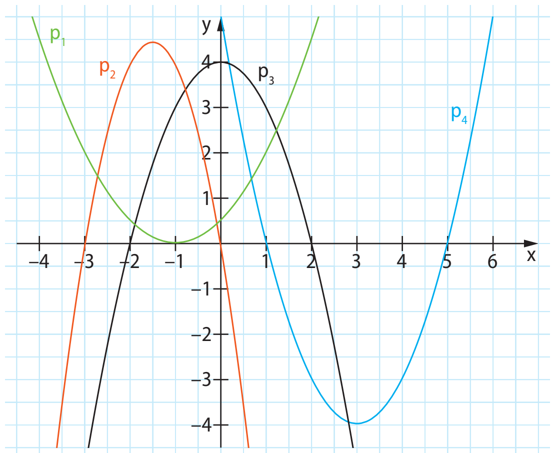
3 Startklar!

Aufgabe	Ich kann schon …	Grundwissen
1, 2	… quadratische Funktionen und ihre Eigenschaften untersuchen.	S. xxx
3, 4	… die Lagebeziehungen von Geraden und Parabeln beurteilen.	S. xxx
5	… die Eigenschaften quadratischer Funktionen für die Lösung von Sachaufgaben nutzen.	S. xxx

1 Dargestellt sind die Graphen der quadratischen Funktionen p_1 bis p_4. Bestimmen Sie Eigenschaften der Funktionen. Denken Sie dabei an Scheitelpunkt, Definitions- und Wertemenge, Achsenschnittpunkte und Symmetrie.



2 Bestimmen Sie zunächst mithilfe der Diskriminante die Anzahl der Nullstellen und dann die möglichen Nullstellen selbst.

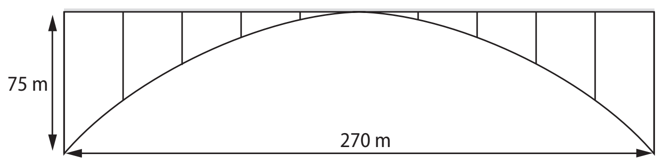
1 $2x^2 - 10x + 21 = 0$	**2** $-x^2 - 10x - 10{,}5 = 0$
3 $3x^2 + 6x - 105 = 0$	**4** $3{,}5x^2 = 1{,}75x + 5{,}25$
5 $100x \cdot (x + 3) = 559$	**6** $4x^2 - 9 = -x^2 + 16$

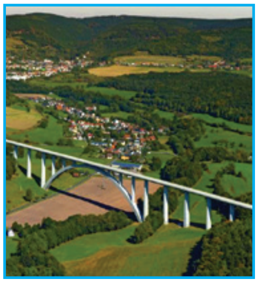
3 Geben Sie die Gleichung einer Parabel p und einer Geraden g an, die ...

a) keinen Punkt gemeinsam haben.
b) die beiden Punkte $P\,(-2\,|\,4)$ und $Q\,(2\,|\,4)$ gemeinsam haben.
c) nur den Punkt $R\,(-1\,|\,2)$ gemeinsam haben.
d) mit der Geraden h mit der Gleichung $x = 3$ denselben Punkt gemeinsam haben.

4 Gegeben ist die Gleichung $x^2 - x - 3 = 0{,}5x + 1{,}5$. Lösen Sie die Gleichung graphisch und rechnerisch.

5 Bei vielen Brücken überspannt ein Parabelbogen ein Tal. Die Fahrbahn wird dabei von Haltepfeilern getragen, die in regelmäßigen Abständen angeordnet sind. Die Grafik stellt eine vereinfachte Vorderansicht des Parabelbogens der Grümpentalbrücke dar.





a) Skizzieren Sie die Brückenansicht in einem Koordinatensystem. Wählen Sie geschickt die Lage des Koordinatenursprungs.
b) Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für die Parabel. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
c) Bestimmen Sie die Länge aller Pfeiler der Brücke.

3 Fortsetzung der Differentialrechnung

Einstieg

Eine Kinderrutsche soll in der Planung mathematisch modelliert werden.

- Das seitliche Profil der Rutsche soll in der Planung zunächst durch einen Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden. Beschreiben Sie ein mögliches Vorgehen, um einen passenden Funktionsterm zu finden.
- Der Anfang und das Ende der Rutschbahn sind besondere Stellen der Funktion. Nennen Sie Eigenschaften der Funktion an diesen beiden Punkten. Geben Sie an, welche Aussagen Sie über die Steigung in diesen beiden Punkten machen können.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels haben Sie gelernt, …

- … lokale und globale Extrempunkte einer Funktion zu unterscheiden.
- … das Krümmungsverhalten einer Funktion zu beschreiben.
- … Wendepunkte einer Funktion zu bestimmen.
- … die Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen mithilfe von Ableitungsfunktionen zu untersuchen.
- … Extremwertaufgaben zu erkennen und zu lösen.

3 Rundreise

Die Differentialrechnung ist ein wichtiger Bestandteil der Analysis mit dem sich viele Situationen in der Berufs- und Lebenswelt modellieren lassen. Die Anfänge gehen auf Pierre de Fermat zurück, welcher eine „Methode" entwickelte, um beispielsweise Extremstellen (das sind besondere Stellen von Funktionen) zu bestimmen. René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz und viele andere führten die Ansätze von Fermat fort.

Kap. 3.2

Pierre de Fermat

Der französische Mathematiker und Jurist Pierre de Fermat (1608 – 1665) erkennt wohl als einer der Ersten den Zusammenhang zwischen Extrempunkten und der Steigung von Tangenten an den Graphen einer Funktion. In seiner Arbeit *Abhandlungen über Maxima und Minima (1629)* gelingt es ihm, einfache Extremwerte zu berechnen sowie die Tangenten an ausgewählte Graphen in vorgegebenen Punkten zu konstruieren.

- Recherchieren Sie über die *Methode zur Bestimmung eines Maximums und Minimums* und gestalten Sie ein Plakat mit einer anschaulichen Erklärung.
- Informieren Sie sich über Fermats Methode, Tangenten an Graphen in gegebenen Punkten zu bestimmen.

Kap. 3.2

Wer bin ich?

Der gesuchte britische Wissenschaftler lebte von 1642 – 1726. Er wuchs unter schwierigen Verhältnissen auf, musste sein Studium wegen der Pest unterbrechen und widmete sich daher längere Zeit selbstständig seinen Forschungen. Vor allem Probleme der Optik, Algebra und der Mechanik beschäftigten ihn. Nach der Pest wurde er u. a. Lehrer für Mathematik und legte 1684 den Grundstein für seine größten Entdeckungen in der Schrift *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Dieses Werk, welches sich hauptsächlich mit der Gravitationslehre beschäftigt, machte ihn international berühmt.

- Finden Sie heraus, um welchen bedeutenden Wissenschaftler es sich handelt.
- Recherchieren Sie seine Ideen und seinen Methoden bei der Behandlung geometrischer Probleme, z. B.: bei der Ermittlung von Extrempunkten und von Tangenten. Stellen Sie Ihre Ergebnisse kurz vor.

Kap. 3.3

L'Hôpital und Bernoulli

„Ich bin fest davon überzeugt, dass es auf der ganzen Welt kaum einen Mathematiker gibt, der mit Ihnen verglichen werden kann", schreibt L'Hôpital in einem Brief an Johann Bernoulli.

L'Hôpital galt zu seiner Zeit als bester französischer Mathematiker. Er hatte mit dem Wissenschaftler Johann Bernoulli eine äußerst ungewöhnliche Abmachung abgeschlossen.

- Finden Sie heraus, um welche Abmachung es sich handelte und ob diese erfolgreich war.
- Recherchieren Sie, wie die nach l'Hôpital benannte Rechenregel für Grenzwerte lautet.

Kap. 3.4

Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz hat selbstständig eine Differentialrechnung entwickelt und u. a. die bis heute verwendete Schreibweise Δ für „Differenz" eingeführt.

- Recherchieren Sie, welche große Leistungen dieser Mathematiker im Bereich der Differentialrechnung geleistet hat.
- Präsentieren Sie Ihre Ergebnisse Ihrer Klasse.

Kap. 3.5

Iris Runge

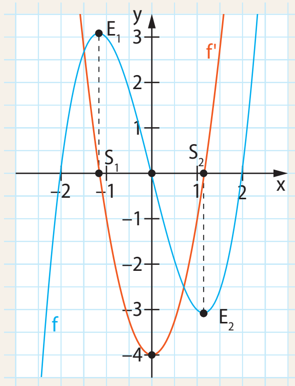
„Fast immer ergeben sich wertvolle Erkenntnisse, wenn es gelingt, eine Brücke zu schlagen zwischen bisher getrennten Wissensgebieten", meinte einst Iris Runge.

- Finden Sie heraus, was sie damit gemeint hat.
- Recherchieren Sie zudem, in welchen Bereichen Iris Runge die enge Zusammengehörigkeit von Wissenschaft und Praxis thematisierte. Präsentieren Sie Ihre Ergebnisse Ihrer Klasse.

Entdecken

Betrachten Sie die abgebildeten Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'.

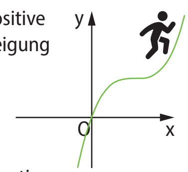
- Beschreiben Sie Zusammenhänge, die Sie zwischen dem Steigen bzw. Fallen des Funktionsgraphen von f und dem Verlauf des Graphen von f' erkennen.
- Stellen Sie allgemein eine Vermutung für den Zusammenhang zwischen dem Steigungsverhalten einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion auf.



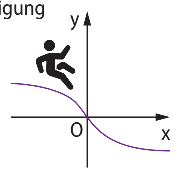
Verstehen

Das Steigungsverhalten des Graphen einer differenzierbaren Funktion lässt sich auch formal beschreiben.

positive Steigung



negative Steigung



Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall I aus der Definitionsmenge von f …

- streng monoton steigend, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt:
  $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.
- monoton steigend, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt:
  $f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.
- streng monoton fallend, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt:
  $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.
- monoton fallend, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt:
  $f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.

Ist die Funktion f im Intervall I differenzierbar, so gilt der **Monotoniesatz**:

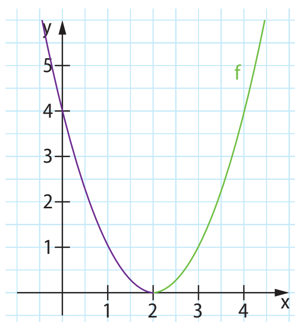
- Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist der Graph von f streng monoton steigend in I.
- Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist der Graph von f streng monoton fallend in I.
- Der Graph der Funktion f ist genau dann monoton steigend in I, wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
- Der Graph der Funktion f ist genau dann monoton fallend in I, wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

Beispiel

Ermitteln Sie jeweils das größtmögliche Intervall, in dem der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 4$; $D = \mathbb{R}$, …

a) streng monoton steigt. **b)** streng monoton fällt.

Veranschaulichen Sie diese Intervalle am Funktionsgraphen.



Lösung:

$f'(x) = 2x - 4$; $D = \mathbb{R}$

a) $f'(x) = 2x - 4 > 0$, d. h. $2x > 4$, also $x > 2$
Im Intervall $I_1 = [2; \infty[$ ist f streng monoton steigend.

b) $f'(x) < 0 = 2x - 4 < 0$, d. h. $2x < 4$, also $x < 2$
Im Intervall $I_2 =]-\infty; 2]$ ist f streng monoton fallend.

Nachgefragt

- Erklären Sie anschaulich den Unterschied zwischen „streng monoton“ und „monoton“.
- Begründen Sie anhand eines Beispiels, dass sich das Monotonieverhalten einer Funktion nicht zwingend in einem Punkt mit waagrechter Tangente ändern muss.
- Geben Sie an, in welchen Bereichen die folgenden Funktionen streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend sind:

  1 $f(x) = 2x - 1$ **2** $f(x) = -3x$ **3** $f(x) = x^2$ **4** $f(x) = -2x^2$

Aufgaben

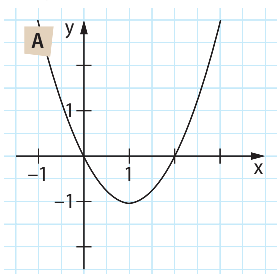
1 Untersuchen Sie jeweils die Funktion f graphisch und rechnerisch auf Monotonie.

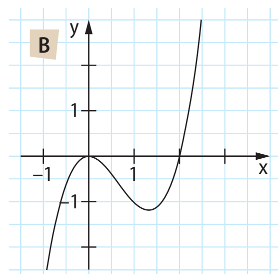
a) $f(x) = 2x + x^2;\ D = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = 0{,}25x^2 + x;\ D = \mathbb{R}$ **c)** $f(x) = x^3 + 4;\ D = \mathbb{R}$

d) $f(x) = x \cdot (x + 2)^2;\ D = \mathbb{R}$ **e)** $f(x) = \sqrt{2x};\ D = \mathbb{R}_0^+$ **f)** $f(x) = \frac{2}{x};\ D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

2 **1** $f(x) = (x - 1)^2 - 1;\ D = \mathbb{R}$ **2** $g(x) = x^3 - 2x^2;\ D = \mathbb{R}$

a) Ordnen Sie beiden Funktionen den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.



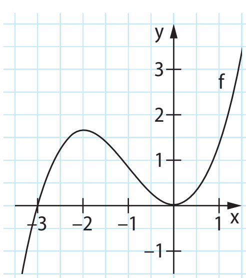


b) Ermitteln Sie rechnerisch die größtmöglichen Intervalle, in denen die jeweilige Funktion streng monoton fallend bzw. streng monoton steigend ist.

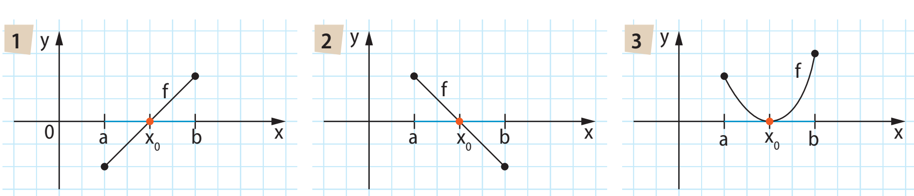
3 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}4x^3 + 1{,}2x^2;\ D = \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie die größtmöglichen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f …

1 streng monoton steigt.

2 streng monoton fällt.



4



a) Geben Sie für jeden der abgebildeten Funktionsgraphen das Monotonieverhalten der Funktion im Intervall $I = [a; b]$ an.

b) Ordnen Sie jeweils $f(a)$, $f(x_0)$ und $f(b)$ $(a < x_0 < b)$ sinnvoll in einer Ungleichungskette an. Begründen Sie Ihre Anordnung.

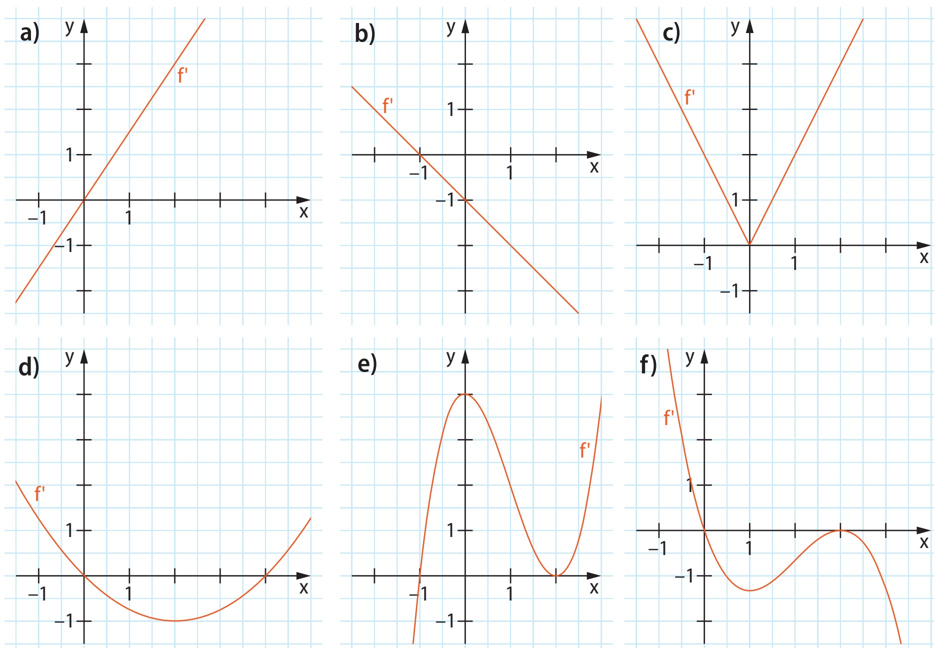
5 Ermitteln Sie jeweils alle Intervalle, in denen der Graph der Funktion f streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2$; $D = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $D =]-\infty; 0[$

6 Gegeben ist die Funktionsgleichung der Ableitung f' einer Funktion f mit $D = \mathbb{R}$. Finden Sie möglichst durch Überlegen heraus, in welchen Intervallen der Graph der Funktion f streng monoton steigt.

a) $f'(x) = x \cdot (x + 1)$ **b)** $f'(x) = (x - 1) \cdot (x - 3)$ **c)** $f'(x) = x^2 \cdot (x + 4)$
d) $f'(x) = x^3$ **e)** $f'(x) = x \cdot (x^2 + 4)$ **f)** $f'(x) = x^3 - 1$

7 Die Abbildungen zeigen jeweils den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten.



8 **a)** Begründen Sie, weshalb die folgende Aussage nicht aus dem Montoniesatz gefolgert werden kann.

„Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ ist streng monoton steigend, also ist die Ableitung nach dem Monotoniesatz stets postiv."

b) Im Falle der strengen Monotonie kann der Monotoniesatz nicht umgekehrt werden.

Weiterdenken

1 Ist der Graph einer Funktion f im Intervall I streng monoton steigend, kann man **nicht** darauf schließen, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$.

2 Ist der Graph einer Funktion f im Intervall I streng monoton fallend, kann man **nicht** darauf schließen, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$.

Finden Sie Beispiele für diese Nichtumkehrbarkeit des Monotoniesatzes bei strenger Monotonie.

9 f ist eine differenzierbare Funktion und I ein Intervall aus der Definitionsmenge D von f.

wenn	$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$	$f'(x) < 0$ für alle $x \in I$
f streng monoton steigend in I	f streng monoton fallend in I	dann ist

a) Formulieren Sie mit den vorgegebenen Satzteilen den Monotoniesatz für …
  1 streng monoton steigende Funktionen.
  2 streng monoton fallende Funktionen.
  Finden Sie für jeden Fall ein Beispiel.

b) Erklären Sie, welche weiteren Aussagen Sie treffen können, wenn statt „streng monoton" lediglich „monoton" betrachtet wird.

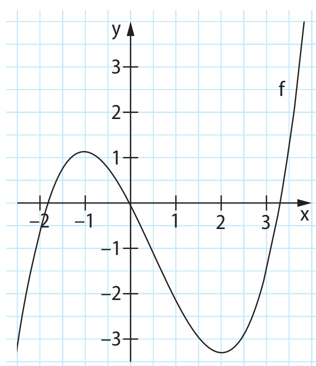
10 Ermitteln Sie jeweils die größtmöglichen Intervalle in der Definitionsmenge D, in denen f streng monoton steigt.

a) $f(x) = 0{,}25x^2 - 1$; $D = \mathbb{R}$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$; $D = \mathbb{R}$
c) $f(x) = x^4 - 6x^2$; $D = \mathbb{R}$
d) $f(x) = |x - 2|$; $D = \mathbb{R}$

11 Ermitteln Sie jeweils die größtmöglichen Intervalle in der Definitionsmenge D, in denen f streng monoton fällt.

a) $f(x) = x^3 - 3x$; $D = \mathbb{R}$
b) $f(x) = x^2 - 3x$; $D = \mathbb{R}$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$; $D = \mathbb{R}$
d) $f(x) = \sqrt{9x}$; $D = \mathbb{R}^+$

12 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$; $D = \mathbb{R}$.



a) Geben Sie die Intervalle an, in denen der Funktionsgraph streng monoton steigt und das Intervall, in dem der Funktionsgraph streng monoton fällt.

b) Bestimmen Sie in den Punkten S (– 2 | f(– 2)), P (– 1 | f(– 1)), O (0 | f(0)), R (2 | f(2)) und T (3 | f(3)) jeweils die Steigung der Tangente an den Graphen von f.

c) Geben Sie an, welche Aussagen man über die Tangentensteigung für die in Teilaufgabe a) ermittelten Intervalle machen kann.

13 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f_a in Abhängigkeit vom Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) $f_a(x) = a - x^2$; $D = \mathbb{R}$
b) $f_a(x) = ax - x^2$; $D = \mathbb{R}$
c) $f_a(x) = 4 - ax^2$; $D = \mathbb{R}$
d) $f_a(x) = a^2x^3 - ax^2$; $D = \mathbb{R}$

14 1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$; $D = \mathbb{R}$ 2 $f(x) = 0{,}25x^4 + ax^2$; $D = \mathbb{R}$

a) Finden Sie jeweils heraus, für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ der Graph der Funktion f keine, genau eine bzw. mehr als eine waagrechte Tangente besitzt.

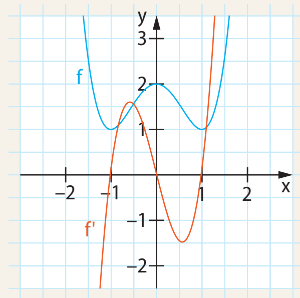
b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f in Abhängigkeit vom Wert des Parameters $a \in \mathbb{R}$.

c) Beschreiben Sie die Lage derjenigen Punkte, in denen sich das Monotonierverhalten der Funktion f ändert.

Entdecken

In der nebenstehenden Abbildung sehen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

- Geben Sie an, welche Rückschlüsse man vom Verlauf des Ableitungsgraphen auf den Verlauf des Ausgangsgraphen und umgekehrt schließen kann. Erstellen Sie eine Übersicht.
- Beschreiben Sie die Punkte von f, in denen f' das Vorzeichen wechselt.

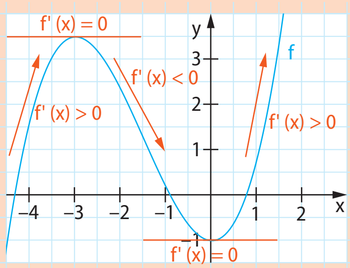


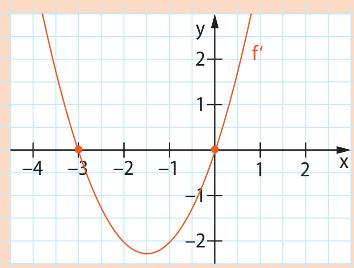
Verstehen

Mithilfe des Monotonieverhaltens kann der Graph einer Funktion weiter untersucht werden.

Notwendiges Kriterium für Extremstellen: $f'(x_0) = 0$

Unter **Extrempunkten** versteht man diejenigen Punkte am Graphen einer Funktion, die in einer Umgebung entweder der höchste Punkt (Hochpunkt) oder der tiefste Punkt (Tiefpunkt) sind. Für eine differenzierbare Funktion f gilt: In jeder Extremstelle x_0 besitzt der Graph von f eine waagrechte Tangente, d.h. $f'(x_0) = 0$.





Hinreichendes Kriterium für Extremstellen: Vorzeichenwechsel von f'.

Die y-Koordinate eines Hochpunkts nennt man Maximum, die eines Tiefpunkts Minimum.

Das Monotonieverhalten eines Funktionsgraphen ändert sich in seinen Extrempunkten.

Vorzeichenwechselkriterium:

- Ein **Hochpunkt** $H(x_0 | f(x_0))$ liegt vor, wenn die Steigung von f in x_0 von streng monoton steigend zu streng monoton fallend wechselt: $f'(x) > 0$ zu $f'(x) < 0$.
- Ein **Tiefpunkt** $T(x_0 | f(x_0))$ liegt vor, wenn die Steigung von f in x_0 von streng monoton fallend zu streng monoton steigend wechselt: $f'(x) < 0$ zu $f'(x) > 0$.

Die Ableitungsfunktion f' einer differenzierbaren Funktion f heißt **erste Ableitung von f**.

Beispiel

Untersuchen Sie die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$ auf Hoch- und Tiefpunkte. Skizzieren Sie den Graphen.

Lösung:

1 Erste Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

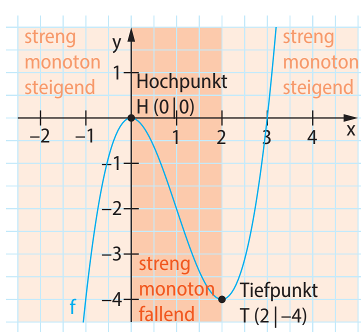
2 Nullstellen der ersten Ableitung: $f'(x) = 0$, d.h. $3x^2 - 6x = 3x \cdot (x - 2) = 0$, also $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

3 Vorzeichenwechsel der Ableitung:

x	$x < 0$	$x_1 = 0$	$0 < x < 2$	$x_2 = 2$	$x > 2$
f'	$f'(x) > 0$	$f'(x_1) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x_2) = 0$	$f'(x) > 0$

Hochpunkt H (0|0) Tiefpunkt T (2|−4)

Die y-Koordinate eines Extrempunkts erhalten Sie, indem Sie die Extremstelle x_0 in die Funktionsgleichung von f einsetzen.



Nachgefragt

- Begründen Sie anschaulich, dass $f'(x_0) = 0$ eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für Extrempunkte ist, d. h. alleine aus $f'(x_0) = 0$ kann man nicht auf einen Extrempunkt schließen.
- Begründen Sie die Notwendigkeit des Vorzeichenwechselkriteriums für das Vorhandensein eines Extrempunkts.
- „Ein Hochpunkt muss nicht unbedingt der höchste Punkt des Graphen einer Funktion sein." Erklären Sie die Aussage anhand passender Beispiele.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion f ($D = \mathbb{R}$). Geben Sie mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums die Art des Extrempunkts an. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

a) $f(x) = 0{,}2x^2 - 1{,}6x + 1$
b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3$
c) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - 0{,}75x^2 + \frac{5}{4}x$
d) $f(x) = x^3 - 6x$
e) $f(x) = 0{,}25x^2 - 2x - 2$
f) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$

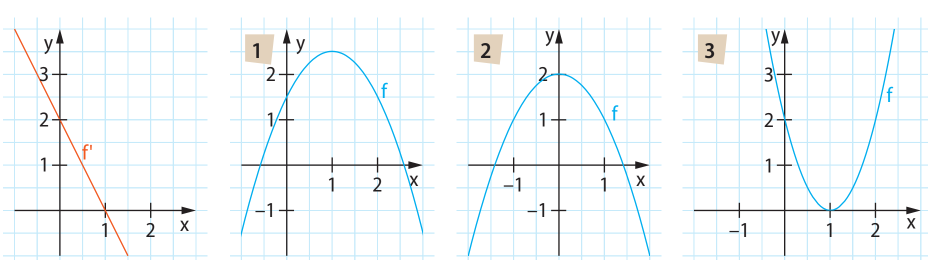
2

1 $f(x) = x^2 - 6x + 9$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 3$
2 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 0{,}5$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = -3$
3 $f(x) = x^4 + x^2$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$
4 $f(x) = x^3 - 3x^2$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 2$
5 $f(x) = 3x^3 - x^2$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 3$
6 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 1$

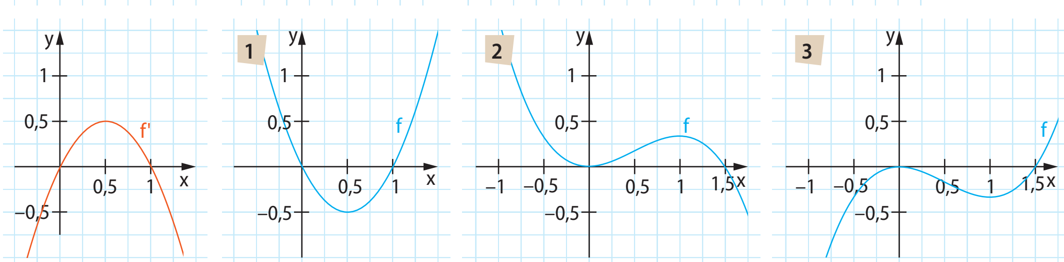
Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ ein Extrempunkt des Graphen von f ist. Entscheiden Sie, falls ein Extrempunkt vorliegt, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt des Graphen von f handelt.

3 Die Abbildungen **1** bis **3** zeigen jeweils den Graphen einer Funktion f. Die linke Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer der drei Funktionen. Begründen Sie mithilfe der Extrempunkte und des Vorzeichenwechselkriteriums, welcher Graph von f zum Graphen von f' gehört.

a)



b)



4 Ermitteln Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f ($D = \mathbb{R}$).
a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x + 2$ **c)** $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
d) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ **e)** $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 2)$ **f)** $f(x) = (x^2 - 1)^2$

5 Hoch- und Tiefpunkte sind in einer Umgebung des jeweiligen Punkts die höchsten bzw. tiefsten Punkte des Graphen einer Funktion.

Weiterdenken

Ist der Extrempunkt der höchste bzw. tiefste Punkt des gesamten Graphen, spricht man von einem **globalen Extrempunkt**. Ist dies nicht der Fall, liegt ein **lokaler Extrempunkt** vor.

Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f ($D = \mathbb{R}$) bezüglich lokaler und globaler Extrempunkte. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.
a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 6$ **b)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
c) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ **d)** $f(x) = (-1) \cdot (x^4 - 4x^2 + 4)$

6 **1** $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 2$ **2** $f(x) = 0{,}25x^4 + x^3 + x^2 + 1$
3 $f(x) = x^2 - 7x + 13$ **4** $f(x) = -3x^5 + 10x^3 - 15x$
5 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ **6** $f(x) = (x^2 - 1)^2$
a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
b) Ermitteln Sie die lokalen und globalen Extrempunkte des Graphen von f, sofern diese existieren. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

7 Zeigen Sie, dass die Ableitungsfunktion f' der Funktion f ($D = \mathbb{R}$) eine Nullstelle besitzt, die jedoch keine lokale Extremstelle von f ist. Skizzieren Sie den Graphen von f.
a) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$ **b)** $f(x) = -x^5 - 3x^3 + 1$

8 **a)** Beschreiben Sie das Vorgehen zur Bestimmung der globalen Extrempunkte des Graphen einer Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall.

Um globale Extrempunkte des Graphen einer Funktion f in einem abgeschlossenen Intervall [a; b] zu bestimmen, kann man folgendermaßen vorgehen:
1 Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte $(x_1 | f(x_1)), \dots, (x_n | f(x_n))$ im offenen Intervall]a; b[.
2 Bestimmen Sie zudem die Randpunkte $(a | f(a))$ und $(b | f(b))$.
3 Der globale Hochpunkt (Tiefpunkt) des Graphen von f über dem Intervall [a; b] ist der höchste (tiefste) der Punkte aus **1** und **2**.

b) Begründen Sie: Eine Extremstelle in einem abgeschlossenen Intervall kann auch am Rand des Intervalls liegen. Dabei muss die Tangente nicht parallel zur x-Achse sein.
c) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f im angegebenen Intervall.

1 $f(x) = x^3 - 3x^2; I = [-1; 3]$ **2** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 19; I = [-3; 4]$
3 $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 6x^2 + 9x - 8); I = [0; 5]$ **4** $f(x) = x^2 - 4x + 5; I = \left[-1; \frac{5}{2}\right]$

d) Beschreiben Sie Ihr Vorgehen bei Intervallen der Form]a; b] bzw. [a; b[.

9 Geben Sie eine Funktion f und ein dazugehöriges Intervall I an, sodass die Funktion in diesem Intervall…

a) einen Hochpunkt, aber keinen Tiefpunkt besitzt.
b) einen Tiefpunkt, aber keinen Hochpunkt besitzt.
c) sowohl einen Hochpunkt als auch einen Tiefpunkt besitzt.
d) den globalen Hochpunkt als Randpunkt des Intervalls I besitzt.

10 Berechnen Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Ordnen Sie die Lösungen zu. In der vorgegebenen Reihenfolge ergeben die Lösungen ein Lösungswort.

1 $f(x) = 3x^3 - 16x$
2 $f(x) = x^2 + 2x + 3$
3 $f(x) = 3x - x^3$
4 $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$
5 $f(x) = x^4 + 32x + 49$
6 $f(x) = x^5 - 15x^3$
7 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$
8 $f(x) = \frac{4}{3}x^6 - \frac{1}{3}x^3$

E $(-3\,|\,162); (3\,|\,-162)$
H $(-2\,|\,1)$
N $(-1\,|\,-2); (1\,|\,2)$
M $(0{,}5\,|\,-0{,}02)$
I $(-3\,|\,28); (1\,|\,-4)$
N $(0\,|\,0)$
A $(-1\,|\,2)$
M $\left(-\frac{4}{3}\,\middle|\,14\frac{2}{9}\right); \left(\frac{4}{3}\,\middle|\,-14\frac{2}{9}\right)$

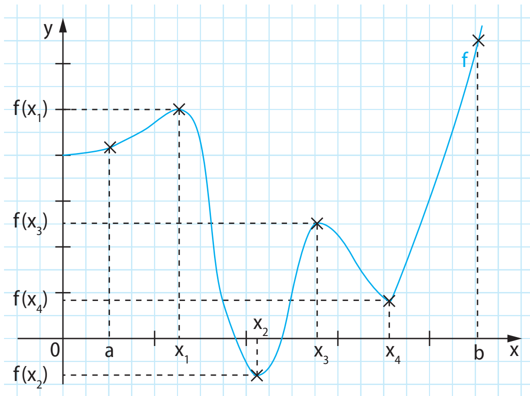
11 Gegeben ist eine Funktion f_a mit Parameter $a \in \mathbb{R}$.

1 $f_a(x) = x^3 - ax$
2 $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 + ax$
3 $f_a(x) = 2x^4 + ax^2$

a) Erklären Sie den Unterschied zwischen den Variablen a und x in der Funktionsgleichung.
b) Beschreiben Sie, wie die Anzahl der Extrempunkte des Graphen von f_a von der Wahl des Parameters a abhängt.
c) Skizzieren Sie jeweils den Graphen von f_a.

12 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f im Intervall [a; b].

a) Beschreiben Sie die Lage aller lokalen und globalen Extrempunkte.
b) Ist es möglich, dass eine Funktion mehrere globale Hoch- und Tiefpunkte besitzt? Begründen Sie.
c) Erklären Sie, wie viele lokale Extrempunkte eine ganzrationale Funktion n-ten Grades ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$) höchstens besitzen kann.



13 Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

„Es gibt ganzrationale Funktionen f mit $D = \mathbb{R}$, deren Graphen keine lokalen Extrempunkte besitzen.“

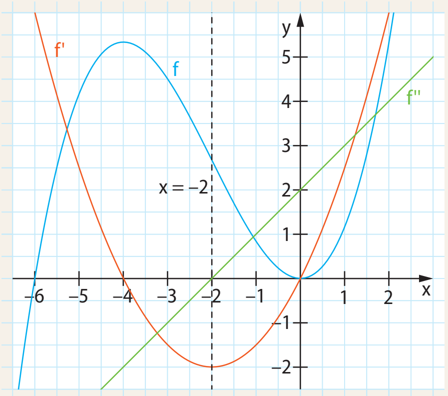
„Ein Tiefpunkt des Graphen einer Funktion f kann höher liegen als ein Hochpunkt derselben Funktion.“

Entdecken

f'' ist die Ableitungsfunktion von f'.

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2$, der Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$ und der Ableitungsfunktion f'' (der Funktion f') mit $f''(x) = x + 2$.

- Untersuchen Sie die Zusammenhänge zwischen den Graphen der Funktionen f, f' und f'' an der markierten Stelle $x = -2$.
- Untersuchen Sie die Bedeutung positiver und negativer Werte von f'' auf den Graphen von f.



Verstehen

Mithilfe der zweiten Ableitungsfunktion f'' einer Funktion f, also der Ableitung von f', kann man weitere Eigenschaften des Graphen von f untersuchen.

Die **zweite Ableitungsfunktion f''** einer zweimal differenzierbaren Funktion f (kurz: **zweite Ableitung von f**) erhält man durch Ableiten von f'. Sie gibt Auskunft über das Krümmungsverhalten des Graphen von f.

Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist der Graph von f auf diesem Intervall **linksgekrümmt**.

Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist der Graph von f auf diesem Intervall **rechtsgekrümmt**.

Notwendiges Kriterium für Wendestellen: $f''(x_0) = 0$

Hinreichendes Kriterium für Wendestellen: Vorzeichenwechsel von f''.

Das Krümmungsverhalten ändert sich in den sogenannten **Wendestellen x_0**. An den Wendestellen von f hat die Ableitungsfunktion f' ihre Extremstellen. Somit gilt dort: $f''(x_0) = 0$. Liegt ein Wendepunkt vor, wechselt der Graph von f an der Wendestelle von einer Links- in eine Rechtskrümmung bzw. von einer Rechts- in eine Linkskrümmung.

Beispiel

Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2$.

Lösung:

1 Erste und zweite Ableitung:
$f'(x) = 2x^3 - 6x$
$f''(x) = 6x^2 - 6$

2 Nullstellen der zweiten Ableitung:
$f''(x) = 0$, d. h. $6x^2 - 6 = 0$, also $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

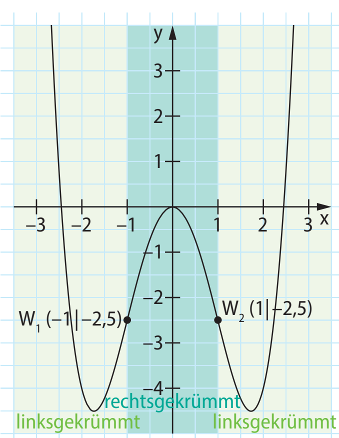
3 Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung:

Die y-Koordinate eines Wendepunkts erhalten Sie, indem Sie die Wendestelle in die Funktionsgleichung einsetzen.

x	$x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 1$	$x_2 = 1$	$x > 1$
f''	$f''(x) > 0$	$f''(x_1) = 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x_2) = 0$	$f''(x) > 0$

Wendepunkt $W_1(-1\,|\,-2{,}5)$

Wendepunkt $W_2(1\,|\,-2{,}5)$



Nachgefragt

- Begründen Sie, dass es sich bei den Wendepunkten des Graphen der Funktion f um die Extrempunkte des Graphen von f' handelt.
- Erklären Sie anschaulich am Beispiel eines selbstgewählten Graphen die Links- und Rechtskrümmung einer Funktion.
- Begründen Sie mithilfe des Krümmungsverhaltens, dass an einem Wendepunkt $W(x_0 | f(x_0))$ immer die Bedingung $f''(x_0) = 0$ gelten muss.

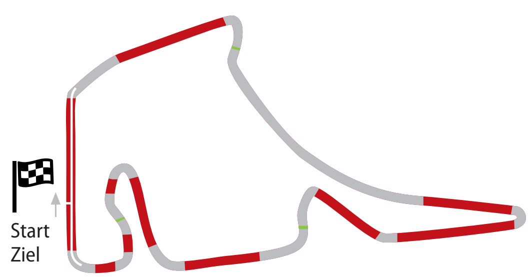
Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Wendepunkte und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f wie im Beispiel. Die Lösungen für die Wendepunkte ergeben in der Reihenfolge der Aufgaben ein Lösungswort.

1 $f(x) = x^3 + 1$
2 $f(x) = x^4 - 2x^3$
3 $f(x) = -3x^3 + 12x + 3$
4 $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 27x + 3$
5 $f(x) = -3x^2 + 2x + x^3$
6 $f(x) = 2 + x - 6x^2 + x^4$
7 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

I $W_1(-1|4); W_2(1|-2)$ **N** $W(1|0)$
E $W_1(0|0), W_2(1|-1)$ **L** $W(1|0)$
Z $W\left(2\middle|\frac{2}{3}\right)$ **I** $W(0|3)$ **B** $W(-1|36)$

2 Die Abbildung zeigt den Streckenverlauf des Hockenheimrings nach dem Umbau im Jahr 2002. Rot gekennzeichnet sind Streckenabschnitte, auf denen die Fahrzeuge geradeaus fahren und deshalb die Lenkung keinen Einschlag nach links oder nach rechts aufweist.



a) Nehmen Sie an, Sie sitzen in einem Auto und fahren den Hockenheimring. Beschreiben Sie, wie viele Streckenabschnitte Sie mit Rechts- bzw. Linkseinschlag des Lenkrads durchfahren.

b) Beschreiben Sie die Lage derjenigen Punkte auf dieser Strecke, bei denen der Fahrer von Rechts- auf Linkseinschlag oder von Links- auf Rechtseinschlag wechselt. Die geraden Streckenabschnitte werden dabei nicht berücksichtigt.

3 Die Steigung der Tangente im Wendepunkt zeigt eine weitere Eigenschaft.

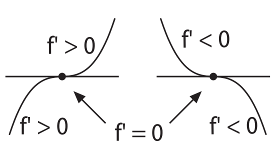
Die Tangente im Wendepunkt des Graphen einer Funktion f nennt man auch **Wendetangente**. Ein Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente heißt **Sattelpunkt**.

a) Erklären Sie mithilfe des Monotonieverhaltens des Graphen einer Funktion, dass für Sattelpunkte $f'(x_0) = 0$ gilt, die Ableitung f' ihr Vorzeichen jedoch nicht in x_0 wechselt.

b) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Extrempunkte und Sattelpunkte. Begründen Sie Sattelpunkte sowohl mithilfe des Monotonieverhaltens der Funktion f als auch mit den Wendetangenten.

1 $f(x) = x^3$ **2** $f(x) = x^3 - 3x$ **3** $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - 2x^3$

Weiterdenken



Sattelpunkt: Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente

4 Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1$.

a) Untersuchen Sie den Graph der Funktion f auf Wendepunkte.

b) Bestimmen Sie jeweils die Steigung und die Gleichung der Wendetangente.

5 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ | $g(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ | $h(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte und die Wendepunkte der Graphen der gegebenen Funktionen. Untersuchen Sie weiter das Krümmungsverhalten.

b) Berechnen Sie jeweils die Steigungen der Tangenten an den Wendepunkten. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen und zeichnen Sie die Wendetangenten ein.

6
1 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$
2 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$
3 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 4{,}5x$
4 $f(x) = -4 + 11x + x^3 - 6x^2$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

b) Geben Sie die Intervalle an, in denen der Graph der Funktion links- bzw. rechtsgekrümmt ist.

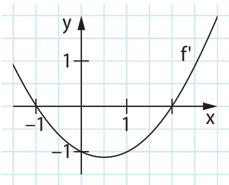
7 Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f. Finden Sie heraus, ...

a) in welchem Intervall der Graph von f rechtsgekrümmt ist.

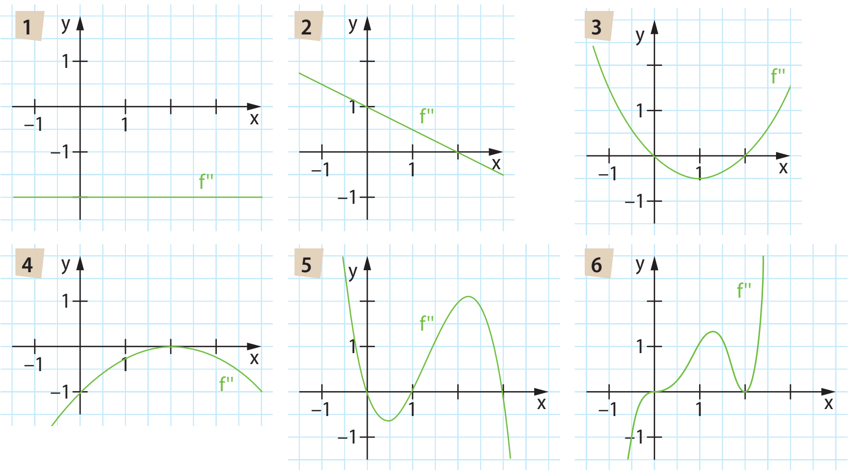
b) in welchem Intervall der Graph von f linksgekrümmt ist.

c) ob (und an welcher Stelle) f eine Wendestelle besitzt.

d) ob (und an welchen Stellen) f Extremstellen besitzt.



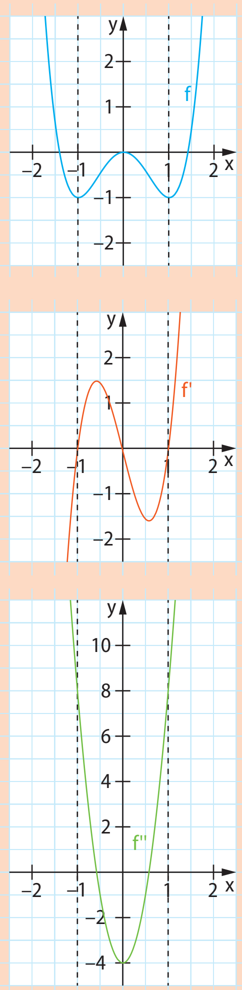
8 Die Abbildungen zeigen die Graphen der zweiten Ableitungsfunktionen f'' von ganzrationalen Funktionen f.



a) Geben Sie jeweils die Intervalle an, in denen der Graph von f rechtsgekrümmt ist, sowie die Intervalle, in denen der Graph von f linksgekrümmt ist.

b) Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen der Funktion f. Geben Sie – falls vorhanden – Sattelpunkte an.

9 Bisher haben Sie zur Untersuchung auf Extrempunkte das Vorzeichenwechselkriterium als hinreichendes Kriterium kennengelernt. Für eine zweifach differenzierbare Funktionen f kann man auch die zweite Ableitung nutzen.



Notwendige Bedingung für eine Extremstelle in x_0:
$f'(x_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle in x_0:

1 Vorzeichenwechselkriterium
Die erste Ableitung f' ändert ihr Vorzeichen in x_0.
- Der Graph von f hat einen Hochpunkt in $H(x_0 | f(x_0))$, wenn die Steigung von f in x_0 von positiv zu negativ wechselt.
- Der Graph von f hat einen Tiefpunkt in $T(x_0 | f(x_0))$, wenn die Steigung von f in x_0 von negativ zu positiv wechselt.

2 Kriterium der zweiten Ableitung
Die zweite Ableitung ist ungleich null in x_0.
- Der Graph von f hat einen Hochpunkt in $H(x_0 | f(x_0))$, wenn $f''(x_0) < 0$.
- Der Graph von f hat einen Tiefpunkt in $T(x_0 | f(x_0)$, wenn $f''(x_0) > 0$.

Weiterdenken

a) Begründen Sie die hinreichende Bedingung mithilfe der zweiten Ableitung bei der Bestimmung von Extrempunkten.

b) Jule meint: „Bei der Untersuchung der Extremstellen ist das Vorzeichenwechselkriterium stärker als das Kriterium der zweiten Ableitung: Will ich bei der Funktion f mit $f(x) = x^4$ das Kriterium der zweiten Ableitung anwenden, erhalte ich $f''(x) = 12x^2$ und damit $f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$. Das Kriterium der zweiten Ableitung ist also nicht erfüllt. Trotzdem kann ich mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums erkennen, dass ein Extrempunkt vorliegt."
Begründen und erläutern Sie Jules Aussage.

Beachten Sie: Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, müssen Sie das Vorzeichenwechselkriterium anwenden.

c) Formulieren und begründen Sie für Wendepunkte ebenfalls ein weiteres hinreichendes Kriterium mithilfe der dritten Ableitung. Vergleichen Sie dieses Kriterium mit dem Kriterium des Vorzeichenwechsels der zweiten Ableitung.

Die dritte Ableitung erhält man, indem man f'' noch einmal ableitet.

10 Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen der Funktion f. Verwenden Sie das …

a) Vorzeichenwechselkriterium. **b)** Kriterium der zweiten Ableitung.

1 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ **2** $f(x) = 0{,}25 \cdot (x^4 - 8x)$ **3** $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$

11 Ermitteln Sie jeweils die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion f mit einem Kriterium Ihrer Wahl.

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x;\ D = \mathbb{R}$
b) $f(x) = x^3 - 6x + 2;\ D = \mathbb{R}$
c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4;\ D = \mathbb{R}$
d) $f(x) = x^3 - 3x + 2;\ D = \mathbb{R}$
e) $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 2);\ D = \mathbb{R}$
f) $f(x) = (x^2 - 1)^2;\ D = \mathbb{R}$

12

1 $f(x) = x^2 - 3x + 1;\ D = \mathbb{R}$

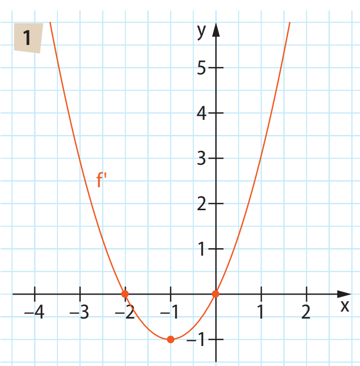
2 $f(x) = x^3 - 3x^2;\ D = \mathbb{R}$

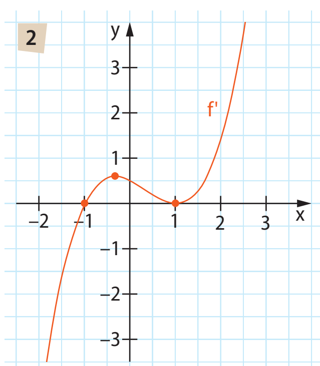
3 $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 1;\ D = \mathbb{R}$

4 $f(x) = x^6 - 2x^4 - 3x^2;\ D = \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie jeweils die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechtsgekrümmt ist, und die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f linksgekrümmt ist. Ermitteln Sie dann die Koordinaten aller Wendepunkte des Graphen von f.
b) Untersuchen Sie für jeden Wendepunkt die Steigung der Wendetangente.
c) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

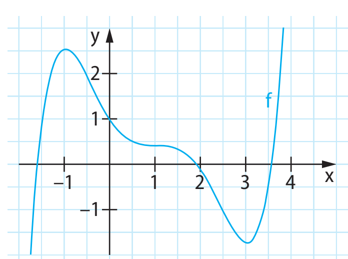
13 Die Abbildungen zeigen jeweils den Graphen einer Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.





a) Übertragen Sie die Graphen in Ihr Heft und skizzieren Sie dann dort jeweils den Graphen der Funktion f''. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte und Wendepunkte des Graphen von f. Prüfen Sie, ob Sattelpunkte vorhanden sind und geben Sie diese ggf. an.

14 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x + 1;\ D = \mathbb{R}$.
Zeigen Sie rechnerisch, dass der ...
a) Punkt H $(-1\,|\,f(-1))$ Hochpunkt des Graphen von f ist.
b) Punkt T $(3\,|\,f(3))$ Tiefpunkt des Graphen von f ist.
c) Punkt W $(1\,|\,f(1))$ Sattelpunkt des Graphen von f ist.

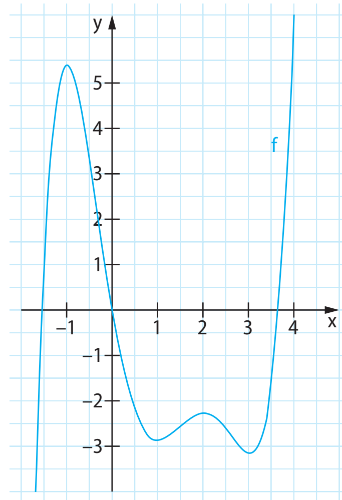


15 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x$; $D = \mathbb{R}$.

a) Entnehmen Sie der Abbildung sämtliche Extrempunkte des Graphen von f und überprüfen Sie die von Ihnen abgelesenen Koordinaten rechnerisch.

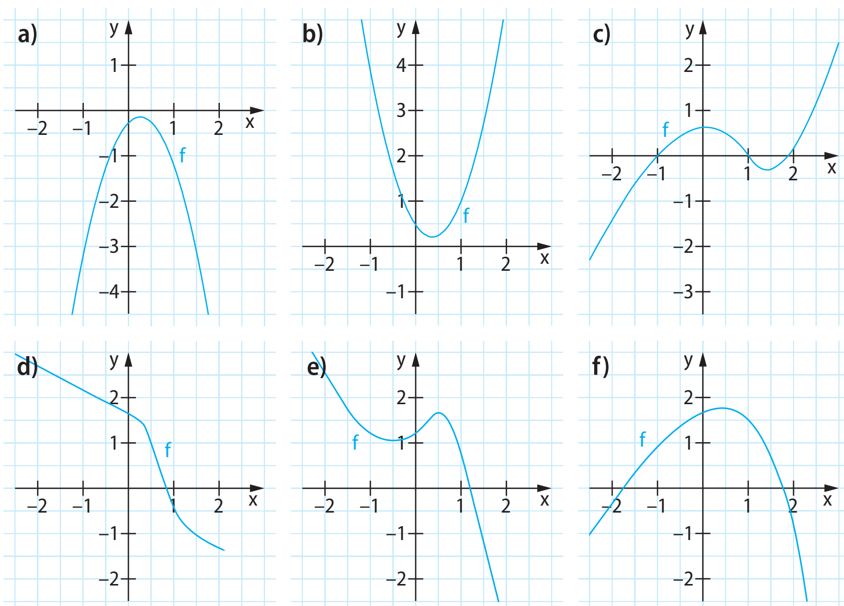
b) Schätzen Sie die Steigung der Tangente t_O an den Graphen von f im Ursprung O (0|0). Überprüfen Sie Ihren Schätzwert rechnerisch und geben Sie eine Gleichung von t_O an.

c) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den die Tangente t_O aus Teilaufgabe b) mit der positiven x-Achse bildet.



16 Weisen Sie nach, dass alle drei Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}15x^5 + 2x^3 - 5x - 2$; $D = \mathbb{R}$, auf einer Geraden liegen.

17 Die Abbildungen zeigen die Graphen von sechs Funktionen f.



Begründen Sie, für welche dieser Funktionen alle der drei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1 $f'(0) > 0$

2 $f'(1) < 0$

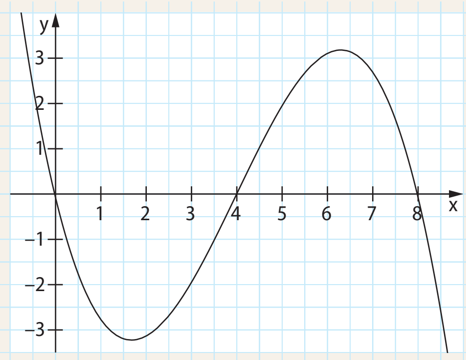
3 $f''(x) < 0$ für alle $x \in D$

18 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^3$; $D = \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte W_1 und W_2 ($x_{W2} > x_{W1}$) und berechnen Sie die Länge der Strecke, die die beiden Koordinatenachsen aus der Wendetangente im Wendepunkt W_2 herausschneiden.

Entdecken

Der Querschnitt einer Berg-See-Landschaft kann modellhaft in einem vorgegebenen Intervall durch den abgebildeten Graphen beschrieben werden.

- Lesen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte aus dem Koordinatensystem heraus. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Extrempunkte im Sachzusammenhang.
- Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstellen im Zusammenhang des Höhenprofils der Landschaft.



Verstehen

Untersucht man eine Funktion f auf ihre wichtigsten Eigenschaften, so nennt man dies eine Kurvendiskussion.

Folgende Eigenschaften werden bei einer **Kurvendiskussion** untersucht:

Definitionsmenge	▪ Menge D der zulässigen x-Werte
Symmetrie	▪ Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ ▪ Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$
Verhalten im Unendlichen	▪ Verhalten des Graphen von f für $x \to -\infty$ bzw. für $x \to \infty$
Wertemenge	▪ Menge W der y-Werte, die die Funktionsgleichung erfüllen.
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	▪ In Nullstellen schneidet der Graph von f die x-Achse, d. h. $f(x) = 0$. ▪ Für den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse gilt $x = 0$.
Extrempunkte und Monotonieverhalten	▪ Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f'(x_0) = 0$ ▪ Vorzeichenwechselkriterium: Hochpunkt: Die Steigung wechselt von positiv zu negativ, $f' > 0$ zu $f' < 0$. Tiefpunkt: Die Steigung wechselt von negativ zu positiv, $f' < 0$ zu $f' > 0$. ▪ $f' > 0$ (≥ 0) streng monoton steigend (monoton steigend) $f' < 0$ (≤ 0) streng monoton fallend (monoton fallend)
Wendepunkte und Krümmungsverhalten	▪ Notwendige Bedingung Wendepunkt: $f''(x_W) = 0$ ▪ Vorzeichenwechselkriterium: Ein Wendepunkt liegt bei einem Vorzeichenwechsel von f'' vor. ▪ $f'' > 0$ linksgekrümmt, $f'' < 0$ rechtsgekrümmt

Statt der Vorzeichenwechselkriterien können bei der Untersuchung von Extrem- und Wendepunkten auch oft die Kriterien der höheren Ableitungen verwendet werden (Kapitel 3.3, Aufgabe 9).

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^5 - 4x^3$; $D = \mathbb{R}$. Führen Sie eine Kurvendiskussion durch und zeichnen Sie anschließend den Graphen.

Lösung:

Definitionsmenge

$D = \mathbb{R}$

Symmetrie

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung O (0 | 0), denn alle auftretenden Exponenten sind ungerade. Alternativ kann man die Punktsymmetrie auch anhand des allgemeinen Kriteriums feststellen: $f(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 = -x^5 + 4x^3 = -(x^5 - 4x^3) = -f(x)$ für alle $x \in D$.

Verhalten im Unendlichen
$f(x) = x^5 - 4x^3 \to \infty$ für $x \to \infty$; $f(x) = x^5 - 4x^3 \to -\infty$ für $x \to -\infty$

Wertemenge
$W = \mathbb{R}$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen
- Nullstellen: $f(x) = 0$
  $x^5 - 4x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 4) \Leftrightarrow x^3 = 0$ und $x^2 - 4 = 0$, d. h.: $x_{N1} = -2$; $x_{N2} = 0$; $x_{N3} = 2$
- Schnittpunkte mit der y-Achse: $x = 0$; $f(0) = 0$; $S_y\,(0\,|\,0)$

Für das weitere Vorgehen ist es günstig, alle Ableitungen, die man anschließend für Monotonieverhalten, Extrempunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte benötigt, vorab zu bestimmen:
$f'(x) = 5x^4 - 12x^2$; $f''(x) = 20x^3 - 24x$

Extrempunkte und Monotonieverhalten
- Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$
  $5x^4 - 12x^2 = x^2 \cdot (5x^2 - 12) \Leftrightarrow x^2 = 0$ und $5x^2 - 12 = 0$, d. h.: $x_1 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{\frac{12}{5}}$
- Hinreichende Bedingung für Extremstellen: Vorzeichenwechselkriterium

x	$x < -\sqrt{\frac{12}{5}}$	$x_1 = -\sqrt{\frac{12}{5}}$	$-\sqrt{\frac{12}{5}} < x < 0$	$x_2 = 0$	$0 < x < \sqrt{\frac{12}{5}}$	$x_3 = \sqrt{\frac{12}{5}}$	$x > \sqrt{\frac{12}{5}}$
f'	$f'(x) > 0$	$f'(x_1) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x_2) = 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x_3) = 0$	$f'(x) > 0$

Hochpunkt
H (–1,5 | 6)

kein Extrempunkt
Sattelpunkt S (0 | 0)

Tiefpunkt
T (1,5 | –6)

Sie können auch das Kriterium der zweiten Ableitung verwenden:
$f''(x_1) < 0$
$f''(x_3) > 0$

- Monotonieverhalten (siehe Tabelle):
  streng monoton steigend auf $]-\infty; -\sqrt{\frac{12}{5}}]$ und $[\sqrt{\frac{12}{5}}; \infty[$
  streng monoton fallend auf $[-\sqrt{\frac{12}{5}}; \sqrt{\frac{12}{5}}]$

Nutzen Sie $\sqrt{\frac{12}{5}} \approx 1{,}5$. Beachten Sie die Punktsymmetrie.

Wendepunkte und Krümmungsverhalten
- Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$
  $20x^3 - 24x = 4x \cdot (5x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0$ und $5x^2 - 6 = 0$, d. h.: $x_1 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \sqrt{\frac{6}{5}}$
- Hinreichende Bedingung für Wendestellen: Vorzeichenwechselkriterium

x	$x < -\sqrt{\frac{6}{5}}$	$x_1 = -\sqrt{\frac{6}{5}}$	$-\sqrt{\frac{6}{5}} < x < 0$	$x_2 = 0$	$0 < x < \sqrt{\frac{6}{5}}$	$x_3 = \sqrt{\frac{6}{5}}$	$x > \sqrt{\frac{6}{5}}$
f''	$f''(x) < 0$	$f''(x_1) = 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x_2) = 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x_3) = 0$	$f''(x) > 0$

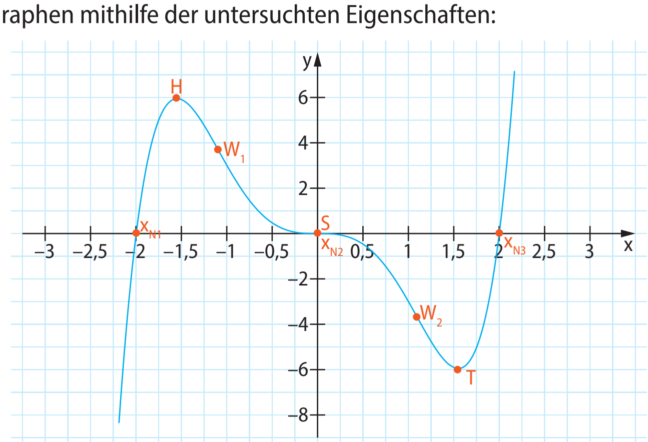
Wendepunkt
$W_1\,(-1{,}1\,|\,3{,}7)$

Sattelpunkt S (0 | 0)

Wendepunkt
$W_2\,(1{,}1\,|\,-3{,}7)$

Sie können auch das Kriterium der dritten Ableitung verwenden:
$f'''(x) = 60x^2 - 24$
f''' ist ungleich null an den Stellen x_1, x_2 und x_3.

Zeichnen des Graphen mithilfe der untersuchten Eigenschaften:



Nutzen Sie $\sqrt{\frac{6}{5}} \approx 1{,}1$ und beachten Sie die Punktsymmetrie.

Nachgefragt

- Erklären Sie, wie Sie die Symmetrie des Graphen einer Funktion bei der Kurvendiskussion nutzen können.
- Für eine zweimal differenzierbare Funktion f gilt an der Stelle $x_0 \in D$: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt das Vorzeichen in x_0.
  Beschreiben Sie, was Sie über den Punkt $P\,(x_0 \mid f(x_0))$ aussagen können.
- Welchen Grad hat eine ganzrationale Funktion mindestens, wenn ihr Graph drei Punkte mit waagrechter Tangente besitzt? Begründen Sie.

Aufgaben

1 Erklären Sie das Vorgehen bei der Kurvendiskussion im Beispiel.

2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 4)$; $D = \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat.

c) Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.

e) Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f und geben Sie zu jedem Wendepunkt eine Gleichung der Wendetangente an.

f) Zeichnen Sie den Graphen von f und tragen Sie die beiden Wendetangenten aus Teilaufgabe e) ein.

3

1 $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^2 - 4)^2$; $D = \mathbb{R}$

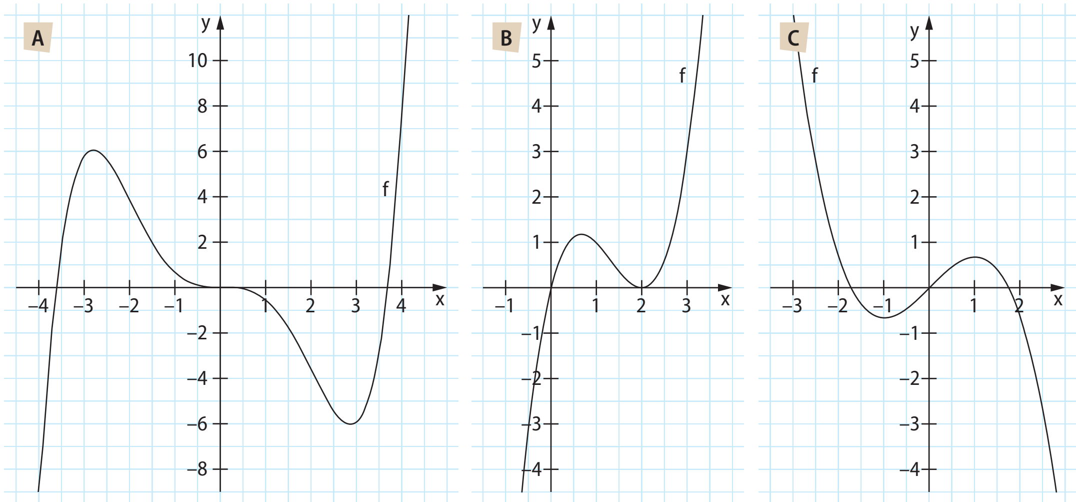
2 $f(x) = x - \frac{1}{3}x^3$; $D = \mathbb{R}$

3 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$; $D = \mathbb{R}$

4 $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3$; $D = \mathbb{R}$

a) Berechnen Sie bei jeder der vier Funktionen zunächst die Koordinaten der Punkte, die der Graph der Funktion mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat. Ermitteln Sie dann Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen.

b) Die Abbildungen zeigen drei der vier Funktionsgraphen. Ordnen Sie sie den passenden Funktionen zu. Begründen Sie Ihre Auswahl.



4 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ $h(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$

$i(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ $j(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ $k(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2$

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion durch und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
b) Zeichnen Sie den Graphen und markieren Sie alle besonderen Punkte.

5 Gegeben ist jeweils die Gleichung einer Funktion f und eine dazugehörige Eigenschaft. Ordnen Sie jeweils eine Karte mit einer Eigenschaft einer Funktionsgleichung zu und begründen Sie Ihre Entscheidung. Zeichnen Sie anschließend den Graphen.

1 $f(x) = \frac{1}{15}(x^3 - 3x^2 - 24x + 45)$; $D = \mathbb{R}$

3 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; $D = \mathbb{R}$

B Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in $x = -2$ und ein lokales Minimum in $x = 4$.

A Die Funktion f ist im Intervall $I_1 = [2; \infty[$ streng monoton steigend und im Intervall $I_2 =]-\infty; 2]$ streng monoton fallend.

D Die Funktion f hat zwei Nullstellen: $N_1(-3|0)$ und $N_2(0|0)$. Eine der beiden Nullstellen ist zudem ein lokaler Tiefpunkt.

C Der Punkt $W(0|0)$ ist ein Wendepunkt von f mit der x-Achse als waagrechter Wendetangente. Die Funktion f besitzt keine Extremstellen.

5 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; $D = \mathbb{R}$

2 $f(x) = 0{,}4x^3 + 1{,}2x^2$; $D = \mathbb{R}$

E Der Graph der Funktion ist in $]-\infty; 2]$ rechtsgekrümmt und in $[2; \infty[$ linksgekrümmt. $x_0 = 2$ ist also eine Wendestelle des Graphen von f.

6 $f(x) = x^2 - 4x + 4$; $D = \mathbb{R}$

F Die Funktion f hat einen Tiefpunkt in $(3|1)$ und die Steigung der Tangente im Punkt $(0|1)$ beträgt 3.

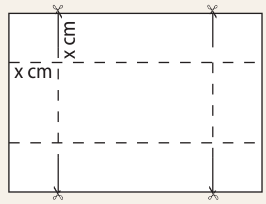
4 $f(x) = 0{,}25x^3$; $D = \mathbb{R}$

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x + 2)^2 \cdot (2x - 5)$; $D = \mathbb{R}$.
a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und des Wendepunkts des Graphen von f und geben Sie eine Gleichung der Tangente im Wendepunkt an.
c) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[-4; 3]$ (Einheit 1 cm).
d) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte A und B, in denen die Tangente an den Graphen parallel zur Geraden $g: y = 6{,}75x$ ist.
e) Zeigen Sie, dass der Punkt $W(-0{,}5|-2{,}25)$ die Strecke $\overline{AB}$ halbiert.

7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^3$; $D = \mathbb{R}$.
a) Finden Sie heraus, welche besonderen Punkte der Graph von f besitzt, und ermitteln Sie deren Art und deren Koordinaten.
b) Die beiden Punkte, die der Graph von f mit der x-Achse gemeinsam hat, bilden mit dem Punkt $P(p|f(p))$; $0 < p < 2$, das gleichschenklige Dreieck SOP. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

Entdecken

- Stellen Sie aus einem DIN-A4-Blatt eine quaderförmige, oben offene Schachtel her.
- Beschreiben Sie das Volumen der Schachtel durch eine Funktion V.
- Geben Sie die größtmögliche Definitionsmenge D an und finden Sie heraus, für welchen Wert von $x \in D$ die Schachtel das größte Volumen besitzt.



Verstehen

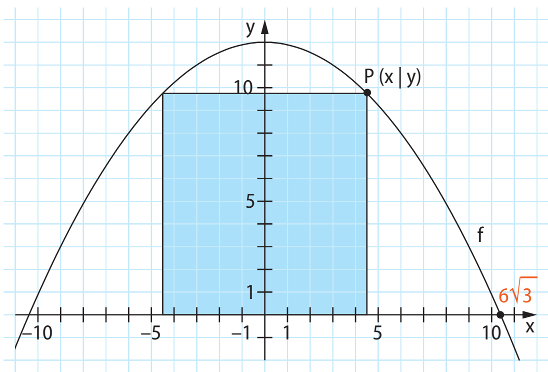
Eine bedeutende Anwendung der Differentialrechnung sind sogenannte Extremwertaufgaben. Dabei geht es darum, unter Berücksichtigung vorgegebener Nebenbedingungen, den optimalen Wert einer Variablen zu ermitteln.

Um eine **Extremwertaufgabe** zu lösen, eignet sich folgende Vorgehensweise:

1. **Zielgröße angeben:** Die von der Variable abhängige Größe, welche optimiert werden soll, wird als Zielgröße bezeichnet.
2. **Nebenbedingung(en) angeben:** Die Variablen, die in der Zielgröße auftreten, sind meist nicht unabhängig voneinander, sondern müssen Nebenbedingungen erfüllen.
3. **Zielfunktion angeben:** Die Nebenbedingungen führen zu einer Zielfunktion.
4. **Extremwerte der Zielfunktion ermitteln:** Randwerte berücksichtigen
5. **Globale Extremwerte ermitteln**

Beispiel

In Stuttgart ist der Bau einer 12 m hohen Schwimmhalle geplant. Die Stirnseite soll ein parabelförmiges Profil mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 12$ erhalten.
Der Architekt hat für diese Seite der Halle ein rechteckiges Fenster vorgesehen. Geben Sie an, welchen Flächeninhalt das Fenster maximal haben kann.



Lösung:

Aufgrund der Symmetrie betrachten wir das Fenster nur im 1. Quadranten, d. h.: $x \geq 0$. Für die Fensterhöhe y ist $y \geq 0$. Damit ist $x \cdot y$ die halbe Fensterfläche und $2 \cdot x \cdot y$ die gesamte Fensterfläche. Der Punkt P (x | y) liegt auf dem Graphen von f.

1. Zielgröße: $A = 2 \cdot x \cdot y$
2. Nebenbedingung: $y = -\frac{1}{9}x^2 + 12$
3. Zielfunktion: $A(x) = 2 \cdot x \cdot y = 2x \cdot (-\frac{1}{9}x^2 + 12)$
   $= -\frac{2}{9}x^3 + 24x;\ D = [0;\ 6\sqrt{3}]$
4. lokale Maxima ermitteln:
   $A'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 24 = 0$, d. h. $x^2 = 36$, also $x_1 = 6 \in D$; $x_2 = -6 \notin D$
   $A''(x) = -\frac{4}{3}x$; $A''(6) < 0$
   $y_1 = -\frac{1}{9}x_1^2 + 12 = -\frac{36}{9} + 12 = -4 + 12 = 8$

Die Randwerte $A(0) = 0$ und $A(6\sqrt{3}) = 0$ sind die lokalen und globalen Minima im betrachteten Intervall.

5. globale Maxima ermitteln: Die Funktion A nimmt für $x = 6$ ihr lokales und auch ihr globales Maximum an: $A(6) = 2 \cdot 6 \cdot 8 = 96$

Das größtmögliche Fenster besitzt die Breite 12 m, die Höhe 8 m und den Flächeninhalt 96 m².

- Begründen Sie, warum im Beispiel die y-Achse symmetrisch durch das Fenster verläuft.
- Begründen Sie, warum die Variablen, welche in der Zielgröße auftreten, i. d. R. nicht unabhängig voneinander sind.
- Begründen Sie, warum es sinnvoll ist, bei der Bestimmung der Extrempunkte auch die Randpunkte der Funktion zu ermitteln.

Nachgefragt

Aufgaben

1 Gliedern Sie die Rechenschritte entsprechend der Vorgehensweise aus dem Verstehenkasten. Begründen Sie jeden Schritt in der Lösung.

```
Aufgabe: Zerlegen Sie die Zahl 60 so in zwei nichtnegative
Summanden, dass die Summe der Quadrate dieser beiden Summanden
extremal wird.
```

Lösung:

1. Summand: $x \geq 0$; 2. Summand: $y \geq 0$ Zielgröße: $S = x^2 + y^2$

Nebenbedingung: $x + y = 60$, also $y = 60 - x$

Zielfunktion: $S(x) = x^2 + (60 - x)^2$; $D = [0; 60]$

Extremwerte: $S(x) = x^2 + 3\,600 - 120x + x^2 = 2x^2 - 120x + 3600$;

$S'(x) = 4x - 120 = 4(x - 30)$; $D =]0; 60[$

$S'(x) = 0$, d. h. $x = 30 \in D_{S'}$;

$S'(x) < 0$ für $0 < x < 30$ und $S'(x) > 0$ für $30 < x < 60$:

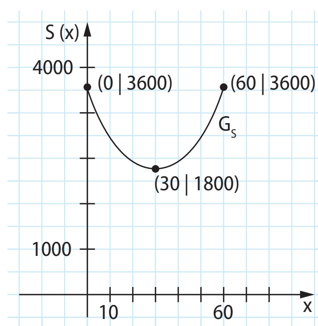
Vorzeichenwechsel von $S(x)$ von $-$ nach $+$ an der Stelle $x = 30$.

Somit ist die Summe der Quadrate von $x = 30$ und $y = 30$ minimal.

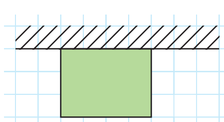
$S(30) = 30^2 + (60 - 30)^2 = 30^2 + 30^2 = 1800$

An den beiden Randstellen $x = 0$ und $x = 60$ nimmt die Zielfunktion jeweils den gleichen Randwert 3600 an.

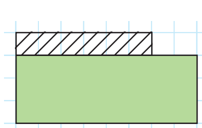
Ergebnis: Für $x = 30$ (und $y = 30$) hat die Zielgröße das lokale und gleichzeitig globale Minimum 1800 und für $x = 0$ bzw. $x = 60$ (und $y = 60$ bzw. $y = 0$) jeweils das lokale und gleichzeitig globale Maximum 3600.



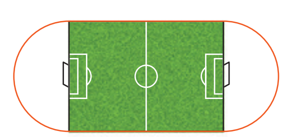
2 Stefanie möchte mit einem 6 m langen Maschendrahtzaun ein möglichst großes rechteckiges Freigehege für ihre Kaninchen einzäunen und bezieht dabei eine Hauswand in ihre Abgrenzung mit ein. Ermitteln Sie die Maße des optimalen Geheges und seinen Grundflächeninhalt.



3 Ein Bauer möchte mit einem 50 m langen Zaun eine möglichst große rechteckige Weide für seine Schafe abstecken. Dabei will er eine bereits vorhandene 10 m lange Mauer als Abgrenzung mit nutzen. Bestimmen Sie die Maße, die die Weide haben sollte.



4 Der Innenrand einer Trabrennbahn, der aus zwei Halbkreisen und zwei Strecken besteht, ist insgesamt 400 m lang. Finden Sie heraus, welche Innenrandmaße die Bahn haben muss, damit der von ihr eingeschlossene rechteckige Sportplatz maximalen Flächeninhalt besitzt. Kann dieser größtmögliche Sportplatz auch als Fußballplatz für Länderspiele genutzt werden?



5 Unter allen Rechtecken mit der gleicher Umfangslänge U soll dasjenige Rechteck ermittelt werden, das den größten Flächeninhalt A besitzt. Fertigen Sie eine Skizze an, die den beschriebenen Sachverhalt beschreibt und lösen Sie die Aufgabe …

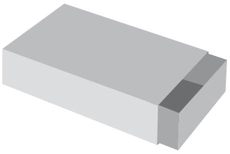
a) für $U = 36\,\text{m}$.

b) für beliebige U.

6 Eine 1l-Milchpackung hat näherungsweise die Form eines Quaders. Bestimmen Sie die Maße des Quaders so, dass möglichst wenig Verpackungsmaterial verbraucht wird. Beurteilen Sie die Lösung in der Realität.

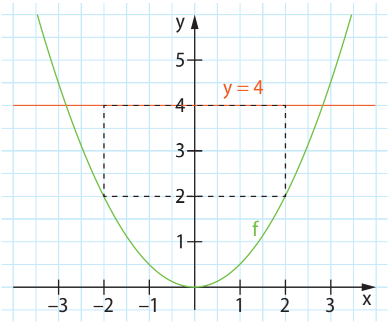
7 Zerlegen Sie die Zahl 12 so in zwei nichtnegative Summanden, dass das Produkt der Summanden möglichst groß wird.

8 Sala möchte eine Streichholzschachtel basteln, deren Länge dreimal so groß wie die Breite sein soll. Sie weiß, dass sie Papier für eine Oberfläche von $288\,\text{cm}^2$ zur Verfügung hat. Berechnen Sie, welche Höhe sie wählen muss, damit das Volumen maximal wird.



9 Eine Baufirma hat einen Baugrund in Form eines rechtwinkligen Dreiecks erworben. Die beiden Katheten haben die Länge 80 m und 100 m. Bestimmen Sie die Abmessungen, die eine Lagerhalle mit rechteckigem Grundriss auf dem Grundstück maximal haben kann.

10 Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und die Gerade $y = 4$ begrenzen ein Flächenstück. In dieses Flächenstück soll ein Rechteck so eingezeichnet werden, dass eine Seite auf der Geraden und die verbleibenden beiden Punkte auf dem Graphen von f liegen. Bestimmen Sie die Abmessungen des Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.



11 Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = -0{,}125x^2 + 10$ und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Gesucht ist das flächengrößte Rechteck in diesem Flächenstück, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt und dessen verbleibende zwei Eckpunkte auf der Parabel liegen (man sagt: das Rechteck ist einbeschrieben).

a) Skizzieren Sie den Graphen von f und markieren Sie ein mögliches Rechteck.

b) Bestimmen Sie Länge und Breite des flächengrößten Rechtecks.

12 Die Gleichung einer Funktion f besteht aus der Summe einer positiven reellen Zahl und ihrem Kehrwert. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Summe einen minimalen Wert annehmen kann.

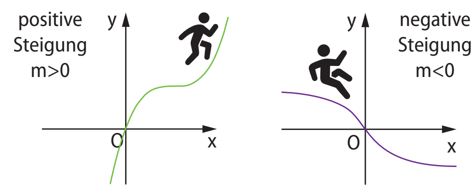
13 Die Differenz zweier reeller Zahlen ist 1. Begründen Sie rechnerisch, dass das Produkt der beiden Zahlen einen minimalen Wert annehmen kann.

Monotonie und Monotoniesatz

Seite 76

Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall I aus der Definitionsmenge von f …

- **streng monoton steigend**, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt: $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.
- **monoton steigend**, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt: $f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.
- **streng monoton fallend**, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt: $f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.
- **monoton fallend**, wenn für alle x_1, x_2 aus I gilt: $f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$.

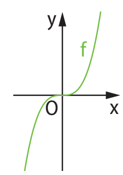


Für eine differenzierbare Funktion f gilt:

- Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist der Graph von f streng monoton steigend in I.
- Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist der Graph von f streng monoton fallend in I.

Die Umkehrung des Monotoniesatzes gilt bei strenger Monotonie nicht!
Beispiel: $f(x) = x^3$

Der Graph von f steigt streng monoton, aber $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.



Extrempunkte

Seite 80, 87

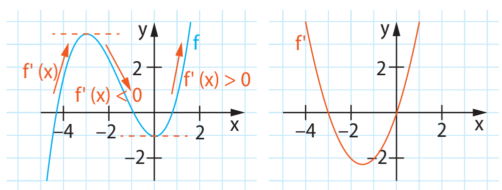
Sei f eine differenzierbare Funktion.
Notwenige Bedingung für **Extremstelle**:
$f'(x_0) = 0$.
Hinreichende Bedingung:

1 Vorzeichenwechselkriterium

- **Hochpunkt** $H(x_0 | f(x_0))$, wenn f' in x_0 von positiv nach negativ wechselt.
- **Tiefpunkt** $T(x_0 | f(x_0))$, wenn f' in x_0 von negativ nach positiv wechselt.

2 Kriterium der zweiten Ableitung

- **Hochpunkt** $H(x_0 | f(x_0))$, wenn $f''(x_0) < 0$.
- **Tiefpunkt** $T(x_0 | f(x_0))$, wenn $f''(x_0) > 0$.



Beachten Sie:
Das Vorzeichenwechselkriterium ist stärker als das Kriterium der höheren Ableitung.

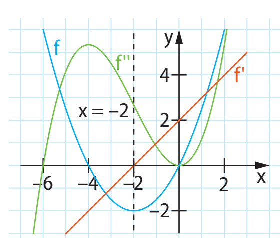
Krümmungsverhalten und Wendepunkte

Seite 84

Für eine zweimal differenzierbare Funktion f beschreibt f'' das **Krümmungsverhalten**.
Notwendige Bedingung für **Wendestelle**:
$f''(x_0) = 0$.
Hinreichende Bedingung:

1 Vorzeichenwechselkriterium
Wendepunkt $W(x_0 | f(x_0))$, wenn f'' sein Vorzeichen in x_0 wechselt.

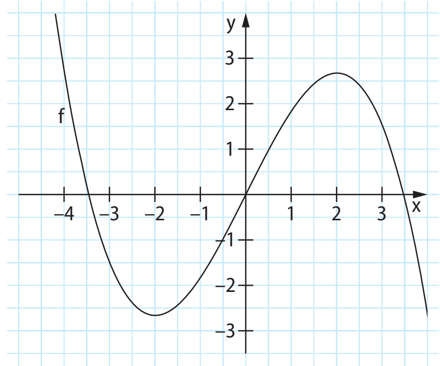
2 Kriterium der dritten Ableitung
Wendepunkt $W(x_0 | f(x_0))$, wenn $f'''(x_0) \neq 0$

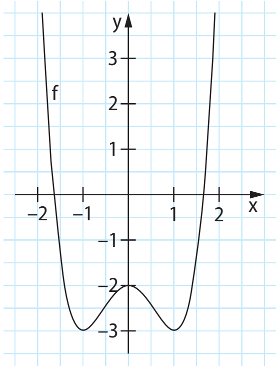


Beachten Sie:
Das Vorzeichenwechselkriterium ist stärker als das Kriterium der höheren Ableitung.

3 Auf unterschiedlichen Wegen

1 Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten.





2 Ermitteln Sie jeweils die Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt, und die Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton fällt. Geben Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen von f an.

$f(x) = 4x^2$; $D = \mathbb{R}$

$f(x) = -x^2 - 2x - 3$; $D = \mathbb{R}$

3 Bestimmen Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion f mit …

$f(x) = 4x - 0{,}5x^2$; $D = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$; $D = \mathbb{R}$

4 Untersuchen Sie, ob der Graphen der Funktion f Wendestellen besitzt. Geben Sie – falls vorhanden – die Koordinaten der Wendepunkte an.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$; $D = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2$; $D = \mathbb{R}$

5 Skizzieren Sie den Graphen einer Funktion f, welcher genau …

a) zwei Wendepunkte einen lokalen Hochpunkt und zwei lokale Tiefpunkte hat.
b) einen Sattelpunkt, einen lokalen Hochpunkt und einen lokalen Tiefpunkt hat.

a) zwei Wendepunkte aber keinen Extrempunkt hat.
b) zwei Hochpunkte, einen Tiefpunkt, drei Wendepunkte und einen Sattelpunkt hat.

6

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 + x$; $D = \mathbb{R}$, punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
Untersuchen Sie die Ableitungsfunktion f' auf Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur y-Achse. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g mit $g(x) = x^4 + x^2 + 1$; $D = \mathbb{R}$, achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Untersuchen Sie die Ableitungsfunktion g' auf Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur y-Achse. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

7 Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge, Lage und Art der Extrempunkte sowie Wendepunkte des Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x;\ D = \mathbb{R}$
b) $f(x) = 0{,}25 \cdot (x^4 - 8x);\ D = \mathbb{R}$
c) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x;\ D = \mathbb{R}$

a) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2};\ D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
b) $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3};\ D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
c) $f(x) = x + \frac{9}{x};\ D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

8

a) Diskutieren Sie die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4;\ D = \mathbb{R}$, hinsichtlich Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Steigung der Tangente im Wendepunkt (Wendetangente).
b) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a) und zeichnen Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall.

a) Diskutieren Sie die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 19;\ D = \mathbb{R}$, hinsichtlich ihrer Eigenschaften.
b) Verwenden Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a) und zeichnen Sie den Graphen von f in einem geeigneten Intervall.

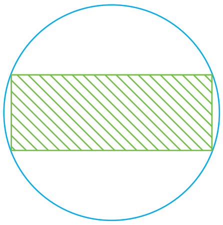
9 Führen Sie eine Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3;\ D = \mathbb{R}$
b) $f(x) = x^2 - 6x + 12;\ D = \mathbb{R}$

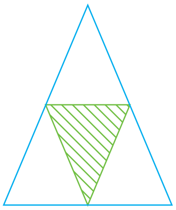
a) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x - 1)^3 + 2;\ D = \mathbb{R}$
b) $f(x) = \frac{x}{4} \cdot (4x^2 - 12x + 9);\ D = \mathbb{R}$

10

In einem Kreis mit dem Radius r = 8 cm soll das flächengrößte Rechteck so eingezeichnet werden, dass die Eckpunkte des Rechtecks auf der Kreislinie liegen. Berechnen Sie die Länge der Rechtecksseiten.

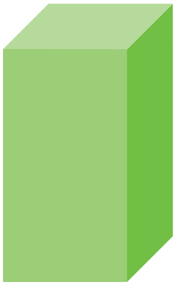


Von einem gleichschenkeligen Dreieck kennt man die Basis c = 8 cm und die Höhe h_c = 10 cm. In dieses Dreieck soll, wie abgebildet, das flächengrößte auf der Spitze stehende gleichschenkelige Dreieck einbeschrieben werden, d. h. alle Eckpunkte des grünen Dreiecks sollen auf der Linie des blauen Dreiecks liegen. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des grünen Dreiecks.



11

Ermitteln Sie die Maße eines Prismas mit quadratischer Grundfläche und dem Volumen V = 216 cm³ so, dass sein Oberflächeninhalt minimal wird.



Ermitteln Sie die Maße eines Zylinders mit dem Oberflächeninhalt O = 108π cm² so, dass das Volumen maximal wird.

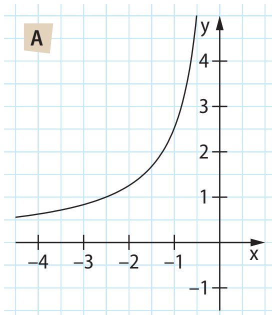
3 Kreuz und quer

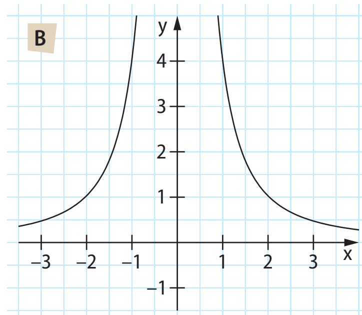
1 **a)** Untersuchen Sie jeweils das Monotonieverhalten der Funktion.

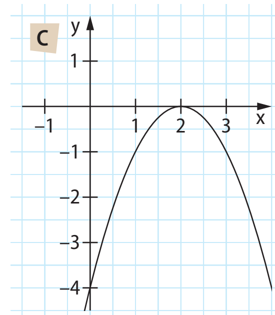
1 $f(x) = -(x-2)^2$; $D = \mathbb{R}$ **2** $g(x) = 0{,}1x^3$; $D = \mathbb{R}$ **3** $h(x) = 0{,}25x^4$; $D = \mathbb{R}$

4 $k(x) = -\frac{10}{x}$; $D = \mathbb{R}^-$ **5** $u(x) = \frac{4}{x^2}$; $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **6** $v(x) = -\frac{1}{20}x^5$; $D = \mathbb{R}$

b) Die Abbildungen **A** bis **C** zeigen die Graphen drei dieser sechs Funktionen. Ordnen Sie sie entsprechend zu.







2 Ermitteln Sie jeweils das Monotonieverhalten sowie – falls vorhanden – die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 6$; $D = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = 4$; $D = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 1 - (x+1)^2$; $D = \mathbb{R}$ **d)** $f(x) = (x+1) \cdot (2x+4)$; $D = \mathbb{R}$

e) $f(x) = 2 + 0{,}5x$; $D = \mathbb{R}$ **f)** $f(x) = 0{,}1 \cdot (10x^2 + 100)$; $D = \mathbb{R}$

g) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$; $D = \mathbb{R}$ **h)** $f(x) = 0{,}25x$; $D = \mathbb{R}$

i) $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$; $D = \mathbb{R}$ **j)** $f(x) = 3x^3 + 3$; $D = \mathbb{R}$

k) $f(x) = x^{12}$; $D = \mathbb{R}$ **l)** $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 20$; $D = \mathbb{R}$

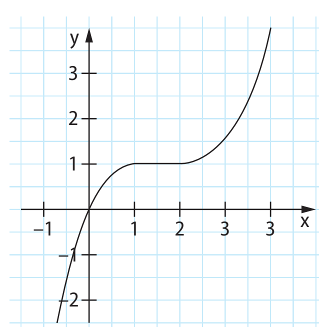
3 Führen Sie für die Funktion f eine Kurvendiskussion durch.

a) $f(x) = \frac{x^3}{16} \cdot (x+4)$; $D = \mathbb{R}$ **b)** $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3}$; $D = \mathbb{R}$

c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$; $D = \mathbb{R}$ **d)** $f(x) = x^7 - 4x$; $D = \mathbb{R}$

4 Ein Rechteck ist 12 cm lang und 5 cm breit. Seine beiden längeren Seiten werden um je s cm ($0 < s < 12$) verkürzt und seine beiden kürzeren Seiten um je 2s cm verlängert. Ermitteln Sie den Wert von s, für den der Flächeninhalt A des neuen Rechtecks maximal ist, und geben Sie A_{max} an.

5 Ein Team folgert aus dem abgebildeten, mit einem Computerprogramm erstellten Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}2x^3 - x^2 + 1{,}6x$; $D = \mathbb{R}$, dass f nirgends in D monoton fallend ist. Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Folgerung falsch ist, und stellen Sie das Monotonieverhalten von f richtig dar.



6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x+2) \cdot (x-4)$; $D = \mathbb{R}$, und ermitteln Sie dann jeweils das Intervall, in dem die Funktion f …

a) streng monoton steigt. **b)** streng monoton fällt.

Veranschaulichen Sie diese Intervalle am Funktionsgraphen.

7

1 $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2$	**2** $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - 3x + 6$	**3** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$
4 $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x$	**5** $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}$	**6** $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3x^2}$
7 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	**8** $f(x) = \frac{x^4}{16} - \frac{3}{2}x^2 + 5$	**9** $f(x) = \frac{x^2}{24}(x^2 - 4)$

a) Ermitteln Sie bei jeder Funktion f Lage und Art der Extrempunkte ihres Graphen.

b) Untersuchen Sie bei jeder Aussage, ob sie wahr ist:

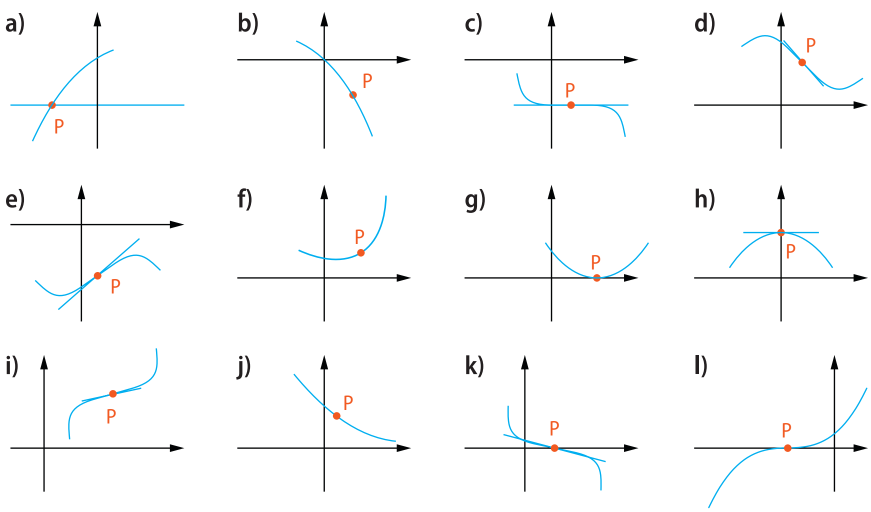
A Bei 75% dieser Funktionen ist die Menge der reellen Zahlen die größtmögliche Definitionsmenge.

B Bei einem Drittel dieser Funktionen verläuft der Graph durch den Ursprung O (0|0).

C Keiner der Graphen dieser Funktionen besitzt eine schräge Asymptote.

D 25 % der Graphen dieser Funktionen sind symmetrisch zur y-Achse.

8 Die Abbildungen zeigen jeweils einen Teil des Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit $D = \mathbb{R}$ sowie ggf. eine Tangente im Extrem- oder Wendepunkt des Graphen von f. Ein Punkt P $(x_0 | f(x_0))$ des Graphen ist markiert.
Untersuchen Sie f, f' und f'' in x_0 auf >, < oder = 0. Übertragen Sie dazu die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie dann dort.

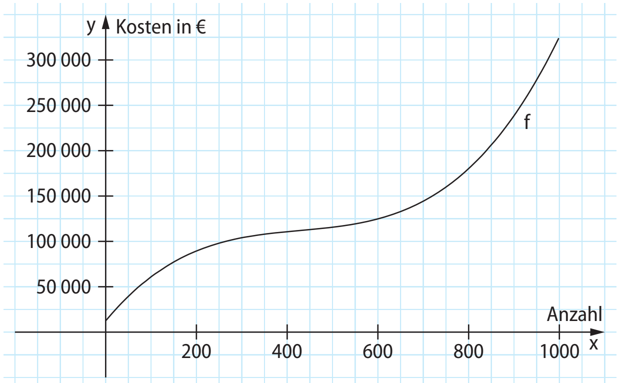


	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
x_0	< 0											
$f(x_0)$												
$f'(x_0)$												
$f''(x_0)$												

9 Der Graph der ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx$; $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $b \in \mathbb{R}$; $D = \mathbb{R}$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Zeigen Sie, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

10 Das Kantengerüst eines quaderförmigen Transportbehälters soll aus 72 m L-Profileisen hergestellt werden, wobei der Behälter halb so breit wie lang sein soll.
Ermitteln Sie Länge, Breite und Höhe des Behälters mit dem größtmöglichen Volumen und geben Sie das maximale Volumen V_{max} an.

11 Eine Firma stellt Monitore für Notebooks her. Die bei der Herstellung von x Monitoren entstehenden Kosten (in €) sind $f(x) = 0{,}001x^3 - 1{,}29x^2 + 600x + 12\,000$; $x > 0$. Die Monitore werden zu einem Preis von je 300 € zur Weiterverarbeitung abgegeben; der dabei erzielte Gewinn (in €) wird durch die Funktion g angegeben.



a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Monotonie und Extrempunkte. Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts und interpretieren Sie ihn unter dem Aspekt der Kostenentwicklung.
b) Geben Sie g (x) für x > 0 an. Zeigen Sie, dass $x_1 \approx 357{,}8$ und $x_2 \approx 966{,}9$ Nullstellen der Funktion g sind.
c) Ermitteln Sie die Extrempunkte des Graphen der Funktion g. Interpretieren Sie den Graphen von g hinsichtlich Gewinn und Verlust. Geben Sie den maximalen Gewinn an.

12 Ein Unternehmen will auf einem dreieckigen Grundstück mit den Eckpunkten A (0 | 0), B (40 | 0) und C (32 | 32) eine neue Montagehalle mit rechteckigem Grundriss errichten. Dabei soll eine Seite der neuen Halle an eine bereits vorhandene Halle angrenzen und deshalb auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen. Die beiden anderen Eckpunkte des Hallengrundrisses sollen auf den beiden anderen Strecken liegen, die das Grundstück beranden.
a) Zeichnen Sie das Grundstück und eine mögliche Halle.
b) Ermitteln Sie den maximalen Grundflächeninhalt der Halle und geben Sie an, wie lang und wie breit die optimale Halle wird.

13 **a)** Die Zahl 60 (die Zahl 2n; $n \in \mathbb{N}$) soll so in zwei positive Summanden x und y zerlegt werden, dass deren Produktwert möglichst groß wird.

Ermitteln Sie jeweils die Zahlen x und y.

b) Die Zahl 80 (die Zahl 2n, $n \in \mathbb{N}$) soll so in zwei positive Summanden x und y zerlegt werden, dass die Summe der Quadrate dieser beiden Summanden extremal wird.

Ermitteln Sie die Zahlen x und y sowie die Extremaleigenschaft.

14 Untersuchen Sie die Aussagen über eine ganzrationale Funktionen f mit $D = \mathbb{R}$. Stellen Sie falsche Aussagen richtig.

Wenn x_0 eine Wendestelle von f ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Wenn $f''(x_0) = 0$ gilt, dann ist x_0 eine Wendestelle von f.

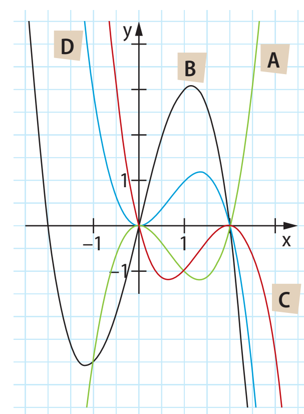
Wenn der Graph der Funktion f zwei lokale Extrempunkte besitzt, dann besitzt der Graph von f mindestens einen Wendepunkt.

Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

15 Gegeben sind die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 durch ihre Funktionsterme
$f_1(x) = -x \cdot (x^2 - 4)$, $f_2(x) = -x \cdot (x - 2)^2$, $f_3(x) = -x^2 \cdot (2 - x)$ bzw.
$f_4(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$; $D = \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung zeigt alle vier Funktionsgraphen. Ordnen Sie jedem der Graphen eine der vier Funktionen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Die Abbildung lässt vermuten, dass zwei der Funktionsgraphen bezüglich der x-Achse symmetrisch zueinander liegen. Untersuchen Sie, für welche der vier Graphen dies zutrifft, und geben Sie eine rechnerische Begründung an.



16 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x^2 - 6x + 8)$; $D = \mathbb{R}$.
Übertragen Sie die Monotonietabelle in Ihr Heft, ergänzen Sie sie dann dort und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

x	$-\infty < x < \square$	$x = \square$	$\square < x < \triangle$	$x = \triangle$	$\triangle < x < \infty$
f'(x)					
Vorzeichenwechsel von f'(x)					
Graph von f		Hochpunkt		Tiefpunkt	

17 Geben Sie jeweils das Monotonieverhalten der Funktion f in Abhängigkeit vom Wert des Parameters a an. Übertragen Sie die Monotonietabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie dann dort.

a) $f(x) = ax^2$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D = \mathbb{R}$

a	**a > 0**		**a < 0**	
x	$x > 0$	$x < 0$	$x > 0$	$x < 0$
f'(x)	$f'(x) > 0$			
Monotonie				

b) $f(x) = ax^3$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D = \mathbb{R}$

a	**a > 0**		**a < 0**	
x	$x > 0$	$x < 0$	$x > 0$	$x < 0$
f'(x)	$f'(x) > 0$			
Monotonie				

18 Einer Kugel K (Radiuslänge R) wird ein gerader Kreiszylinder (Radiuslänge r; Höhe h) einbeschrieben.

a) Ermitteln Sie diejenigen Werte von r und h, für die das Volumen des Zylinders möglichst groß wird.

b) Bestimmen Sie den Bruchteil des Kugelvolumens den der optimale Zylinder einnimmt.

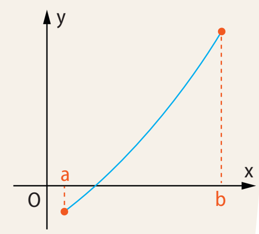
3 Horizonte

1 Lösen Sie die folgenden Gleichungen rechnerisch.

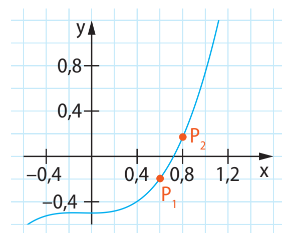
a) $x^2 - 5x + 6{,}25 = 0$ **b)** $x^2 - 5x + 6 = 0$ **c)** $4x^2 + 9 = -12x$ **d)** $x^3 + 8x^2 + 16x = 0$

Viele Gleichungen lassen sich jedoch nicht exakt lösen. Gesucht sind daher Verfahren, mit denen die gesuchte Lösung näherungsweise berechnet werden kann.
Da man jede Gleichung in eine Form „... = 0" überführen kann, versuchen wir im Folgenden die Nullstellen verschiedener Funktionen zu ermitteln.

Bei ganzrationalen Funktionen f kann man relativ schnell feststellen, ob die Gleichung $f(x) = 0$ überhaupt eine Lösung hat und in welchem Intervall die Lösung liegt. Hierzu versucht man zwei Stellen a und b aus der Definitionsmenge D zu ermitteln, für die $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben. In diesem Fall hat f in $[a; b]$ mindestens eine Nullstelle.
Durch fortschreitende Intervallhalbierung kann man sich so der gesuchten Nullstelle immer weiter annähern.



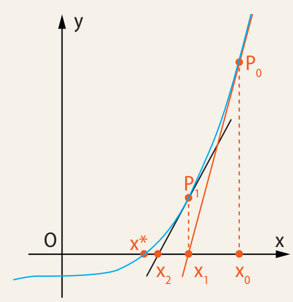
2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 0{,}5$. Die Punkte $P_1\,(0{,}6\,|\,-0{,}194)$ und $P_2\,(0{,}8\,|\,0{,}172)$ liegen auf dem Graphen von f. Wie kann man mithilfe der angegebenen Koordinaten einen Näherungswert für die Nullstelle von f ermitteln?



Da dieses Verfahren relativ langsam ist, versuchen wir eine Alternative.

Es sei $x_0 \in [a; b]$ ein Näherungswert für die gesuchte Nullstelle x^*.
Nun ersetzen wir in einer Umgebung von x_0 den Graphen von f durch die Tangente im Punkt $P_0\,(x_0\,|\,f(x_0))$ und berechnen die Stelle x_1, an der die Tangente die x-Achse schneidet. In vielen Fällen ist x_1 ein besserer Näherungswert für x^* als x_0.

Wiederholt man dieses Verfahren, erhält man (unter gewissen Voraussetzungen) eine Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ von immer besseren Näherungswerten für x^*.



Diese geometrischen Überlegungen führen zu folgendem numerischen Verfahren:

1 Aufstellen der Gleichung der Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt P_0:
Ist f differenzierbar, so erhält man als Gleichung der Tangente in P_0 nach der Punkt-Steigungsformel
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

2 Berechnung der Stelle, an der die Tangente die x-Achse schneidet:
Aus $f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = 0$ folgt mit $f'(x_0) \neq 0$: $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.
Diesen x-Wert bezeichnet man mit x_1.

3 Mit x_1 als neuem Startwert lassen sich die Schritte **1** und **2** wiederholen.

Man erhält als **Iterationsvorschrift für das Newton-Iterationsverfahren**: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$; $n \in \mathbb{N}$

3 Lösen Sie näherungsweise die Gleichung.
a) $x^3 + 2x - 5 = 0$ **b)** $x^3 + 2x - 1 = 0$ **c)** $x^5 - x^3 + 1 = 0$ **d)** $\sqrt{x} + x^2 - x - 2 = 0$ **e)** $\frac{1}{x} + x^2 + 2 = 0$

4 Die angegebene Gleichung hat mehrere Lösungen. Ermitteln Sie diese mit dem Newton-Verfahren.
a) $x^3 - 3x - 1 = 0$ **b)** $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ **c)** $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ **d)** $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 0{,}5 = 0$

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{4x^2}$; $x \neq 0$. Es gibt ein t mit $1 \leq t \leq 2$, für das gilt: $f'(t) = 1{,}5$.
Berechnen Sie einen Näherungswert für t mit dem Newton-Verfahren.

6 Die Gerade $y = -1$ und der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x \cdot (x - 6)^2$ schneiden sich in einem Punkt S.
Ermitteln Sie die x-Koordinate von S.

Das Newton-Verfahren ist ein so genanntes *lokal konvergentes* Verfahren. Konvergenz der in der Newton-Iteration erzeugten Folge zu einer Nullstelle ist also nur garantiert, wenn der Startwert, d. h. das 0-te Glied der Folge, schon „ausreichend nahe" an der Nullstelle liegt. Ist dies nicht der Fall, können verschiedene Szenarien eintreten. Hierzu untersuchen wir folgende Gleichungen:

7 Ermitteln Sie die Nullstellen folgender Funktionen.
a) $f_1(x) = x^3 - 2x + 2$; Startwert $x_0 = 0$ **b)** $f_2(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 4$; Startwert $x_0 = 0$

Wir können bezüglich der Konvergenz des Verfahrens also festhalten:

Ist der Startwert beim Newton-Verfahren zu weit weg von der eigentlichen Nullstelle, können folgende Fälle auftreten:
- Die Folge divergiert, der Abstand zur Nullstelle wächst über alle Grenzen.
- Die Folge divergiert, bleibt aber beschränkt. Sie kann z. B. periodisch werden, d.h. endlich viele Punkte wechseln sich in immer derselben Reihenfolge ab. Man sagt auch, dass die Folge **oszilliert**.
- Die Folge konvergiert trotz der Distanz zur Nullstelle, kann jedoch, falls die Funktion mehrere Nullstellen hat, gegen eine andere als die gewünschte Nullstelle (falls man weiß, welche man will) konvergieren.

Zum Abschluss soll noch thematisiert werden, dass das Newton-Verfahren auch zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{a}$ herangezogen werden kann.

8 Zeigen Sie hierzu: Wenn man das Newton-Verfahren anwendet, um die Gleichung $x^2 = a$ zu lösen, ergibt sich die Gleichung $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$.

Dieses Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von $\sqrt{a}$ wurde bereits ca. 1750 v. Chr. in Mesopotamien verwendet. Der griechische Mathematiker und Ingenieur Heron von Alexandria machte es im 1. Jahrhundert nach Christus dann aber im ganzen römischen Reich bekannt. Deshalb nennt man es heute das **Heron-Verfahren**.

Heron von Alexandria war ein griechischer Mathematiker und Ingenieur († 62)

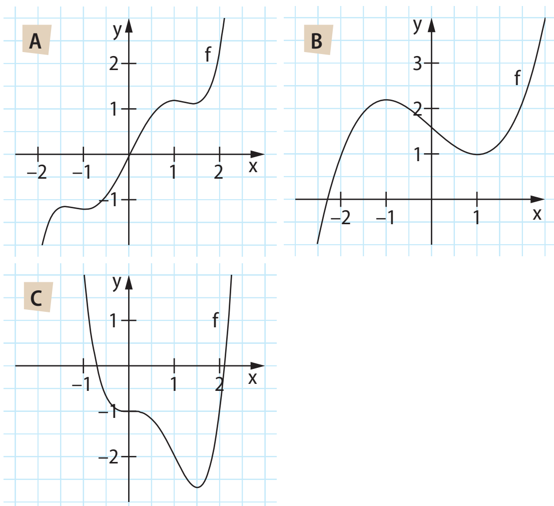
3

Das kann ich!

Überprüfen Sie Ihre Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben und bewerten Sie anschließend Ihre Lösungen mit einem Smiley.

Das kann ich **wirklich gut!**	Das kann ich **fast!**	Das muss ich **noch üben!**

1 Die Abbildungen A bis C zeigen drei Funktionsgraphen.



a) Entnehmen Sie den Abbildungen jeweils möglichst genau die Koordinaten der Nullstellen, der Extrempunkte und der Wendepunkte.

b) Ordnen Sie jeder der Abbildungen A bis C die passende der vier Funktionsgleichungen zu. Begründen Sie Ihre Auswahl.

1 $f(x) = 0{,}3 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)^2 + 1$

2 $f(x) = x^4 - 2x^3 - 1$

3 $f(x) = 0{,}2x^5 - x^3 + 2x$

4 $f(x) = 0{,}2 \cdot (x^3 + 3x^2 - 2x + 6)$

c) Überprüfen Sie rechnerisch Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a) anhand der zugeordneten Funktionsterme aus Teilaufgabe b).

2 Ermitteln Sie jeweils die lokalen und globalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = x \cdot (x^2 - 3x - 3)$; $D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 2x^2 \cdot (x^2 - 4)$; $D = \mathbb{R}$

c) $f(x) = |x - 1|$; $D = \mathbb{R}$

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$; $D = \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte mit den Achsen, Extrem- und Wendepunkte.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f.

c) Untersuchen Sie bei jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr ist.

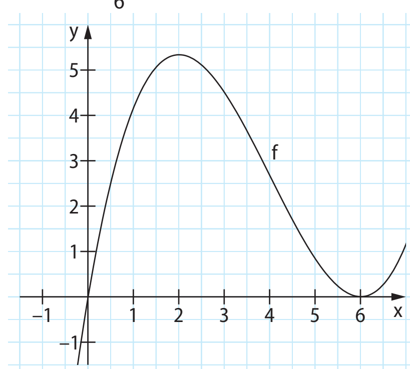
1 Für $-\infty < x < 2$ ist der Graph von f rechtsgekrümmt.

2 Die Gerade g_1: $y = 1$ hat mit dem Graphen von f drei Punkte gemeinsam.

3 Im Punkt W (2 | 2) steigt der Graph von f.

4 Im Ursprung steigt der Graph von f.

4 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{x}{6} \cdot (x^2 - 12x + 36)$; $D = \mathbb{R}$.



a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Extrempunkte E_1 und E_2 des Graphen von f.

b) Zeigen Sie, dass die Punkte E_1, E_2 und W $(4\,|\,\frac{8}{3})$ auf einer Geraden liegen.

c) Die Punkte O (0 | 0), L (a | 0) und A (a | f(a)) mit $0 < a < 6$ sind die Eckpunkte des Dreiecks OLA. Geben Sie an, für welchen Wert des Parameters a der Flächeninhalt A dieses Dreiecks maximal wird.

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zuerst allein.
2. Suchen Sie einen Partner oder eine Partnerin und arbeiten Sie zusammen weiter: Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen. Korrigieren Sie fehlerhafte Antworten.

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie.

A Den Schnittpunkt mit der y-Achse bezeichnet man als Nullstelle.

B Der Monotoniesatz lässt sich im Falle der strengen Monotonie umkehren.

C Die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x + 2$ ist im Intervall $[2; \infty[$ streng monoton steigend.

D $H(x_0 | f(x_0))$ ist globaler Hochpunkt einer Funktion f mit Definitionsmenge D, falls für alle $x \in D$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$.

E Jede Nullstelle von f' ist eine lokale Extremstelle.

F Es gibt eine ganzrationale Funktion f, welche keine lokalen Extrema besitzt.

G Jeder Punkt des Graphen einer Funktion f, in dem sich die Art der Krümmung ändert heißt Wendepunkt des Graphen von f.

H Unter einem Sattelpunkt versteht man einen Wendepunkt mit waagrechter Wendetangente.

I Die mathematische Untersuchung einer Funktion hinsichtlich ihrer wichtigsten Eigenschaften nennt man Kurvendiskussion.

J Für die Ordinate des Schnittpunkts mit der y-Achse gilt: $f(x) = 0$.

K Nebenbedingungen fließen bei Extremwertaufgaben nicht in die Zielfunktion mit ein.

L Es gibt Funktionen, welche einen globalen, aber keinen lokalen Tiefpunkt besitzen.

M Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ steigt nicht streng monoton, denn $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.

N Das Vorzeichenwechselkriterium ist gegenüber dem Kriterium der höheren Ableitung die stärkere hinreichende Bedingung bei der Bestimmung von Extrem- bzw. Wendestellen.

O Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, kann nicht gesagt werden, ob x_0 eine Extremstelle ist oder nicht.

P Globale Extremstellen können nicht an den Rändern eines abgeschlossenen Intervalls liegen.

Q In einem Sattelpunkt ändert sich das Monotonieverhalten nicht.

Ich kann …	„Am Ziel!“-Aufgaben	Hilfe
… lokale und globale Hoch- bzw. Tiefpunkte bestimmen und unterscheiden.	1, 2, 3, 4, D, E, F, L, O, P	S. 80, 82
… das Monotonieverhalten von Funktionen bestimmen.	3, B, C, M, Q	S. 76
… Wendepunkte bestimmen.	1, 3, G, H, Q	S. 84
… das Krümmungsverhalten von Funktionen bestimmen.	3, G	S. 84
… die Eigenschaften von Funktionen und deren Graphen auch mithilfe von Ableitungsfunktionen untersuchen.	1, 2, 3, 4, A, I, J, N, O	S. 90
… Extremwertaufgaben lösen.	4, K	S. 94