 25 a) Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertebereich: $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Umkehrfunktion: $f^{-1}: y = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$

- c) Es muss gelten: $f(-x) = -f(x)$
 $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = (-x)^{-3}$
 $-f(x) = -\frac{1}{x^3} = (-x)^{-3}$

KX

- 26 a) $n = 0,5$ b) $n = -3$ c) $n = 4$ d) $n = -0,25$
 e) $n = \frac{1}{3}$ f) $n = -0,5$ g) $n = -4$ h) $n = 1,5$

KX

- 27 a) $y = x^{\frac{1}{4}}$ b) $y = x^{\frac{6}{5}}$ c) $y = x^3$ d) $y = x^{\frac{3}{8}}$
 e) $y = x^{\frac{10}{3}}$ f) $y = x^{-\frac{1}{3}}$ g) $y = x^{-1}$ h) $y = x^{-\frac{4}{7}}$
 i) $y = x^{-8}$ j) $y = x$ k) $y = x^{-\frac{4}{3}}$ l) Umkehrfunktion existiert nicht.

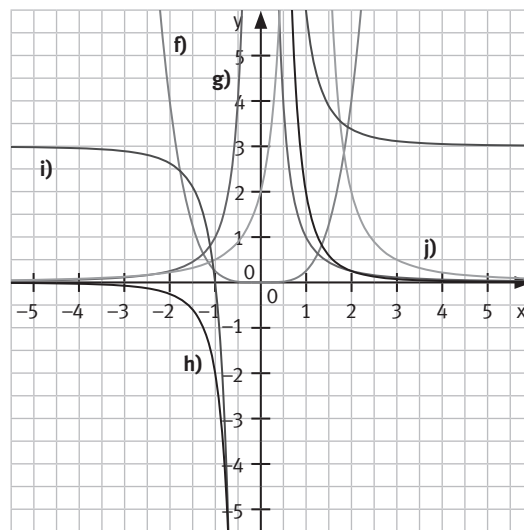
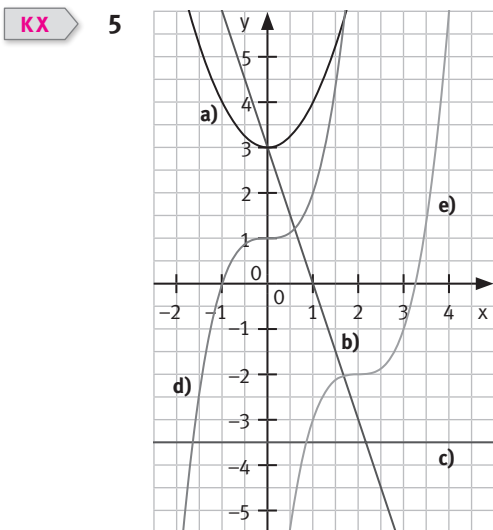
- K5** 1 a) $2,9243 \cdot 10^{12}$ b) $1,6 \cdot 10^{-9}$
 c) 288 000 d) 0,0000000000701
 e) $42,195 \cdot 10^3 \text{ m} = 4,2195 \cdot 10^4 \text{ m}$ f) $120 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
 g) $883 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 8,83 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ h) $1200 \cdot 10^6 \text{ Byte} = 1,2 \cdot 10^9 \text{ Byte}$

- K5** 2 a) $2 \cdot 10^{-10}$ b) $\approx 4,336 \cdot 10^{-7}$
 c) $-177\,147 = -1,77147 \cdot 10^5$ d) $6 \cdot 10^{-7}$
 e) $-256 = -2,56 \cdot 10^2$ f) $4\,520\,400 = 4,5204 \cdot 10^6$
 g) $\approx 3,011 \cdot 10^{-9}$ h) $0,432 = 4,32 \cdot 10^{-1}$

- KX** 3 a) $x^{\frac{7}{6}}$ b) $x^{\frac{41}{12}}$ c) $x^{\frac{5}{6}}$ d) $x^{\frac{7}{2}}$ e) x^6 f) $7^{\frac{1}{21}} \cdot x^4$

KX 4

| | Potenz | Wurzel |
|----|------------------|--------------------------|
| a) | $2^8 = 256$ | $\sqrt[8]{256} = 8$ |
| b) | $6^4 = 1296$ | $\sqrt[4]{1296} = 6$ |
| c) | $8^6 = 262\,144$ | $\sqrt[6]{262\,144} = 8$ |
| d) | $9^5 = 59\,049$ | $\sqrt[5]{59\,049} = 9$ |



- KX** 6 a) $3,26 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m} = 3,084 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$
 Ein Parsec misst $3,084 \cdot 10^{13} \text{ km}$.
 b) $3,26 \cdot 197 = 642,2$ Lichtjahre

K4 7 a) 1

| | Funktionsgleichung |
|--------|----------------------|
| rot | $y = x^{-2}$ |
| blau | $y = x^3$ |
| grün | $y = -2x - 2$ |
| orange | $y = -(x - 2)^2 - 1$ |

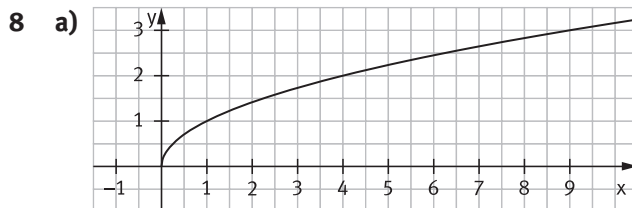
2

| | Funktionsgleichung |
|--------|------------------------|
| rot | $y = 2x^{-1}$ |
| blau | $y = x^4$ |
| grün | $y = \frac{1}{2}x + 1$ |
| orange | $y = (x - 2)^2 - 3$ |

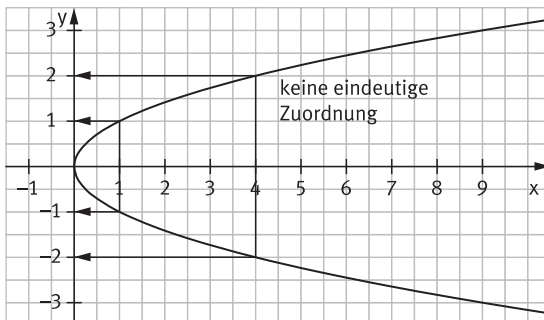
| b) 1 | D | W | Nullstellen |
|--------|------------------------------|-------------------------------|-------------|
| rot | $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ | $y \in \mathbb{R}; y > 0$ | keine |
| blau | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}$ | $x_0 = 0$ |
| grün | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}$ | $x_0 = -1$ |
| orange | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}; y \leq -1$ | keine |

| 2 | D | W | Nullstellen |
|--------|------------------------------|-------------------------------|--|
| rot | $x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ | $y \in \mathbb{R}; y \neq 0$ | keine |
| blau | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}; y \geq 0$ | $x_0 = 0$ |
| grün | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}$ | $x_0 = -2$ |
| orange | $x \in \mathbb{R}$ | $y \in \mathbb{R}; y \geq -3$ | $x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,27$ $x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73$ |

K5



- b) Der Definitionsbereich muss eingeschränkt werden, da \sqrt{x} für negative x -Werte nicht definiert ist.
 c) Bei diesem Vorgehen entsteht eine Kurve, die nicht der Graph einer Funktion ist. So würden beispielsweise zu $x = 1$ die beiden Werte $y_1 = 1$ und $y_2 = -1$ gehören, die Zuordnung wäre also nicht mehr eindeutig. Damit läge keine Funktion mehr vor.



- d) Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist über ihren gesamten Definitionsbereich monoton steigend.

K1

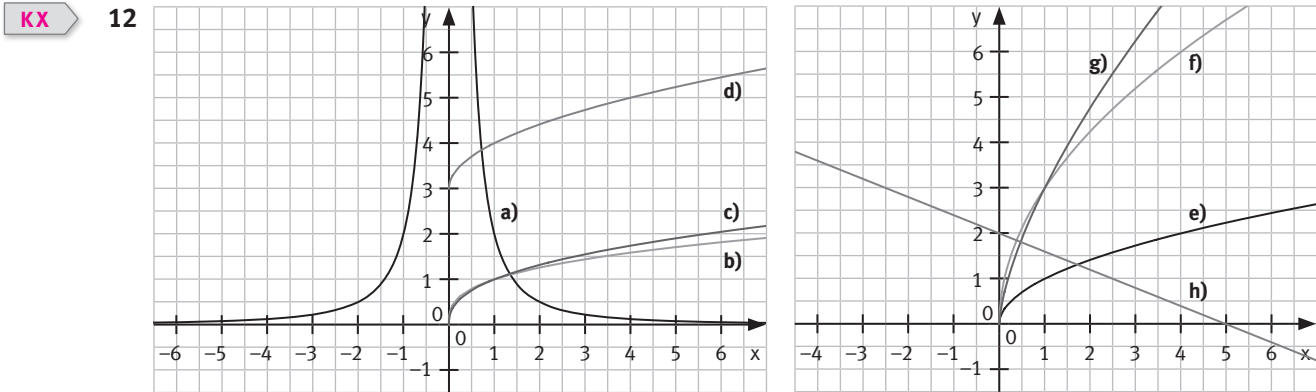
- 9 a) Gerade b) Parabel c) Gerade
 d) Parabel e) Hyperbel f) Parabel
 g) Parabel h) Gerade i) Hyperbel

K5

- 10 a) $y = x^{-2}$ A(-2|0,25); B(3,4|0,09); C₁(-10/7|0,49) oder C₂(10/7|0,49)
 b) D(-2,5|-18,63); E(1,9|3,86); F(3,21|30)
 c) G(4|1,22); H(2,5|1,14); I(128⁷ = 5,63 ... 10¹⁴|128)
 d) $y = x^{-1}$ J(-4|-0,25); K(2,6|0,38); L(-5|-0,2)
 e) $y = \sqrt{x}$ M(5|2,24); N(0,81|0,9); O(0|0)
 f) P(3|0,69); Q(10|0,46); R(8|0,5)

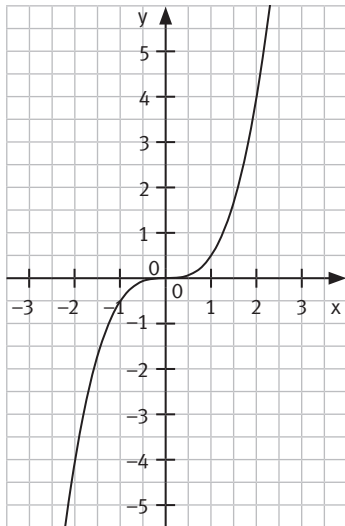
K5

- 11 Lösungsmöglichkeiten:
 $y = x^{-1}$ und $y = 0,25x$
 $y = -2 \cdot x^{-2}$ und $y = x + 1,5$



KX 13 a)

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|----|-------|------|-------|---|------|-----|------|---|------|------|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| y | -13,5 | -7,81 | -4 | -1,69 | -0,5 | -0,06 | 0 | 0,06 | 0,5 | 1,96 | 4 | 7,81 | 13,5 |



b) Es muss überprüft werden, ob $f(-x) = -f(x)$:
 $f(-x) = 0,5 \cdot (-x)^3 = -0,5x^3$
 $-f(x) = -0,5x^3$
 Damit ist der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung.

KX 14 Eine Funktion ist achsensymmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden, wenn man in der Funktionsgleichung x und y vertauschen kann, ohne dass sich dadurch der Funktionsterm ändert.
 $y = x^{-1}$

Vertauschung von x und y:

$$\begin{aligned} x &= y^{-1} & | \cdot y \\ \Leftrightarrow x \cdot y &= 1 & | \cdot x^{-1} \\ \Leftrightarrow y &= x^{-1} \end{aligned}$$

Der Graph ist also achsensymmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden.

KX 15 Die Umkehrfunktion erhält man, indem x und y miteinander vertauscht werden.

$$\begin{aligned} x &= -2 \cdot y^{-1} & | \cdot y \\ \Leftrightarrow x \cdot y &= -2 & | \cdot x^{-1} \\ \Leftrightarrow y &= -2 \cdot x^{-1} \end{aligned}$$

Somit ist f^{-1} identisch mit f.

KX 16 $f: y = (x - 0,5)^{-\frac{1}{5}} - 0,5$

KX 17 Die Aussage ist falsch. Die Potenzgesetze gelten für alle Exponenten.

KX 18 Die Aussage ist richtig. Umgeformt lautet die Funktionsgleichung: $y = -x^3 + 4$.

- KX** 19 Die Aussage ist richtig.
- KX** 20 Die Aussage ist falsch. Die Grundmenge und die Definitionsmenge von beispielsweise $y = x^2$ ist jeweils \mathbb{R} .
- KX** 21 Die Aussage ist richtig, denn $(-2)^{-3} = \frac{7}{8}$.
- KX** 22 Die Aussage ist falsch, es genügt ein Gegenbeispiel: $y = x^2 + 1$
- KX** 23 Die Aussage ist falsch. Will man sicherstellen, dass die Umkehrrelation einer Funktion ebenfalls wieder eine Funktion ist, muss man gegebenenfalls den Definitionsbereich der Ausgangsfunktion geeignet einschränken.

- KX** 1 Man kann hier beispielsweise für verschiedene Körper, deren Volumen 1 VE ist, den Quotienten $\frac{V}{O}$ bilden. Gut geeignet sind beispielsweise ein Würfel und eine Kugel:

$$\text{Würfel: } V = a^3 \quad O = 6a^2$$

Ein Würfel mit $V = 1$ VE hat eine Kantenlänge von $a = 1$ LE. Seine Oberfläche beträgt damit 6 FE.

$$\text{Kugel: } V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad O = 4\pi \cdot r^2$$

Eine Kugel mit $V = 1$ VE hat einen Radius von $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}$ LE. Ihr Oberflächeninhalt beträgt damit

$$4\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}\right)^2 \approx 4,84 \text{ FE.}$$

Bei gleichem Volumen hat also die Kugel den kleineren Oberflächeninhalt.

KX 2 a) $V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 \cdot h$
 $= \pi \cdot (3,5 \text{ cm})^2 \cdot 21 \text{ cm}$
 $\approx 808,2 \text{ cm}^3$

$$V_{\text{Bälle}} = 3 \cdot \frac{4}{9}\pi \cdot (3,5 \text{ cm})^3$$

$$\approx 538,8 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Hohlraum}} = V_{\text{Zylinder}} - V_{\text{Bälle}}$$

$$= (808,2 - 538,8) \text{ cm}^3$$

$$= 269,4 \text{ cm}^3$$

b) $\frac{V_{\text{Hohlraum}}}{V_{\text{Zylinder}}} = \frac{269,4 \text{ cm}^3}{808,2 \text{ cm}^3} = \frac{1}{3} = 33,3 \%$

handschriftliches Manuskript:
Bitte prüfen ...

KX 3 Volumen eines Tetraeders: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$$V_{\text{Rest}} = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left((5,8 \text{ cm})^3 - (3,2 \text{ cm})^3\right)$$

$$V_{\text{Rest}} = 19,1 \text{ cm}^3$$

- KX** 4 Berechnung der Höhe von Kegel bzw. Pyramide:
Die Einheit cm wurde in der Berechnung weggelassen.

$$h^2 = (3x)^2 - x^2$$

$$h = \sqrt{9x^2 - x^2}$$

$$h = \sqrt{8} \cdot x$$

$$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi x^2 \cdot \sqrt{8} \cdot x$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \sqrt{8} \cdot x^3$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot (2x)^2 \cdot \sqrt{8} \cdot x$$

$$= \frac{4}{3}x^2 \cdot \sqrt{8} \cdot x$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{8} \cdot x^3$$

$$V_{\text{Gesamt}} = V_{\text{Kegel}} + V_{\text{Pyramide}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{8} \cdot x^3 (\pi + 1) \text{ cm}^3$$

K5 5 $75\% = \frac{3}{4}$ $65\% = \frac{13}{20}$ $35\% = \frac{7}{20}$ $5\% = \frac{2}{40}$ $15\% = \frac{9}{60}$ $25\% = \frac{1}{4}$ $45\% = \frac{9}{20}$ $55\% = \frac{11}{20}$

K3 6

| | ursprünglicher Preis | erste Preissenkung | zweite Preissenkung |
|----------------|----------------------|--------------------|---------------------|
| Kühlschrank | 395,00 € | 296,25 € | 266,63 € |
| Controller | 299,00 € | 224,25 € | 201,83 € |
| Kaffeemaschine | 459,00 € | 344,25 € | 309,83 € |

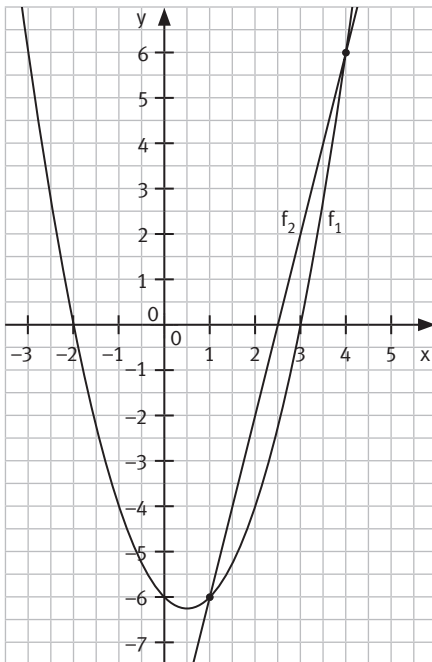
K3 7 $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) = 54 \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} \cdot 54 = 96$ Die Schuhe kosteten ursprünglich 96 €.

K3 8

| | Zinsen | Bearbeitungsgebühr | Rückzahlungsbetrag |
|--------|-------------------------|--------------------|--------------------|
| Bank A | 7,2% von 5000 € = 360 € | 0 € | 5360 € |
| Bank B | 6,5% von 5000 € = 325 € | 30 € | 5355 € |
| Bank C | 199 € | 29 € | 5228 € |

Bank C ist mit 5228 € Rückzahlungsbetrag gegenüber 5355 € bei Bank B bzw. 5360 € bei Bank A am günstigsten.

K4 9 a)



$$(x-3)(x+2) = 4x-10$$

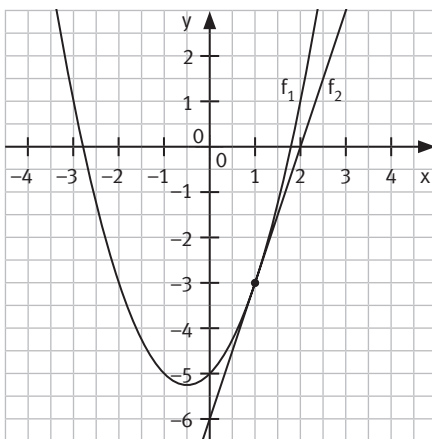
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\mathbb{L} = \{1; 4\}$$

Die Graphen der beiden Funktionen schneiden sich bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.

b)



$$x^2 + x - 5 = 3x - 6$$

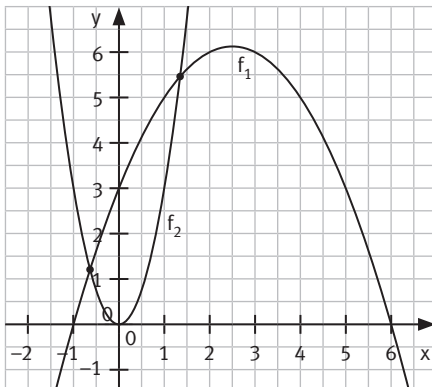
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\mathbb{L} = \{1\}$$

Die Graphen der beiden Funktionen berühren sich bei $x = 1$.

c)

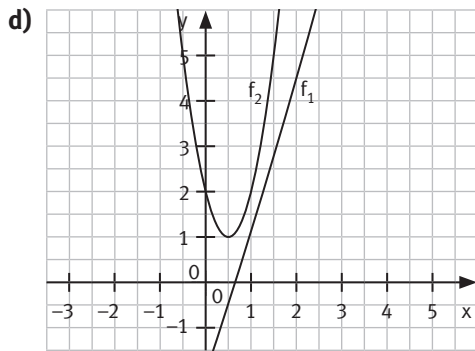


$$-0,5x^2 + 2,5x + 3 = 3x^2$$

$$3,5x^2 - 2,5x - 3 = 0$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{5 - \sqrt{193}}{14}; \frac{5 + \sqrt{193}}{14} \right\} \approx \{-0,64; 1,35\}$$

Die Graphen der beiden Funktionen schneiden sich bei $x_1 \approx -0,64$ und $x_2 \approx 1,35$.



$$0,125x^2 + 3x - 2 = 4x^2 - 4x + 2$$

$$3,875x^2 - 7x + 4 = 0$$

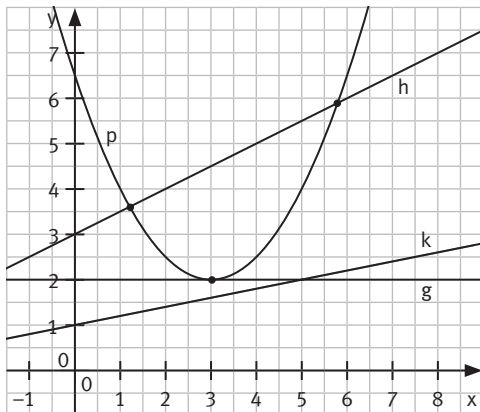
$$\mathbb{L} = \emptyset$$

Die Graphen der beiden Funktionen haben keinen Punkt gemeinsam.

Hinweis:

Der hier angezeigte Ausschnitt lässt f_1 wie eine Gerade wirken. Tatsächlich ist der Graph zu f_1 eine nach oben geöffnete Parabel mit S $(-12 | -20)$.

K4 10 a) und b)



Lösungsmöglichkeit:

- 1 g: $y = 2$
- 2 h: $y = 0,5x + 3$
- 3 k: $y = 0,2x + 1$

K5 11 a) Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen liefert:

$$0,5x^2 - x - 1 = -0,5x + 2$$

$$0,5x^2 - 0,5x - 3 = 0 \quad \mathbb{L} = \{-2; 3\}$$

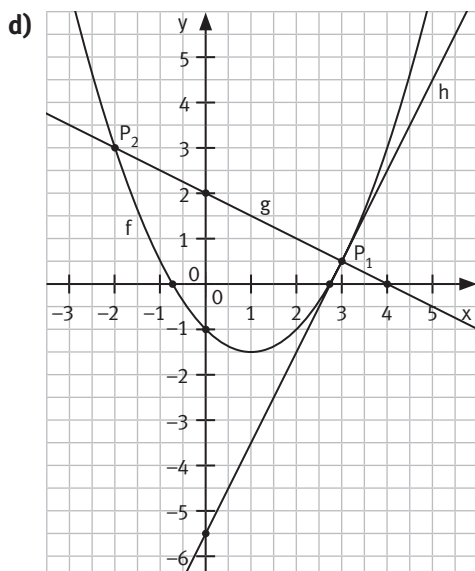
Die beiden Graphen schneiden sich in den Punkten $P_1(3 | 0,5)$ und $P_2(-2 | 3)$.

b) Für die Steigung m_h gilt: $m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow m_h = 2$

P_1 in die Gleichung $y = 2x + t$ eingesetzt, ergibt: $0,5 = 2 \cdot 3 + t \Leftrightarrow t = -5,5$

Die Funktionsgleichung von h lautet: $y = 2x - 5,5$

| Funktion | $f: y = 0,5x^2 - x - 1$ | $g: y = -0,5x + 2$ | $h: y = 2x - 5,5$ |
|--------------------------|---|--------------------|-------------------|
| Nullstellen | $x_1 = -\sqrt{3} + 1; x_2 = \sqrt{3} + 1$ | $x = 4$ | $x = 2,75$ |
| Schnittpunkt mit y-Achse | $S_1(0 -1)$ | $S_2(0 2)$ | $S_3(0 -5,5)$ |



- K6** 12 Samuel berechnet für beide Funktionen den y -Wert an der Stelle $x = 6$. Da er bei beiden Funktionen denselben Wert erhält, kann er daraus schließen, dass beide Graphen diesen Punkt gemeinsam haben. Er kann mit seiner Methode jedoch keine Aussage darüber treffen, ob der Punkt ein Berührungspunkt oder ein Schnittpunkt ist. Im letzten Falle würde evtl. ein weiterer gemeinsamer Punkt der beiden Parabeln existieren.

Tatsächlich haben beide Graphen nur den Punkt B als Berührungspunkt gemeinsam: Durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen und Äquivalenzumformung erhält man die Gleichung $(x - 6)^2 = 0$ mit der Lösung $x = 6$.

K6

13 a)

| | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| n | 50 | 100 | 200 | 300 |
| $H_6(n)$ | 6 | 19 | 31 | 48 |
| $h_6(n)$ | 12,0% | 19% | 15,5% | 16% |
| n | 400 | 500 | 600 | 700 |
| $H_6(n)$ | 70 | 80 | 91 | 109 |
| $h_6(n)$ | 17,5% | 16% | 15,2% | 15,6% |
| n | 800 | 900 | 1000 | |
| $H_6(n)$ | 123 | 139 | 158 | |
| $h_6(n)$ | 15,4% | 15,4% | 15,8% | |

- b) Die „Ausreißer“ mit 12% und 19% erklären sich dadurch, dass das Experiment noch nicht häufig genug durchgeführt wurde. Je öfter das Experiment durchgeführt wird, desto stärker stabilisiert sich die relative Häufigkeit des Ergebnisses um einen festen Zahlenwert.

K6

- 14 Die relative Häufigkeit, dass eine Person „Zahl“ geworfen hat, würde sich bei allen fünf Personen näher bei 0,5 einpendeln: Je öfter der Versuch durchgeführt wird, desto stärker stabilisiert sich die relative Häufigkeit des Ergebnisses „Zahl“ um einen festen Zahlenwert.