1 Trigonometrische Funktionen

Einstieg

- Das Wiener Riesenrad mit seinen 15 Waggons hat eine maximale Höhe von 64,75 m und einen Durchmesser von 200 engl. Fuß = 60,96 m (Durchmesser gemessen über den Aufhängungsachsen der Waggons). Die Höhe der Aufhängungsachse eines Waggons ändert sich mit dem Drehwinkel (Drehung in mathematisch positiver Richtung, d. h. entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn). Stelle die Zuordnung *Drehwinkel* $\mapsto$ *Höhe der Aufhängungsachse eines Waggons* in einem Diagramm dar. Beschreibe den Graphen.

Ausblick

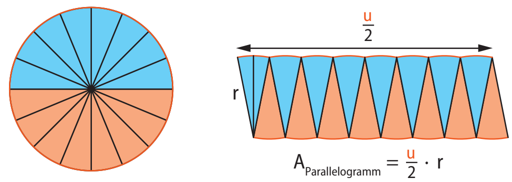
Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, …

- dass man Winkel auch im Bogenmaß messen kann.
- Sinus und Kosinus am Einheitskreis zu definieren.
- welche Eigenschaften die Sinusfunktion hat.
- den Einfluss von Parametern auf den Graphen der Sinusfunktion zu beschreiben.
- periodische Vorgänge im Alltag mit Funktionen zu modellieren.

1 Das kann ich schon …

Berechnungen am Kreis

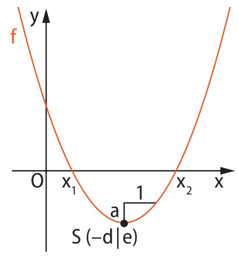
Umfang u eines Kreises:
$u = \pi \cdot d = 2 \cdot \pi \cdot r$
Flächeninhalt eines Kreises:
$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$

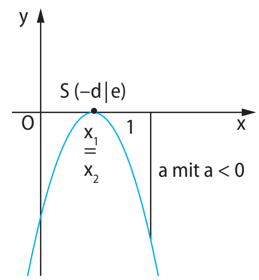


Quadratische Funktionen und ihre Eigenschaften

Funktionsgleichung in Scheitelpunktform mit Scheitelpunkt S (–d | e) und Streckungsfaktor a ($a \neq 0$):
$f(x) = a \cdot (x + d)^2 + e$
Graph: Parabel

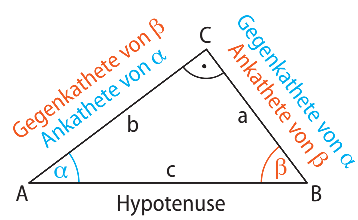
Definitionsbereich $\mathbb{D}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
Wertebereich $\mathbb{W}$	$\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R}: y \geq e\}$, falls $a > 0$ $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R}: y \leq e\}$, falls $a < 0$
Nullstellen x_1 und x_2	$x_{1/2} = -d \pm \sqrt{-\frac{e}{a}}$
Monotonie	falls $a > 0$: monoton fallend für $x < -d$, monoton steigend für $x > -d$. falls $a < 0$: monoton steigend für $x < -d$, monoton fallend für $x > -d$.
Symmetrie	achsensymmetrisch zur Geraden $x = -d$





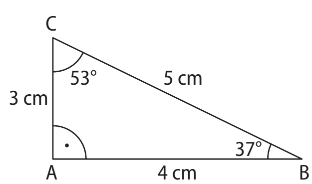
Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Seitenverhältnisse eindeutig durch die Größe der beiden spitzen Winkel des Dreiecks festgelegt.
Bezogen auf die spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet man diejenige Kathete, die dem betrachteten Winkel gegenüber liegt, als Gegenkathete, und diejenige, die an dem Winkel anliegt, als Ankathete.



In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:

- Sinus des Winkels $= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$
  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\sin \beta = \frac{b}{c}$
- Kosinus des Winkels $= \frac{\text{Ankathete des Winkels}}{\text{Hypotenuse}}$
  $\cos \alpha = \frac{b}{c}$; $\cos \beta = \frac{a}{c}$
- Tangens des Winkels $= \frac{\text{Gegenkathete des Winkels}}{\text{Ankathete des Winkels}}$
  $\tan \alpha = \frac{a}{b}$; $\tan \beta = \frac{b}{a}$



$\sin 37° = \frac{3\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = \cos 53°$
$\cos 37° = \frac{4\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = \sin 53°$
$\tan 37° = \frac{3\,\text{cm}}{4\,\text{cm}}$; $\tan 53° = \frac{4\,\text{cm}}{3\,\text{cm}}$

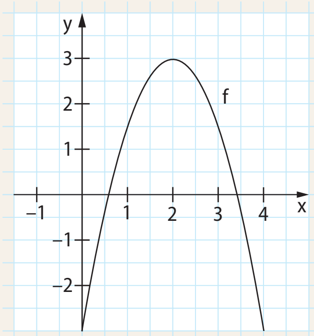
Berechnungen am Kreis

1 Berechne die fehlenden Größen des Kreises.

	a)	b)	c)	d)	e)
Radius r	1 cm				
Durchmesser d		4,8 mm			9,6 cm
Umfang u			100 m		
Flächeninhalt A				25 ha	

Quadratische Funktionen und ihre Eigenschaften

2 Vervollständige die Tabelle in deinem Heft.

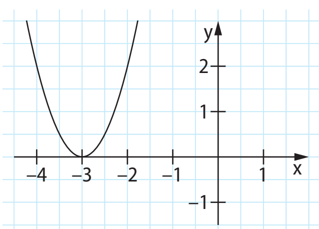
	Beschreibung	Funktionsgleichung	Graph
a)	Die Normalparabel ist um 1 Einheit nach links und um 3 Einheiten nach unten verschoben und mit dem Faktor 2 gestreckt.		
b)		$f(x) = -(x-4)^2 - 2$	
c)			

3 Gib jeweils die Eigenschaften der quadratischen Funktion an.

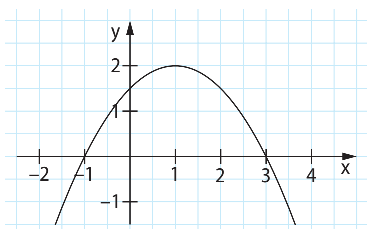
a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$

c)



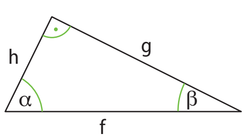
d)



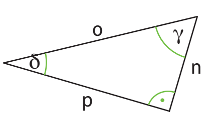
Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

4 Gib jeweils den Sinus, Kosinus und Tangens des Winkels als Verhältnis der Seitenlängen an.

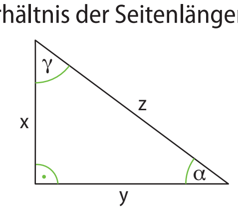
a)



b)



c)

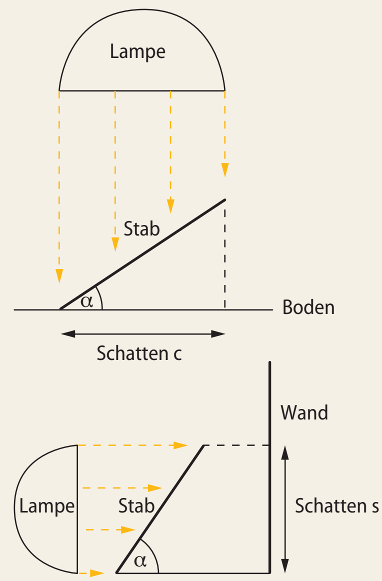


1 Entdecken

Kap. 1.2

Experiment: Schattenwurf

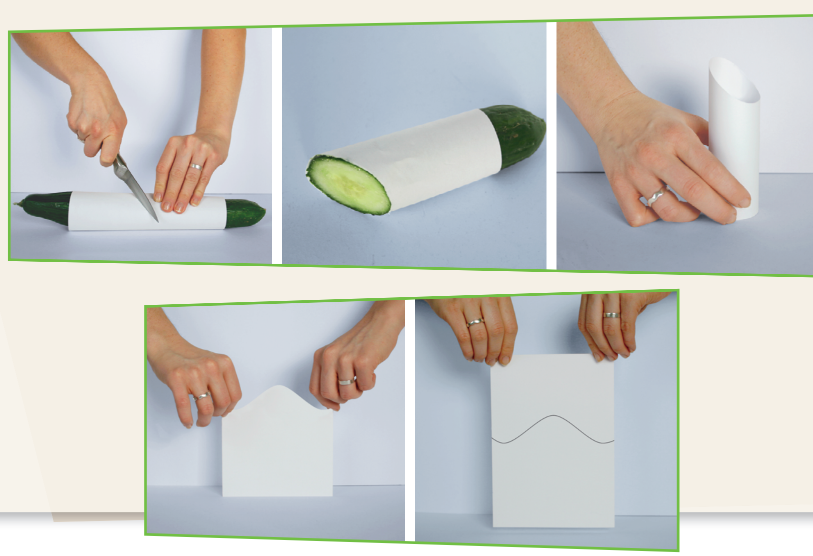
- Halte eine Lichtquelle senkrecht über einen 1 m langen Stab. Der Stab steht fest mit einem Ende auf dem Boden und ist zum Boden im Winkel α geneigt. Entsprechend seiner Neigung wirft der Stab einen Schatten auf den Boden. Miss die Länge c des Schattens für verschiedene Neigungswinkel α. Trage die Punkte mit den Koordinaten $(\alpha \mid c)$ in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie miteinander.
- Halte nun eine Lichtquelle waagerecht neben den 1 m langen Stab. Der Stab wirft dabei einen Schatten an die Wand. Miss die Länge s des Schattens für verschiedene Neigungswinkel α. Trage die Punkte mit den Koordinaten $(\alpha \mid s)$ in ein Koordinatensystem ein und verbinde sie miteinander.
- Vergleiche die beiden Graphen miteinander. Was fällt dir auf?



Kap. 1.3

Experiment: Gurkenschnitt

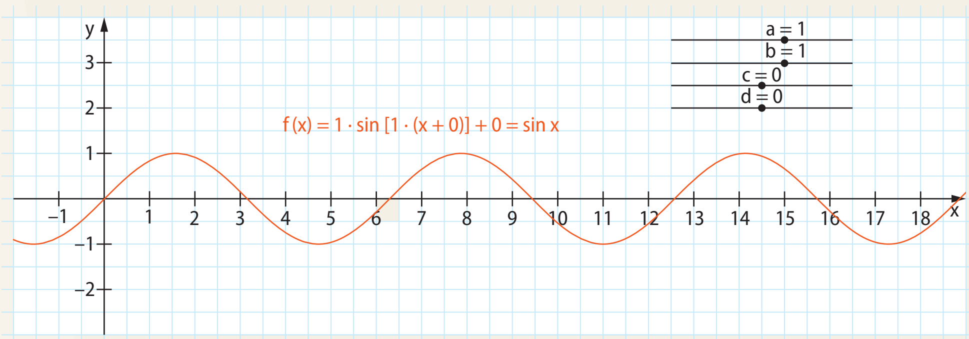
- Beschreibe die Bilder und führe ein entsprechendes Experiment selbst durch.
- Verwende unterschiedlich dicke Gurken und schneide in verschiedenen Winkeln.



Kap. 1.4

Die allgemeine Sinusfunktion f (x) = a · sin [b · (x + c)] + d

Untersuche die Auswirkungen der Parameter a, b, c und d in der Funktionsgleichung f (x) = a · sin [b · (x + c)] + d auf den Funktionsgraphen mithilfe eines Computerprogramms. Richte dafür Schieberegler für a, b, c und d ein.



- Stelle den Schieberegler für b auf 1 und für c und d auf 0 und verändere nur den Parameter a mithilfe des Schiebereglers a. Betrachte den Funktionsgraphen. Beschreibe, wie sich der Wert des Parameters a auf den Verlauf des Graphen f (x) = a · sin (x) auswirkt.
- Stelle den Schieberegler für a auf 1 und für c und d auf 0 und verändere nur den Parameter b mithilfe des Schiebereglers b. Betrachte den Funktionsgraphen. Beschreibe, wie sich der Wert des Parameters b auf den Verlauf des Graphen f (x) = sin (b · x) auswirkt.
- Stelle den Schieberegler für a und b auf 1 und für d auf 0 und verändere nur den Parameter c mithilfe des Schiebereglers c. Betrachte den Funktionsgraphen. Beschreibe, wie sich der Wert des Parameters c auf den Verlauf des Graphen f (x) = sin (x + c) auswirkt.
- Stelle den Schieberegler für a und b auf 1 und für c auf 0 und verändere nur den Parameter d mithilfe des Schiebereglers d. Betrachte den Funktionsgraphen. Beschreibe, wie sich der Wert des Parameters d auf den Verlauf des Graphen f (x) = sin (x) + d auswirkt.

1

1.1 Das Bogenmaß

Entdecken

Zur Ausbildung junger Pferde oder im Reitunterricht wird ein Pferd beim Longieren an einer 8 m langen Leine (der „Longe“) auf einer kreisförmigen Bahn geführt.

- Untersuche den Zusammenhang zwischen dem Mittelpunktswinkel α, den die Leine überstreicht, und der Bogenlänge b, also der Strecke, die das Pferd zurücklegt. Übertrage dazu die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
b	0 m							

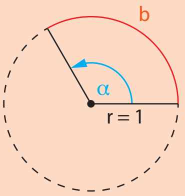
- Für den Umfang eines Kreises gilt $u = 2\pi r$. Vergleiche für jedes Wertepaar $(\alpha \mid b)$ aus der Tabelle den Anteil des Winkels vom Vollwinkel $\frac{\alpha}{360°}$ mit dem Anteil der Bogenlänge vom Gesamtumfang $\frac{b}{2\pi r}$.
- Was stellst du fest? Leite daraus eine Formel zur Berechnung der Bogenlänge b her.

Verstehen

Jedem Mittelpunktswinkel α eines Kreises mit dem Radius r lässt sich eindeutig eine Bogenlänge b zuordnen.

Für das Bogenmaß eines Winkels α wird auch die Abkürzung arc α (von lat. arcus: Bogen) verwendet.

An einem Einheitskreis (r = 1 LE) kann man jedem Mittelpunktswinkel α eindeutig die Länge des zugehörigen Kreisbogens b zuordnen.
Statt den Winkel α in Grad zu messen, kann man die Maßzahl der zugehörigen **Bogenlänge b** am Einheitskreis verwenden.
Man bezeichnet dieses Winkelmaß als Bogenmaß mit der Einheit „rad“ (von „Radiant“).



Es gilt:

$$\frac{b}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$$

Beispiele

Wenn feststeht, dass ein Winkel im Bogenmaß gemessen wird, lässt man die Einheit „rad“ weg.

1. Berechne das zugehörige Bogenmaß zum Winkel $\alpha = 120°$.

Lösung:

$$b = \frac{120° \cdot \pi}{180°} = \frac{2}{3}\pi \approx 2{,}09$$

Am Taschenrechner:
DEG („degree“): Gradmaß
RAD („radian“): Bogenmaß

2. Berechne die Größe des Winkels α im Gradmaß, wenn seine Größe im Bogenmaß 1 rad ist.

Lösung:

$$1 = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°} \quad \left| \cdot \frac{180°}{\pi} \right.$$

$$\alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$$

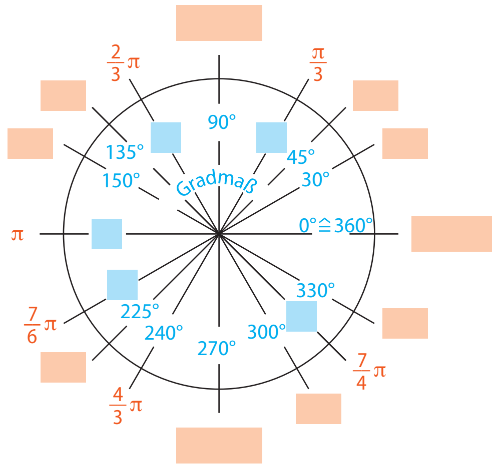
- Erkläre die Bezeichnung „Bogenmaß" für die Größe eines Winkels.
- Begründe, dass die Bogenmaße zu Vielfachen von 180° ganzzahlige Vielfache von π sind.
- „Ein Winkel von 10 rad ist kleiner als ein Winkel von 10°." Entscheide, ob diese Aussage wahr oder falsch ist.

Nachgefragt

Aufgaben

oHiMi
1, 5

1 Übertrage den Einheitskreis (1 LE ≙ 5 cm) in dein Heft und ergänze jeweils die fehlenden Angaben. Schreibe die Angaben im Bogenmaß als Anteile von π.



2 Übertrage die Tabelle in dein Heft und bestimme die fehlenden Werte. Runde auf zwei Dezimalen.

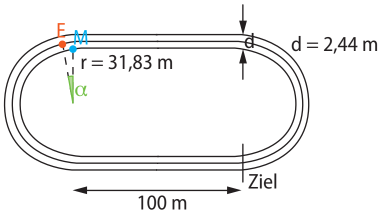
Winkel im …	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Gradmaß	24,5°	356,3°	0,5°			
Bogenmaß				0,5	4,36	6,02

Winkel im …	g)	h)	i)	j)	k)	l)
Gradmaß	465,3°	715,0°	1000°			
Bogenmaß				7,5	12,76	45,23

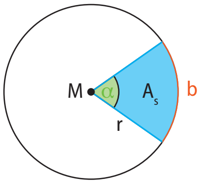
3 Eine Seemeile entspricht der Bogenlänge auf dem Äquator, die zum Mittelpunktswinkel von $\frac{1}{60}$ Grad gehört. Berechne die Länge einer Seemeile (Erdradius: 6378 km).

Bogenmaß für alle Radien r: $b = \frac{2\pi r \cdot \alpha}{360°}$

4 Mike und Elias laufen im Stadion 200 m um die Wette (siehe Abbildung). Berechne den Winkel α und die Bogenlänge b, um die der Startpunkt von Elias gegenüber dem Startpunkt von Mike verschoben werden muss, damit beide Laufstrecken 200 m lang sind.

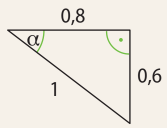


5 Weise nach, dass man den Flächeninhalt A_S eines Kreissektors mit Radius r und Mittelpunktswinkel b (im Bogenmaß) mit der Formel $A_S = \frac{1}{2} r \cdot b$ berechnen kann. Beachte dabei die in Aufgabe 3 angegebene Formel für das Bogenmaß.

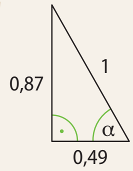


Entdecken

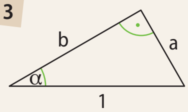
1



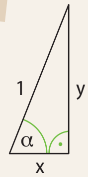
2



3



4



- Gib jeweils den Sinus und den Kosinus des Winkels α als Verhältnis der Seitenlängen an. Beschreibe, was dir auffällt.

Verstehen

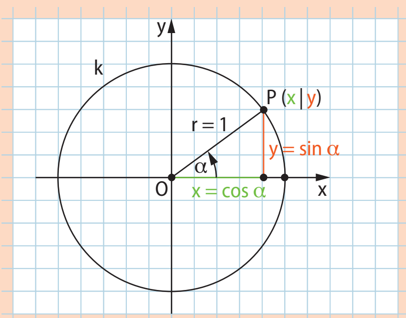
Positiver Drehwinkel: Drehung gegen den Uhrzeigersinn

Negativer Drehwinkel: Drehung im Uhrzeigersinn

Sinus und Kosinus für beliebige Winkel lassen sich am Einheitskreis definieren.

Befindet sich ein Punkt P (x | y) auf einem Einheitskreis k um den Ursprung O mit r = 1 LE und ist α der positive Drehwinkel zwischen der positiven x-Achse und der Strecke $\overline{OP}$, so gilt:

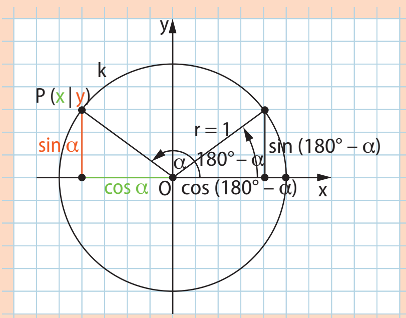
I. Quadrant: $0° < \alpha < 90°$



$y = \sin\alpha$

$x = \cos\alpha$

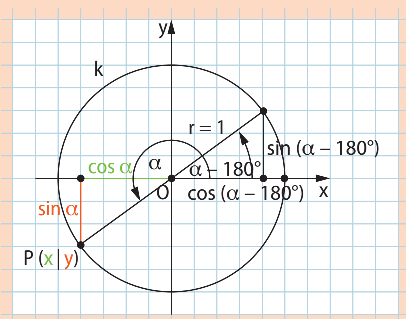
II. Quadrant: $90° < \alpha < 180°$



$y = \sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

$x = \cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$

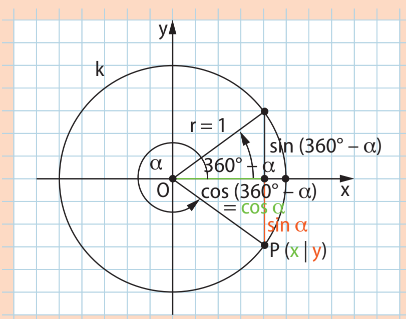
III. Quadrant: $180° < \alpha < 270°$



$y = \sin\alpha = -\sin(\alpha - 180°)$

$x = \cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$

IV. Quadrant: $270° < \alpha < 360°$



$y = \sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$

$x = \cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$

Drehungen über 360°

$\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha;\ k \in \mathbb{N}$

$\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha;\ k \in \mathbb{N}$

Negative Winkel

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Beispiele

1. Berechne durch Zurückführung auf einen spitzen Winkel den exakten Wert von …

a) sin 120°. **b)** cos 225°.

Lösung:

a) Da $90° < 120° < 180°$ ist, gilt: $\sin 120° = \sin (180° - 60°) = \sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

b) Da $180° < 225° < 270°$ ist, gilt: $\cos 225° = -\cos (225° - 180°) = -\cos 45° = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. Ermittle mithilfe deines Taschenrechners alle Winkel zwischen 0° und 360°, für die gilt:

a) $\sin\alpha = 0{,}5$ **b)** $\sin\beta = -0{,}25$ **c)** $\cos\gamma = 0{,}71$ **d)** $\cos\delta = -0{,}44$

Lösung:

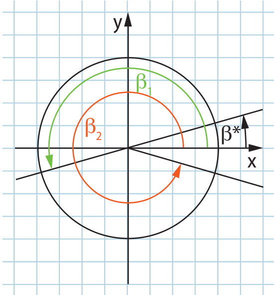
a) $\alpha_1 = \sin^{-1}(0{,}5) = 30°$; $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$

b) Zuerst bestimmt man denjenigen spitzen Hilfswinkel β*, für den
$\sin\beta^* = 0{,}25$ ist: $\beta^* = \sin^{-1}(0{,}25) \approx 14{,}5°$, und dann die gesuchten Winkel:
$\beta_1 = 180° + \beta^* \approx 180° + 14{,}5° = 194{,}5°$
$\beta_2 = 360° - \beta^* \approx 360° - 14{,}5° = 345{,}5°$

c) $\gamma_1 = \cos^{-1}(0{,}71) \approx 44{,}8°$; $\gamma_2 \approx 360° - 44{,}8° = 315{,}2°$

d) Zuerst bestimmt man denjenigen spitzen Hilfswinkel δ*, für den
$\cos\delta^* = 0{,}44$ ist: $\delta^* = \cos^{-1}(0{,}44) \approx 63{,}9°$, und dann die gesuchten Winkel:
$\delta_1 = 180° - \delta^* \approx 180° - 63{,}9° = 116{,}1°$
$\delta_2 = 180° + \delta^* \approx 180° + 63{,}9° = 243{,}9°$

Nutze die Taste sin⁻¹ *und* cos⁻¹*, um die Winkel zu berechnen.*



- Leonie behauptet: „Für alle Winkelmaße über 360° wiederholen sich die Werte von Sinus und Kosinus." Begründe die Behauptung.
- Marco behauptet: „Einem gegebenen Wert für sin α kann genau ein Winkel α zugeordnet werden." Hat er Recht?
- Begründe den Zusammenhang $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$ am Einheitskreis.

Nachgefragt

Aufgaben

oHiMi
3

1 Bestimme zeichnerisch den Sinuswert und den Kosinuswert des Winkels mithilfe eines Einheitskreises (Maßstab: 10 : 1).

a) 20° **b)** 165° **c)** 240° **d)** 330°
e) $\frac{7}{6}\pi$ **f)** $\frac{7}{10}\pi$ **g)** $\frac{17}{10}\pi$ **h)** $\frac{2}{5}\pi$

2 Bestimme zeichnerisch mithilfe des Einheitskreises (Maßstab: 10 : 1) die gesuchten Winkel im Gradmaß und im Bogenmaß.

a) $\sin\alpha = 0{,}97$ **b)** $\sin\beta = -0{,}20$ **c)** $\cos\gamma = 0{,}53$
d) $\cos\gamma = -0{,}95$ **e)** $\sin x = -0{,}45$ **f)** $\cos x = 1{,}15$

Hinweis:
x ≙ b (Bogenmaß)
Rechne das Bogenmaß in das Gradmaß um.

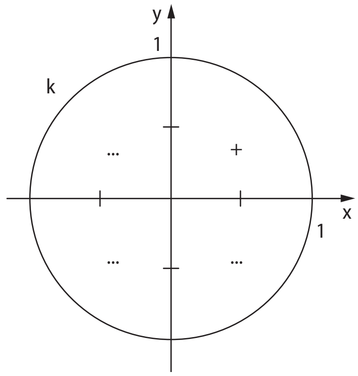
3 Vervollständige in der Tabelle das Bogenmaß b, sin α und cos α für spezielle Winkel α.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	315°	360°
b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$								
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1								
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0								

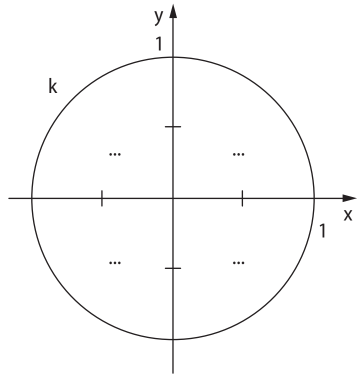
oHiMi
4 – 7, 9

4 Ergänze in deinem Heft bei den Quadranten die Vorzeichen der Sinus- bzw. Kosinuswerte.

a) Sinuswerte



b) Kosinuswerte



5 Gib ein Winkelmaß $\alpha \in [0°; 360°)$ und den zugehörigen Quadranten an, sodass gilt:

a) $\sin\alpha < 0$ und $\cos\alpha > 0$ **b)** $\sin\alpha < 0$ und $\cos\alpha < 0$
c) $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha > 0$ **d)** $\sin\alpha > 0$ und $\cos\alpha < 0$

6 Bestimme $\alpha \in [0°; 90°]$.

a) $\sin 170° = \sin\alpha$ **b)** $\sin 320° = \sin\alpha$ **c)** $\sin 200° = \sin\alpha$
d) $\cos 275° = \cos\alpha$ **e)** $\cos 115° = \cos\alpha$ **f)** $\cos 230° = \cos\alpha$

7 Notiere die Gleichungen unter Verwendung des Bogenmaßes.

a) $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ **b)** $\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$
c) $\cos\alpha = -\cos(\alpha - 180°)$ **d)** $\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$

Hinweis:
„Wenn du nicht mehr weiter weißt, dann zeichne einen Einheitskreis."

8 Berechne den exakten Wert durch Zurückführung auf einen spitzen Winkel.

a) $\sin 150°$ **b)** $\sin 300°$ **c)** $\sin 225°$ **d)** $\cos 120°$
e) $\cos 210°$ **f)** $\cos 330°$ **g)** $\sin 135°$ **h)** $\cos(-240°)$
i) $\sin 390°$ **j)** $\sin(-450°)$ **k)** $\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$ **l)** $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

9 Finde ohne Verwendung des Taschenrechners heraus, welche der zwölf Terme wertgleich sind.

$\sin 18°$ $\cos 342°$ $\cos 72°$ $\sin\left(\frac{11}{10}\pi\right)$
$\cos\left(\frac{3}{10}\pi\right)$ $\sin 504°$ $\sin 396°$
$\sin(-36°)$ $\cos 792°$
$\cos 252°$ $\cos(-72°)$ $\cos\left(\frac{7}{5}\pi\right)$

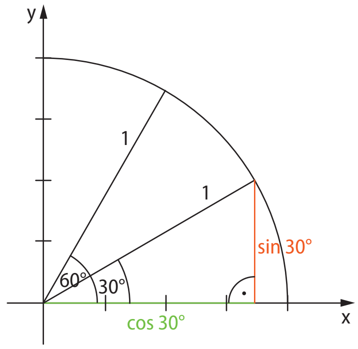
10 Ermittle mithilfe des Taschenrechners alle Winkel α in Grad zwischen 0° und 360° bzw. alle Winkel x im Bogenmaß zwischen 0 und 2π, für die gilt:

a) $\sin\alpha = 0{,}4384$ **b)** $\sin\alpha = -0{,}4067$ **c)** $\cos\alpha = 0{,}6428$ **d)** $\cos\alpha = -0{,}8090$
e) $\sin\alpha = 0{,}2588$ **f)** $\cos\alpha = 0{,}9848$ **g)** $\sin x = 0{,}45$ **h)** $\sin x = -0{,}8$
i) $\cos x = 0{,}7$ **j)** $\cos x = -0{,}26$ **k)** $\cos x = 0{,}866$ **l)** $\sin x = -0{,}9239$

Zwischen Sinus und Kosinus bestehen folgende Zusammenhänge:
$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ und $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$.

Weiterdenken

11 Begründe den Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus am Beispiel $\alpha = 30°$.



12 Ergänze in deinem Heft die Lücken so, dass wahre Aussagen entstehen.

a) $\sin 45° = \cos$ ▒ **b)** $\sin 75° = \cos$ ▒ **c)** $\cos 20° = \sin$ ▒
d) $\cos 80° = \sin$ ▒ **e)** $\cos 85° - \sin 5° =$ ▒ **f)** $\sin 30° - \cos 120° = \sin$ ▒

13 **a)** Von einem spitzen Winkel α ist bekannt, dass $\sin\alpha = 0{,}6$ ist. Gesa berechnet $\cos\alpha$, ohne vorher α zu ermitteln. Beschreibe ihr Vorgehen.

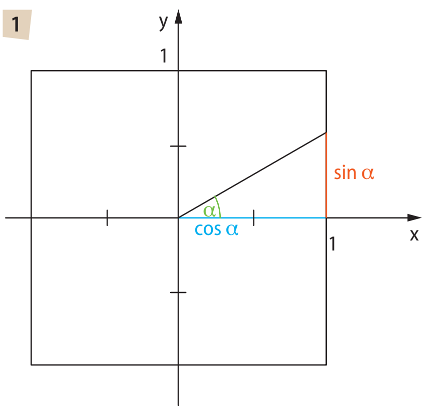
$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$
$0{,}36 + (\cos\alpha)^2 = 1$
$(\cos\alpha)^2 = 0{,}64$
$\cos\alpha = 0{,}8$

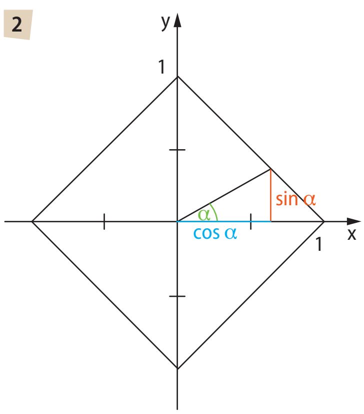
b) Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze die fehlenden Werte, ohne die Größe des Winkels α zu ermitteln.

	1	2
sin α	0,25	
cos α		0,5

14 Nimm an, der Sinus eines beliebigen Winkels sei am Quadrat statt am Einheitskreis definiert.

Überlege und begründe, ob du die Werte für tan α weiterhin wie am Einheitskreis nutzen kannst.

1


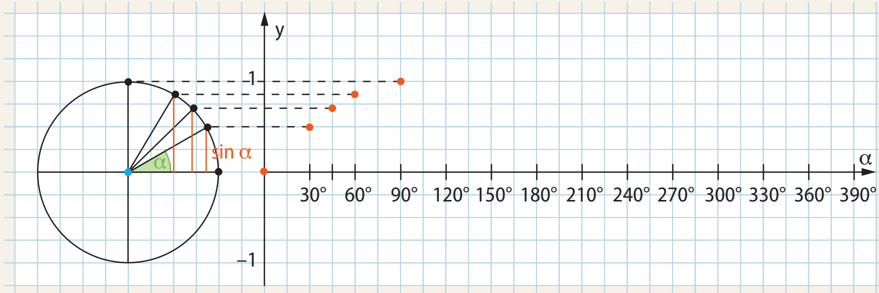
2


a) Berechne den Sinuswert und den Kosinuswert für die folgenden Winkel:
15°; 140°; 250°; 300°

b) Berechne alle Winkel zwischen 0° und 360°, für die gilt:
$\sin\alpha = 0{,}7$; $\sin\alpha = -0{,}4$; $\cos\alpha = 0{,}7$

Entdecken

- Zeichne den Graphen der Funktion, die jedem Winkelmaß α im Einheitskreis den zugehörigen Sinuswert zuordnet, punktweise mithilfe des Einheitskreises. Trage dafür auf der x-Achse den Winkel im Gradmaß (30° ≙ 1 cm) und als y-Wert den zu α gehörigen Sinuswert ab.



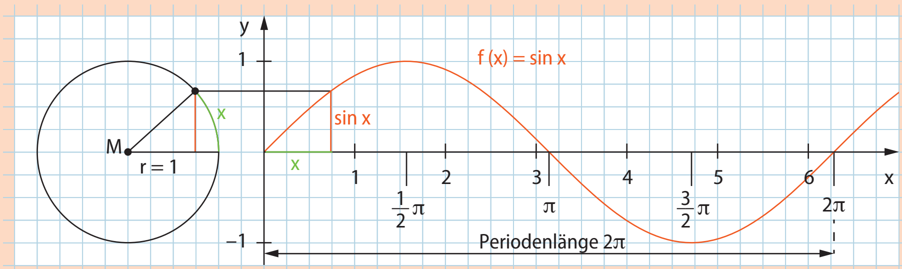
- Beschreibe die Eigenschaften des Graphen der Funktion.

Verstehen

Funktionen, deren Funktionswerte sich in immer gleichen Abständen wiederholen, nennt man ***periodische Funktionen****. Der kürzeste Abstand zwischen den Wiederholungen heißt* ***Periodenlänge****.*

Im Einheitskreis lässt sich jedem Winkelmaß eindeutig ein Sinuswert zuordnen.

Die Funktion **f (x) = sin x**, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis genau einen Sinuswert zuordnet, heißt **Sinusfunktion**, ihr Graph **Sinuskurve**.



	Bogenmaß	Gradmaß
Definitionsbereich $\mathbb{D}$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	
Wertebereich $\mathbb{W}$	$\mathbb{W} = [-1; 1]$	
Periodenlänge	2π	360°
Symmetrie	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung	
	$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
Nullstellen	ganzzahlige Vielfache von π bzw. von 180°	
	$x_k = k \cdot \pi\ (k \in \mathbb{Z})$	$x_k = k \cdot 180°\ (k \in \mathbb{Z})$

Beispiel

Berechne alle Lösungen der Gleichung $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lösung:

Berechne zuerst alle Werte x mit $0 \le x \le 2\pi$, für die gilt: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Addiere dazu ganzzahlige Vielfache der Periodenlänge:

$x_{1,k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ und $x_{2,k} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

- Erkläre den Zusammenhang zwischen den Hochpunkten der Sinusfunktion und der Lage eines Punktes P auf der Einheitskreislinie.
- Beschreibe die Arten von Symmetrie, die du in der Sinusfunktion erkennen kannst.

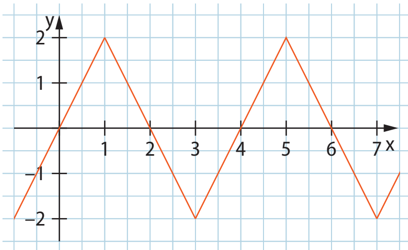
Nachgefragt

Aufgaben

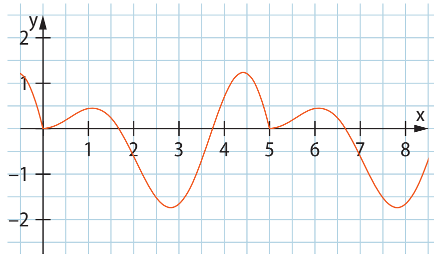
oHiMi
1 – 2

1 Gib jeweils die Periodenlänge der periodischen Funktion an.

a)

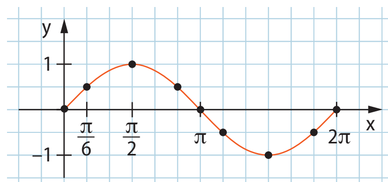


b)



2 **a)** Bestätige die Symmetrieeigenschaft der Sinusfunktion: $f(-x) = -f(x)$.
b) Beschreibe die Eigenschaft der Sinusfunktion mit eigenen Worten:
$\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ mit $k \in \mathbb{Z}$

3 Der Graph der Sinusfunktion wurde mithilfe von neun ausgewählten Punkten erstellt.



a) Gib die Koordinaten der Punkte an.
b) Erkläre, dass es zum einfachen Zeichnen geschickt ist, die beiden Achsen wie abgebildet zu skalieren.
c) Skizziere den Verlauf des Graphen der Sinusfunktion mit der abgebildeten Achsenskalierung für $-2\pi \le x \le 4\pi$. Beschreibe dein Vorgehen.

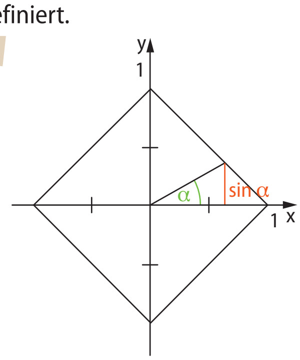
4 Berechne alle Lösungen der Gleichung.

a) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\sin x = 0{,}65$ **d)** $\sin x = -0{,}79$

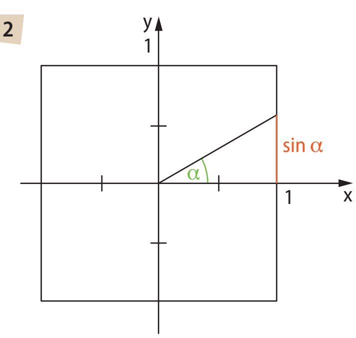
5 Nimm an, der Sinus eines beliebigen Winkels sei am Quadrat statt am Einheitskreis definiert.

Erinnere dich an Aufgabe 14 von Seite 23.

1



2



a) Berechne die zugehörige „Bogenlänge".
b) Zeichne den Graphen der Funktion, die jedem Winkelmaß im Quadrat den zugehörigen Sinuswert zuordnet.
c) Gib Eigenschaften der so definierten „Sinusfunktion" an.

Entdecken

- Untersuche den Einfluss der folgenden Parameter auf die Sinusfunktion. Setze dafür jeweils die Werte 2; 0,5; −1; −0,5 für den Parameter ein und zeichne den Funktionsgraphen.

1 $f(x) = a \cdot \sin x$ **2** $f(x) = \sin(b \cdot x)$ **3** $f(x) = \sin(x + c)$ **4** $f(x) = \sin x + d$

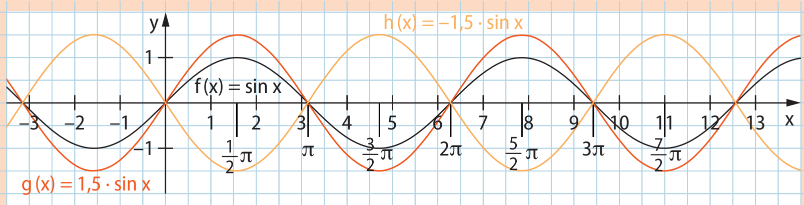
Verstehen

Die Parameter a, b, c und d beeinflussen den Verlauf der Sinusfunktion.

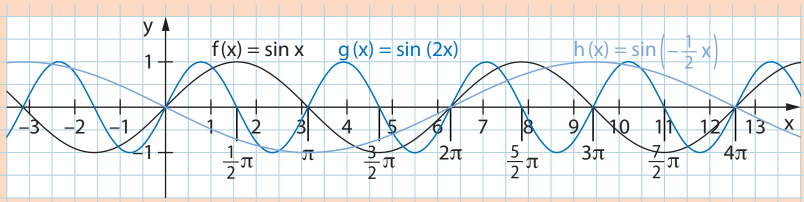
*Der Parameter |a| heißt **Amplitude**.*

Die **allgemeine Sinusfunktion** lässt sich in der Form
$f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$ mit $x, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schreiben.

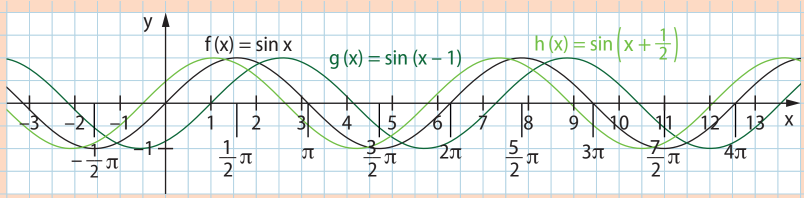
1 Der Parameter a verändert den Wertebereich ($y \in [-|a|; |a|]$, falls $d = 0$).
$|a| < 1$ staucht / $|a| > 1$ streckt } sin x in y-Richtung.
$a < 0$ spiegelt $|a| \cdot \sin x$ an der x-Achse.



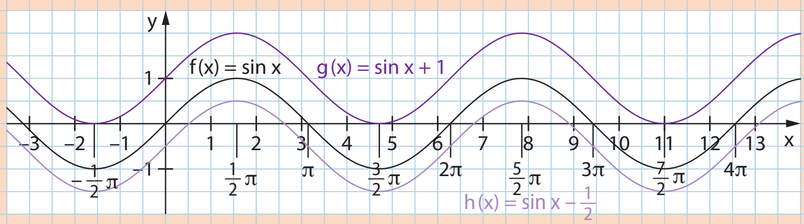
2 Der Parameter b verändert die Periodenlänge $\left(\frac{2\pi}{|b|}\right)$.
$|b| < 1$ verlängert / $|b| > 1$ verkürzt } die Periodenlänge gegenüber sin x.
$b < 0$ spiegelt $\sin(|b| \cdot x)$ an der x-Achse.



3 Der Parameter c verschiebt die Funktion sin x entlang der x-Achse:
$c > 0$ verschiebt in negative Richtung, $c < 0$ verschiebt in positive Richtung.



4 Der Parameter d verschiebt die Funktion sin x entlang der y-Achse:
$d > 0$ verschiebt in positive Richtung, $d < 0$ verschiebt in negative Richtung.

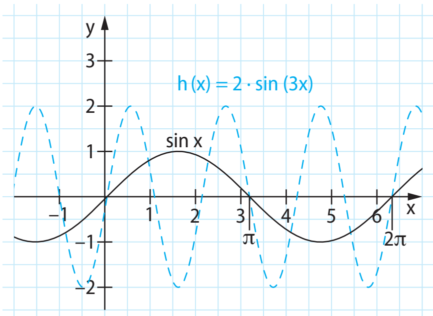


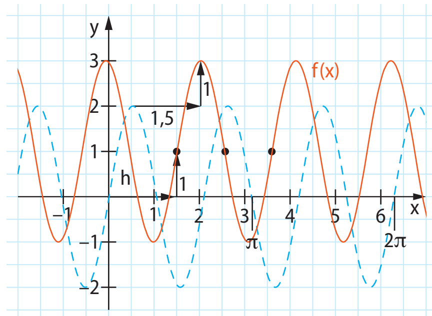
Beispiele

1. Zeichne den Graphen der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin[3 \cdot (x - 1{,}5)] + 1$ mindestens eine Periodenlänge lang. Gib den Wertebereich, die Amplitude und die Periodenlänge an.

Der Graph der Grundfunktion sin x kann bei der Lösung helfen.

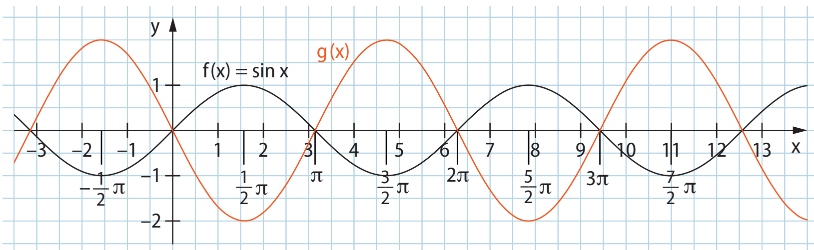
Lösung:
Zeichne zuerst die Hilfsfunktion $h(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x)$, die die Streckungen bzw. Stauchungen berücksichtigt. Verschiebe dann die Hilfsfunktion.





$\mathbb{W}_f = [-1; 3]$; Amplitude: 2; Periodenlänge: $\frac{2\pi}{3} \approx 2{,}1$

2. Gib mindestens zwei mögliche Funktionsgleichungen zum roten Graphen an. Begründe.



Lösungsmöglichkeiten:

Funktionsgleichung	Begründung
1 $g(x) = -2 \cdot \sin x$	Der Graph ist gestreckt: $\lvert a \rvert = 2$. Der Graph ist an der x-Achse gespiegelt, also $a < 0$.
2 $g(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi)$	Der Graph ist gestreckt: $\lvert a \rvert = 2$. Mit $a > 0$ wurde der Graph um π in positiver Richtung entlang der x-Achse verschoben.
3 $g(x) = 2 \cdot \sin(x + \pi)$	Der Graph ist gestreckt: $\lvert a \rvert = 2$. Mit $a > 0$ wurde der Graph um π in negativer Richtung entlang der x-Achse verschoben.

Nachgefragt

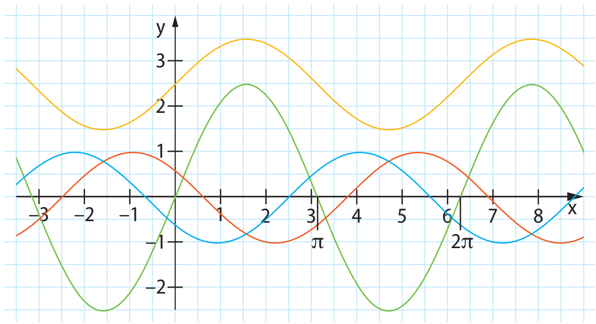
- Begründe, dass die Sinusfunktionen $f(x) = -3 \cdot \sin x$ und $g(x) = 3 \cdot \sin x$ dieselbe Amplitude haben.
- Entscheide begründet, ob die Sinusfunktion $f(x) = -2 \cdot \sin\left(0{,}5 \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 3$ den Wertebereich $\mathbb{W}_f = [-2; 2]$ hat.

Aufgaben

1 Beschreibe, wie der Graph der Funktion f aus dem Graphen von $g(x) = \sin x$ hervorgeht.
a) $f(x) = -3 \cdot \sin x$ **b)** $f(x) = 0{,}5 \cdot \sin(x + 2)$ **c)** $f(x) = \sin(4x) + 2{,}5$

oHiMi
1, 2, 5, 6

2 Ordne jeder Funktionsgleichung den richtigen Graphen zu. Begründe deine Auswahl.
$f(x) = 2{,}5 \cdot \sin x$
$g(x) = \sin(x + 2{,}5)$
$h(x) = \sin x + 2{,}5$
$i(x) = \sin(x - 2{,}5)$

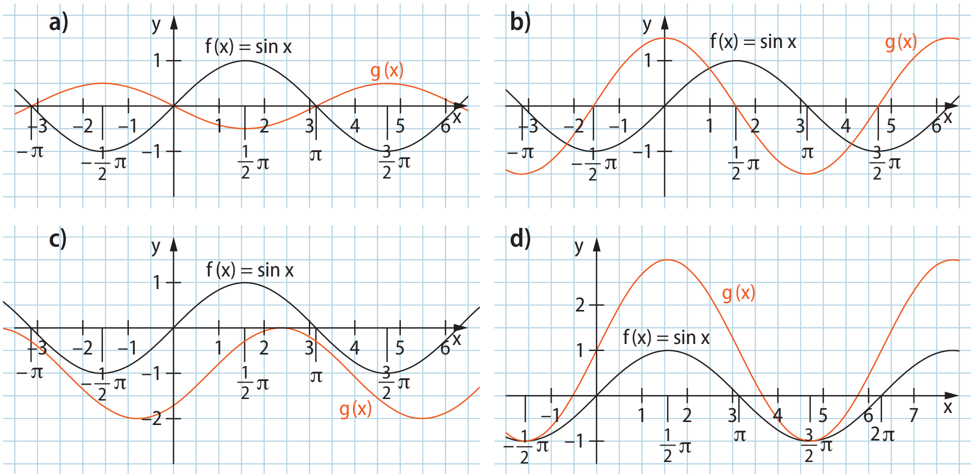


3
1 $f(x) = -\sin(0{,}5x)$
2 $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$
3 $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin[2 \cdot (x - 0{,}5)] - 1$
4 $f(x) = -2 \cdot \sin[1{,}5 \cdot (x - 2)] + 4$

a) Zeichne den Graphen der Funktion f mindestens eine Periodenlänge lang.
b) Gib jeweils den Wertebereich $\mathbb{W}$, die Amplitude und die Periodenlänge an.

4 Finde zeichnerisch alle gemeinsamen Nullstellen der beiden Funktionen f und g im Bereich $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.
a) $f(x) = \sin x$ und $g(x) = \sin(2x)$
b) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ und $g(x) = \sin(2x)$

5 Gib mindestens zwei mögliche Funktionsgleichungen zu dem roten Graphen an. Begründe dein Vorgehen. Der Vergleich mit $f(x) = \sin x$ kann helfen.



6

A WANTED	B WANTED	C WANTED
$\mathbb{W} = [-2; 2]$	$\mathbb{W} = [0; 4]$	$\mathbb{W} = [0; 4]$
Periodenlänge: 2π	Periodenlänge: π	Periodenlänge: 8π
eine Nullstelle bei $\frac{1}{2}\pi$	Schnittpunkt: P (0 | 2)	eine Nullstelle bei 6π

1 $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}x\right) + 2$
2 $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$
3 $f(x) = 2 \cdot \sin(2x) + 2$

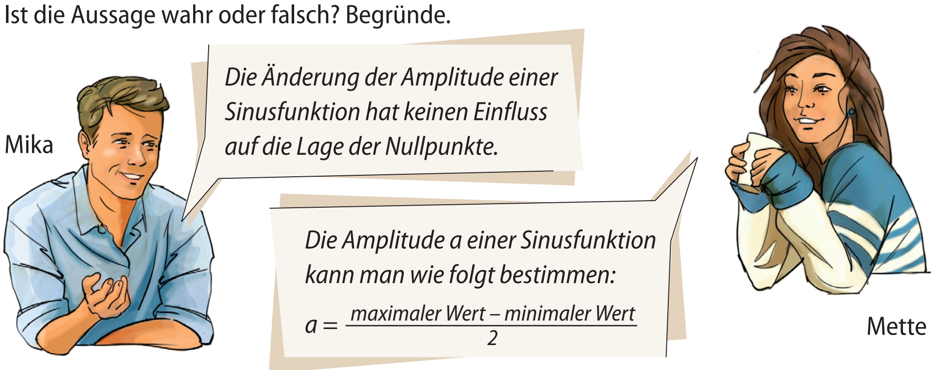
a) Ordne die Steckbriefe einer Funktionsgleichung zu. Begründe deine Auswahl.
b) Erstelle selbst einen solchen Steckbrief. Lass die Funktionen von einem Partner oder einer Partnerin bestimmen.

7 a) Bestimme eine Gleichung einer Sinusfunktion mit folgenden Eigenschaften: Der Graph verläuft durch den Punkt $(0|2)$, die y-Werte liegen zwischen 0,5 und 3,5 und die Periodenlänge ist π.

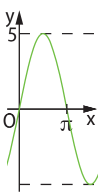
oHiMi 7 – 9, 11

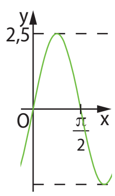
b) Erstelle selbst einen Steckbrief einer Sinusfunktion und lasse die Funktionsgleichung von einem Partner oder einer Partnerin finden.

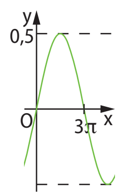
8 Ist die Aussage wahr oder falsch? Begründe.

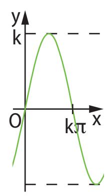


9 Die Abbildungen zeigen gleiche Sinuskurven in unterschiedlich beschrifteten Koordinatensystemen. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.

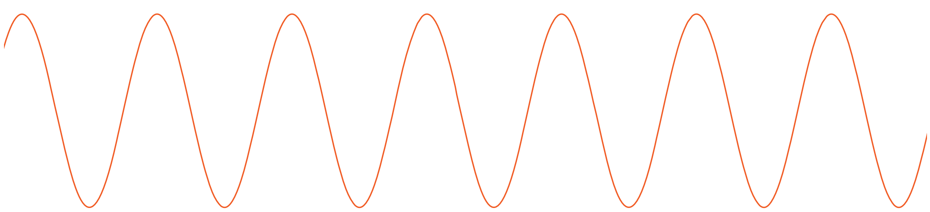
a)


b)


c)


d)


10 Pause den abgebildeten Graphen zunächst ab. Zeichne dann ein beschriftetes Koordinatensystem so ein, dass der Graph zur Funktionsgleichung $f(x) = -3 \cdot \sin(1{,}5x) + 2$ gehört.



11 Finde unter den Funktionsgraphen alle, die identische Graphen in $\mathbb{R}$ besitzen.

$-0{,}75 \cdot \sin x$

$\frac{3}{4} \cdot \sin \cdot (x + \pi)$

$-1{,}5 \cdot \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) + 1$

$\frac{3 \cdot \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)}{2} + 1$

$\frac{3 \cdot \sin(x - \pi)}{4}$

$\frac{((-2) \cdot \sin(x - \pi) - 6)}{3}$

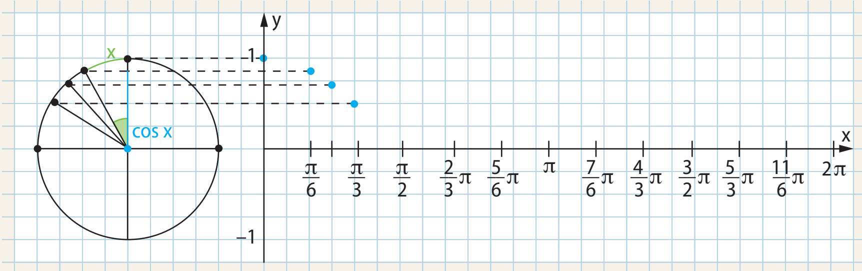
$\frac{2}{3} \cdot \sin(x + \pi) - 2$

$-\frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot \sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) - 2\right)$

$-2 - \frac{2 \cdot \sin(x - \pi)}{3}$

Entdecken

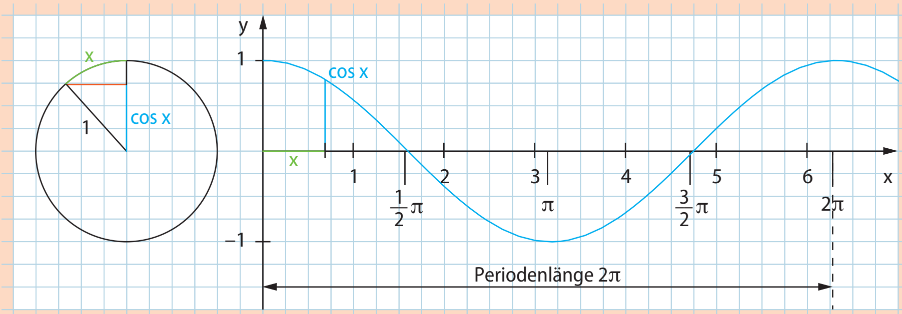
Zeichne punktweise mithilfe des Einheitskreises im Maßstab 2 : 1 den Graphen der Funktion, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis den zugehörigen Kosinuswert zuordnet. Trage dafür auf der x-Achse den Winkel x im Bogenmaß und als y-Wert den zu x gehörigen Kosinuswert ab. Um den Kosinuswert einfacher zu übertragen, drehe den Einheitskreis um 90°.



Verstehen

Jedem Winkelmaß im Einheitskreis lässt sich eindeutig ein Kosinuswert zuordnen.

Die Funktion f (x) = cos x, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis genau einen Kosinuswert zuordnet, heißt **Kosinusfunktion**, ihr Graph **Kosinuskurve**.

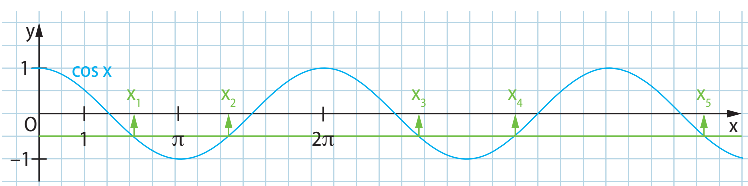


Den Graphen der Kosinusfunktion kann man als einen verschobenen Graphen der Sinusfunktion auffassen: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Die allgemeine Form der Kosinusfunktion lautet mit $x, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f(x) = a \cdot \cos[b \cdot (x + c)] + d$. Die Parameter a, b, c, d bewirken die gleichen Veränderungen wie bei der Sinusfunktion.

Beispiel

Berechne alle Lösungen der Gleichung cos x = –0,5.

Lösung:



Berechne zuerst alle Werte mit $0 \leq x \leq 2\pi$, für die gilt: cos x = –0,5. Addiere dazu ganzzahlige Vielfache der Periodenlänge.

$x_1 = \cos^{-1}(-0{,}5) = \frac{2}{3}\pi$ und $x_2 = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$; $x_{1,k} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ und $x_{2,k} = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

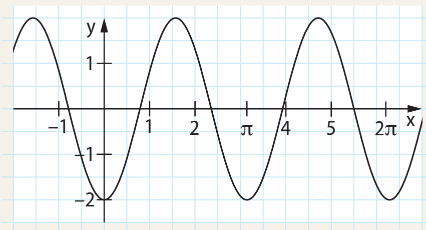
- Erkläre, warum man zum einfacheren Zeichnen der Kosinuskurve mithilfe des Einheitskreises den Einheitskreis um 90° drehen kann.
- Beschreibe die Eigenschaften der Kosinusfunktion. Vergleiche mit der Sinusfunktion.

Nachgefragt

Aufgaben

oHiMi
3 – 5

1

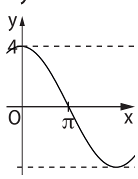
Beschreibung	Graph	Funktionsgleichung
		$f(x) = 3 \cdot \cos(1{,}5x)$
		
Die Kosinusfunktion ist 0,5 Einheiten in y-Richung verschoben und um den Faktor 3 in x-Richtung gestaucht.		

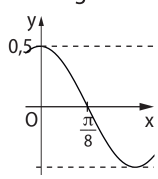
a) Vervollständige die Tabelle in deinem Heft für $f(x) = a \cdot \cos(bx)$.
b) Gib den Wertebereich, die Amplitude und die Periodenlänge der Funktionen an.

2 Bestimme alle Lösungen der Gleichung.
a) $\cos x = 0{,}5$ **b)** $\cos x = 0{,}423$ **c)** $\cos x = -0{,}914$

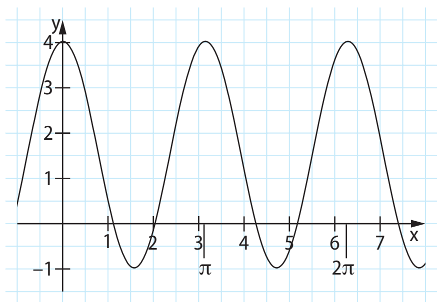
3 Entscheide, welche der folgenden Aussagen für die Kosinusfunktion zutreffend sind. Begründe deine Entscheidung.
a) $\cos x = \cos(-x)$ **b)** $\cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $\cos x = \cos(x - 2k\pi)$ **d)** $\cos(2x) = 2 \cdot \cos x$

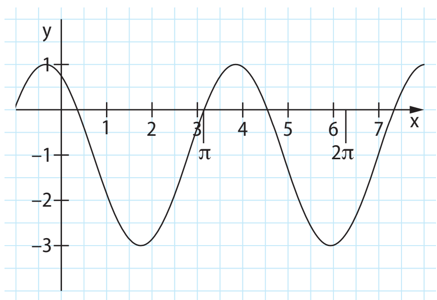
4 Die Abbildungen zeigen gleiche Kosinuskurven in unterschiedlich beschrifteten Koordinatensystemen. Gib jeweils eine Funktionsgleichung an.

a)


b)


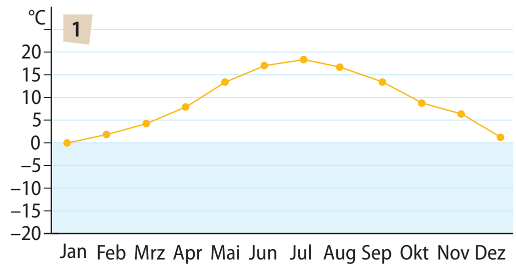
5 Gib mindestens zwei Gleichungen trigonometrischer Funktionen (Sinus-, Kosinusfunktion) zum gegebenen Graphen an. Begründe dein Vorgehen.

a)


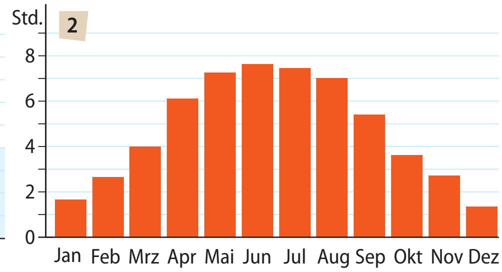
b)


oHiMi
1

1



• Monatsdurchschnittstemperatur in Berlin-Tegel (37 m)



■ Sonnenscheindauer pro Tag in Berlin-Tegel (37 m)

a) Begründe, dass die dargestellten Vorgänge periodische Vorgänge sind.

b) Finde jeweils eine Funktionsgleichung, mit der sich der Vorgang modellieren lässt.

Die Uhrzeiten berücksichtigen nicht die Sommerzeiten.

2

Datum	01.01.	15.01.	01.02.	15.02.	01.03.	15.03.	01.04.	15.04.
Aufgang	8:17	8:10	7:48	7:23	6:53	6:21	5:41	5:09
Untergang	16:03	16:22	16:52	17:19	17:45	18:10	18:40	19:05

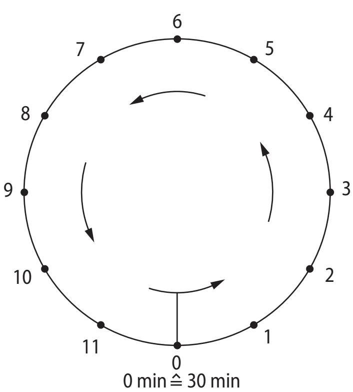
Datum	01.05.	15.05.	01.06.	15.06.	01.07.	15.07.	01.08.	15.08.
Aufgang	4:35	4:11	3:50	3:43	3:48	4:01	4:26	4:49
Untergang	19:33	19:56	20:19	20:31	20:32	20:22	19:59	19:32

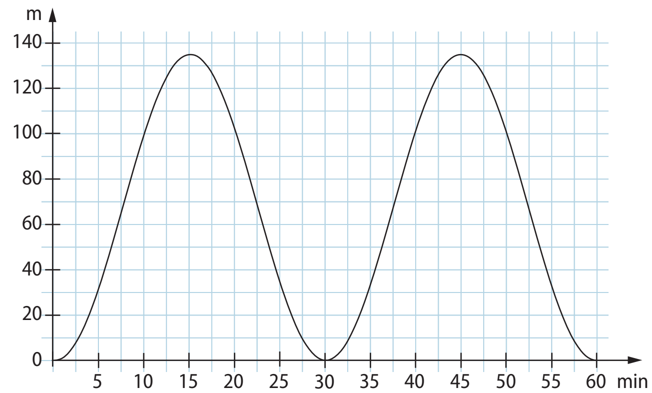
Datum	01.09.	15.09.	01.10.	15.10.	01.11.	15.11.	01.12.	15.12.
Aufgang	5:17	5:40	6:07	6:32	7:02	7:28	7:54	8:11
Untergang	18:55	18:22	17:44	17:12	16:37	16:13	15:56	15:52

a) Stelle die Sonnenaufgangszeiten (Sonnenuntergangszeiten, Tageslängen) grafisch dar. Beschreibe deren Verlauf.

b) Modelliere mit einem Computerprogramm eine Funktionsgleichung für die Sonnenaufgangszeiten (Sonnenuntergangszeiten, Tageslängen).

3 Das London Eye ist mit einer Höhe von 135 m das größte Riesenrad Europas. Für eine Umdrehung braucht es etwa 30 min. Die Abbildung zeigt den „Höhengraph“ einer Gondel während eines Durchlaufs.





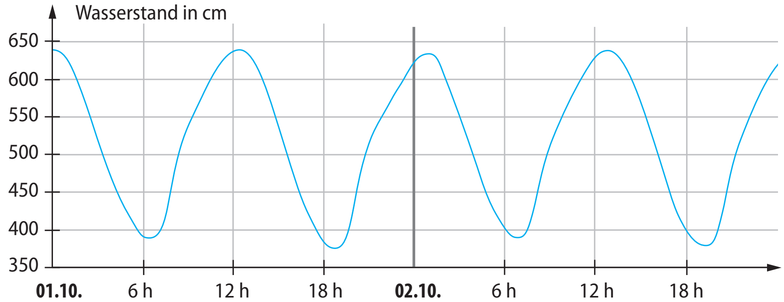
a) Übertrage den „Höhengraph“ in dein Heft und markiere die 12 Punkte am Graphen.

b) Begründe die Aussage: „Der Verlauf des Graphen gleicht einer Sinusfunktion.“

c) Gib die Funktionsgleichung einer passenden Sinusfunktion an. Erkläre dein Vorgehen.

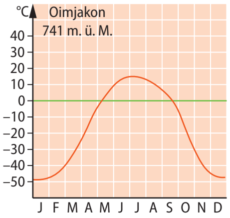
4 Bedingt durch die Erdrotation und die Anziehungskraft von Erde und Mond bzw. Sonne entstehen periodische Wasserbewegungen der Ozeane, die sich vor allem an den Küsten bemerkbar machen. Man spricht von Ebbe und Flut.
Ein Gezeitenkalender zeigt die jeweiligen Stände von Hoch- und Niedrigwasser, die man – für die Schifffahrt wichtig – auch schon einige Zeit im Voraus berechnen kann. Die Grafik zeigt den Wasserstand an der Fischerbalje in Borkum am 1. und 2. Oktober 2017.

Steigt der Meeresspiegel an, so spricht man von „Flut“, sinkt er ab, spricht man von „Ebbe“. Hat das Wasser den höchsten bzw. niedrigsten Stand erreicht, so spricht von „Hoch-“ bzw. von „Niedrigwasser“.



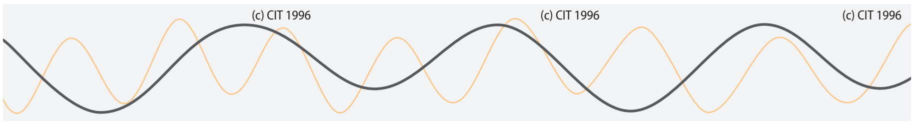
a) Bestimme die Periodenlänge des Graphen. Erkläre ihre Bedeutung.
b) Ermittle mit einem Computerprogramm eine Funktionsgleichung, die den Verlauf möglichst gut wiedergibt. Berechne mithilfe der Funktionsgleichung mindestens drei Werte und überprüfe am Graphen.

5 Im Klimadiagramm des Ortes Oimjakon ist nur die Temperaturkurve dargestellt.
a) Begründe, dass der Temperaturverlauf ein periodischer Vorgang ist.
b) Finde mindestens eine Funktionsgleichung, mit der sich der Vorgang modellieren lässt.



6 Der Gezeitenverlauf der Nordsee in der Nähe des Ärmelkanals kann näherungsweise durch $h(t) = 9 - \frac{7}{2} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{29} \cdot t\right)$ beschrieben werden. Dabei gibt h (t) die Höhe des Wasserstandes in Metern über Grund in Abhängigkeit der Zeit t an.
Die Zeit wird in Stunden nach dem letzten Niedrigwasser gemessen.
a) Lass dir die Funktion in einem geeigneten Bereich von einem Computerprogramm zeichnen.
b) Das letzte Niedrigwasser war um 6:00 Uhr. Bestimme die Zeitpunkte des nächsten Hoch- und Niedrigwassers.
c) Eine Kanalfähre hat ca. 7 m Tiefgang. Ermittle ausgehend von b) die Zeiträume, in denen sie den Kanal innerhalb der nächsten 24 Stunden besser nicht durchqueren sollte.

7 Auf der Rückseite bestimmter Fahrkarten der Deutschen Bahn findet sich als Sicherheitsmerkmal ein Wellenmuster.



a) Bestimme eine trigonometrische Funktion, deren Graph eine der beiden Wellen annähernd beschreibt. Verknüpfe dafür zwei trigonometrische Funktionen (durch Addition oder Multiplikation).
b) Überlege dir weitere Möglichkeiten, um das Muster ausgefallener zu gestalten. Gib die entsprechenden trigonometrischen Funktionen an.

1 Aufgaben zur Differenzierung

zu 1.1 **1** Berechne die Größe des Winkels im Bogenmaß bzw. im Gradmaß.

	a)	b)	c)	d)
α	36°	252°		
x			2,7	5,4

	a)	b)	c)	d)
α	–54°		504°	
x		$\frac{9}{4}\pi$		$-\frac{7}{8}\pi$

zu 1.2 **2** Bestimme zeichnerisch den Sinuswert und den Kosinuswert des Winkels bzw. den Winkel α mithilfe eines Einheitskreises.

a) $\alpha = 40°$ b) $\alpha = 115°$
c) $\alpha = 190°$ d) $\alpha = 325°$
e) $\sin\alpha = 0{,}85$ f) $\cos\alpha = 0{,}29$

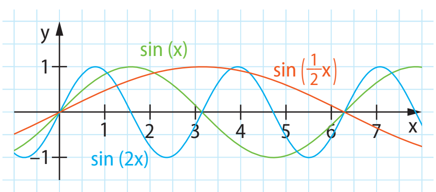
a) $\alpha = -40°$ b) $\alpha = 475°$
c) $\alpha = -524°$ d) $x = 2{,}1\pi$
e) $\sin\alpha = -0{,}79$ f) $\cos\alpha = -0{,}24$

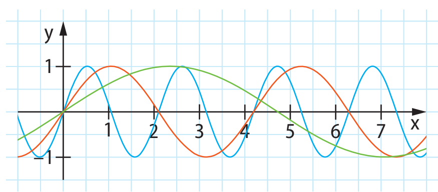
3 Berechne die Lösungen der Gleichung für die Winkel a bzw. x im angegebenen Intervall. Nutze dafür einen Taschenrechner.

a) $\sin\alpha = 0{,}342$ für $\alpha \in [0°; 180°]$
b) $\cos\alpha = 0{,}978$ für $\alpha \in [0°; 180°]$
c) $\cos\alpha = -0{,}669$ für $\alpha \in [180°; 360°]$
d) $\sin x = 0{,}94$ für $x \in [0; 2\pi]$
e) $\cos x = 0{,}63$ für $x \in [0; 2\pi]$
f) $\sin x = -0{,}5$ für $x \in [0; 2\pi]$

a) $\sin\alpha = 0{,}358$ für $\alpha \in [0°; 540°]$
b) $\sin\alpha = -0{,}147$ für $\alpha \in [-180°; 360°]$
c) $\cos\alpha = -0{,}354$ für $\alpha \in [-360°; 360°]$
d) $\sin x = -0{,}55$ für $x \in [-2\pi; 2\pi]$
e) $\cos x = -0{,}89$ für $x \in [0; 4\pi]$
f) $5 \cdot \sin x - 3 = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

zu 1.3 **4** Gib jeweils die Periodenlänge der Funktion im Bogenmaß an. Rechne anschließend die Periodenlänge ins Gradmaß um.





5 Zeichne den Graphen der Sinusfunktion im Intervall I. Gib die Eigenschaften der Sinusfunkion für dieses Intervall an.

$I = [-2\pi; 2\pi]$

$I = [-3\pi; 5\pi]$

zu 1.4 **6** Zeichne den Graphen der Funktion f mindestens eine Periodenlänge lang.
Gib den Wertebereich, die Amplitude und die Periodenlänge an.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin(4x)$
b) $f(x) = (-3) \cdot \sin(0{,}5x)$
c) $f(x) = \sin(x-1) + 2$
d) $f(x) = (-2) \cdot \cos(1{,}5x)$

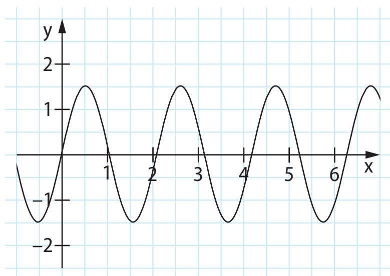
a) $f(x) = 2 \cdot \sin[4 \cdot (x+3)] - 1$
b) $f(x) = (-3) \cdot \sin[0{,}5 \cdot (x-1)] + 2$
c) $f(x) = 2{,}5 \cdot \sin(3x+6) + 1{,}5$
d) $f(x) = (-2) \cdot \cos(1{,}5x - 6) - 2{,}4$

5 Gib eine Funktionsgleichung zum Graphen an.

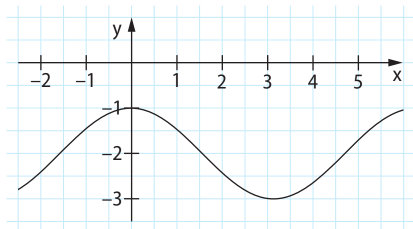
zu 1.4 und 1.5

Finde genau eine Lösung.

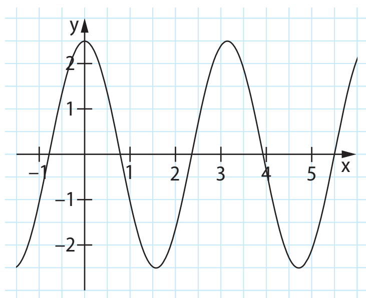
a)



b)

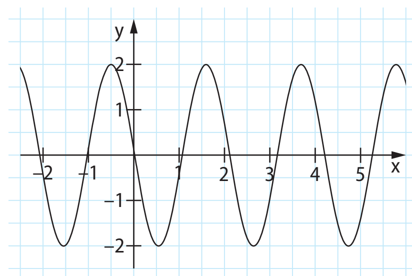


c)

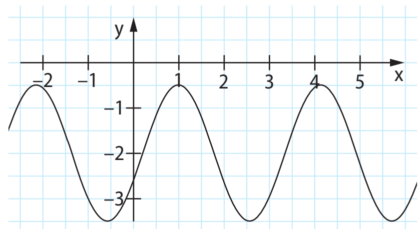


Finde mehrere Lösungen.

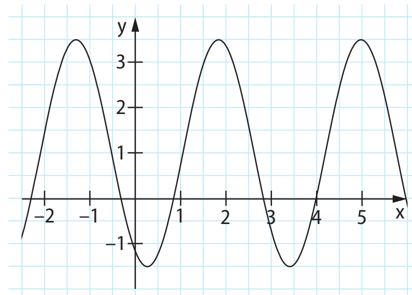
a)



b)



c)



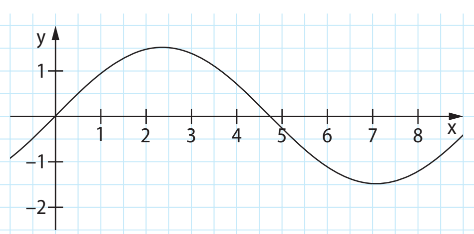
6 Ein Riesenrad hat einen Durchmesser von 18 m und 16 Gondeln. Die Höhe einer Gondel lässt sich durch eine Sinusfunktion beschreiben.

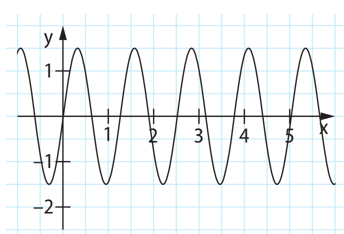
zu 1.6

Gib eine passende Funktionsgleichung an, wenn man den Mittelpunkt des Rades als Koordinatenursprung wählt.

Gib eine passende Funktionsgleichung an, wenn die Einstiegsplattform 3 m über dem Boden liegt.

7 Das folgende Diagramm stellt eine Wasserwelle grafisch dar. Beschreibe die mögliche Bedeutung der x- und der y-Achse und ermittle aus dem Diagramm eine Funktionsgleichung.

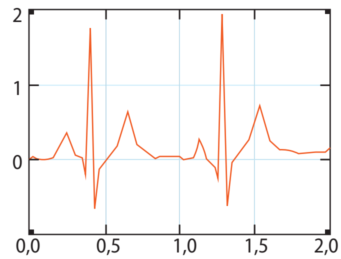




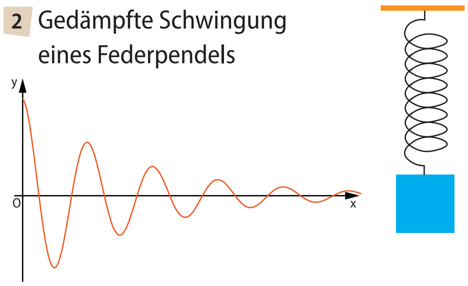
1 Vermischte Aufgaben

1 **a)** Entscheide begründet, ob folgende Vorgänge periodisch sind.
Beschreibe bei den periodischen Vorgängen die Periodenlänge.
b) Nenne weitere Beispiele für periodische Vorgänge.

1 EKG

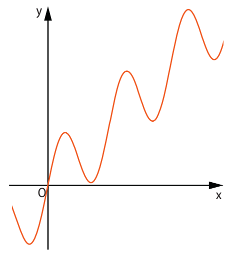


2 Gedämpfte Schwingung eines Federpendels



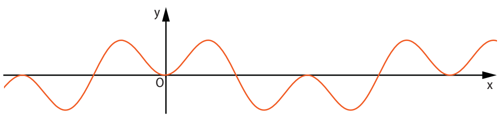
3 Mondphasen

4

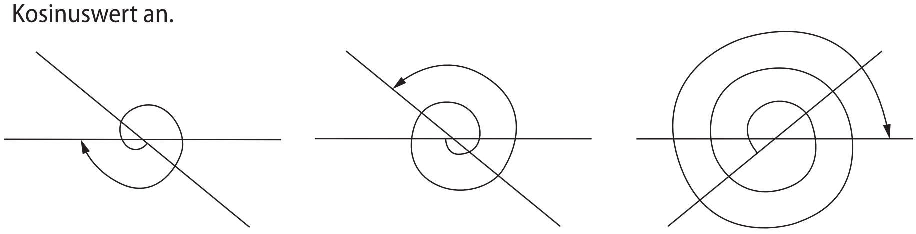


5 Pendeluhr

6



2 Die Geraden schneiden sich unter einem Winkel von 38°.
Bestimme das Maß des eingezeichneten Drehwinkels und gib den zugehörigen Sinus- und Kosinuswert an.

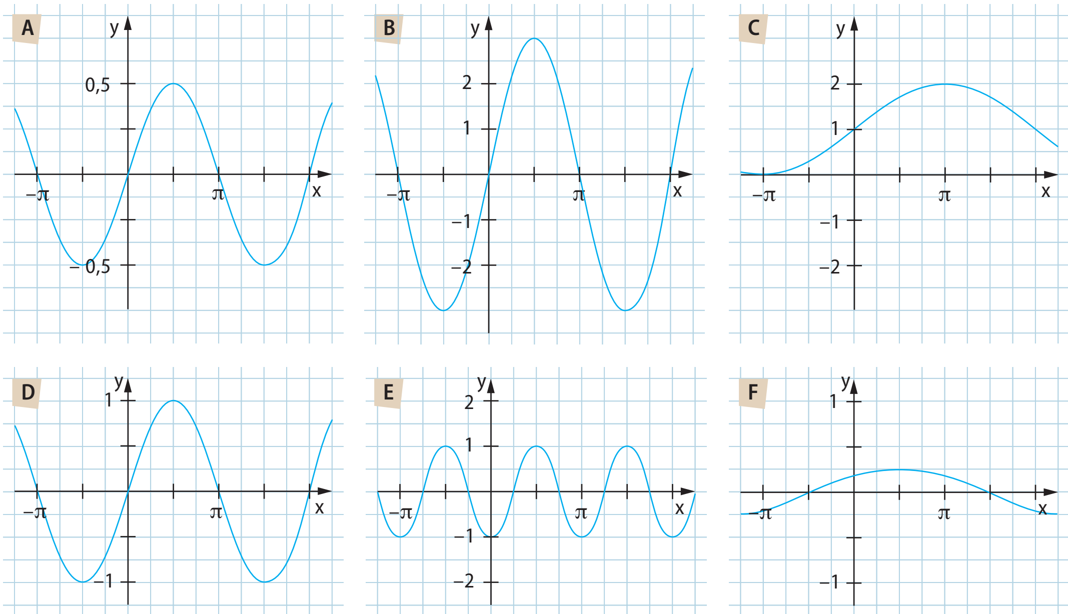


3 Bestimme zu jedem Funktionsterm die Amplitude, die Periodenlänge und die Wertemenge.

a) $f(x) = 3 \cdot \sin(4x) - 1{,}5$ **b)** $f(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 0{,}5$ **c)** $f(x) = \sin\left[2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

d) $f(x) = 2 \cdot \sin(1{,}5x + 6)$ **e)** $f(x) = (-0{,}5) \cdot \sin(3x - \pi) + 2$ **f)** $f(x) = (-4) \cdot \cos(0{,}5x)$

4 Ordne jedem Funktionsgraphen eine passende Funktionsgleichung zu. Begründe.



1 $y = 3 \cdot \sin x$ **2** $\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$ **3** $y = -\sin(-x)$ **4** $y = 0{,}5 \cdot \sin x$

5 $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **6** $y = \cos(2x + \pi)$ **7** $y = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

5 **a)** Beschreibe, wie man schrittweise aus dem Graphen der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ den Graphen von $g(x) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ erhält ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$).

b) Zeichne den Graphen von $g(x)$ im Bereich $0 \le x \le 4\pi$.

6 Überprüfe, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe die Antwort.

a) Die Funktion $f(x) = \sin[2 \cdot (x + 1)]$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ist periodisch mit der Periode π.

b) $(\sin 2)^2 + (\cos 2)^2 < (\sin 3)^2 + (\cos 3)^2$

c) $2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} < \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$

d) Der Punkt $P\left(\frac{5\pi}{4} \,\middle|\, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ liegt sowohl auf dem Graphen der Funktion $f(x) = \sin x$ als auch auf dem Graphen der Funktion $g(x) = \cos x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} = \mathbb{D}_g$.

e) Für jeden Wert von $x \in [0; \pi]$ gilt $\cos x = \sqrt{1 - (\sin x)^2}$

f) Die Lösungsmenge der Gleichung $(\sin x - 1) \cdot (\cos x + 1) = 0$ über der Grundmenge $[-\pi; 2\pi]$ ist $\mathbb{L} = \left\{-\pi; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$.

g) Der Graph der Funktion $f(x) = x \cdot \sin x$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

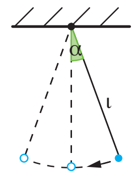
h) Der kleinere der beiden Winkel, den die Zeiger einer Uhr um 15 Uhr 40 miteinander bilden, hat die Größe 130°.

i) $\frac{\sin 45°}{\sqrt{2}} = \cos 300°$

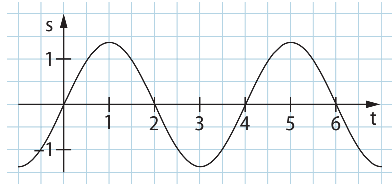
j) $\cos 2 > \cos 4 > \cos 3$

k) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$

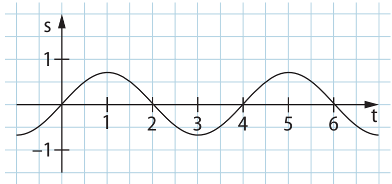
7 An einem Faden der Länge ι hängt eine Metallkugel. Der Faden hängt so an einem Stativ, dass die am Faden befestigte Kugel frei hin- und herschwingen kann. Die Kugel wird um den Winkel α ausgelenkt und dann losgelassen. Bestimme jeweils aus dem Graphen die Schwingungsdauer und die Amplitude der Schwingung. Was stellst du fest?



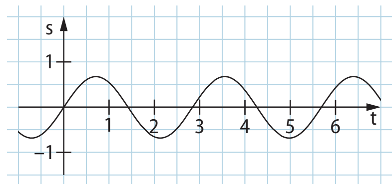
a) $\iota = 4$ m, $\alpha = 20°$



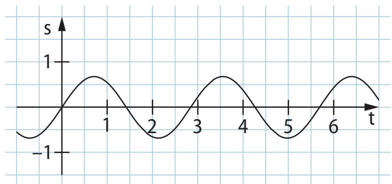
b) $\iota = 4$ m, $\alpha = 10°$



c) $\iota = 2$ m, $\alpha = 20°$

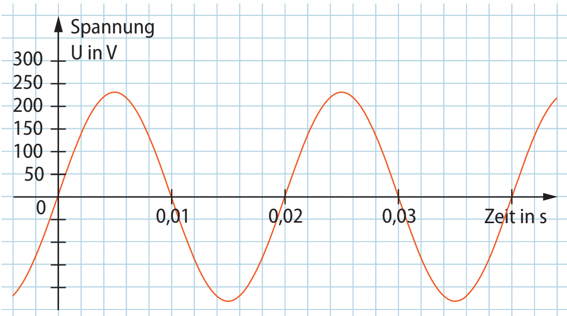


d) $\iota = 2$ m, $\alpha = 10°$



8 Die Spannung in einem Wechselstromkreis kann vereinfacht mit der Gleichung
$U(t) = U_{max} \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$
beschrieben werden. Die Grafik zeigt die idealisierte Spannungskurve für die bei uns übliche Netzspannung mit einer Frequenz f von 50 Hz.
Gib eine Gleichung für den Funktionsgraphen an.

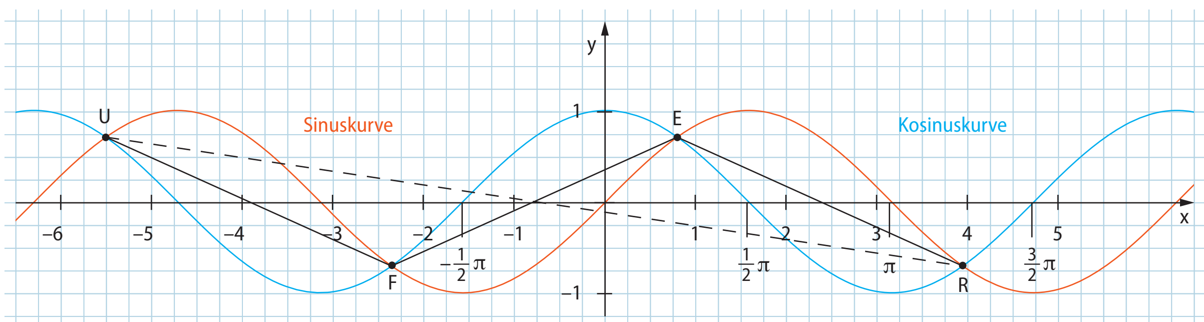
Eine Frequenz von 50 Hz (Hertz) bedeutet, dass es 50 Schwingungen pro Sekunde gibt.



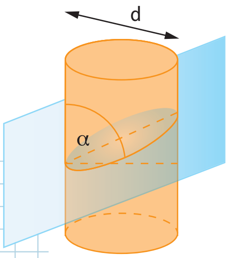
9 Die Sinuskurve schneidet die Kosinuskurve im Bereich $x \in [-2\pi; 2\pi]$ in genau vier Punkten:

a) Ermitte die Koordinaten dieser vier Schnittpunkte U, F, E und R sowie die Länge l des Streckenzugs UFER.

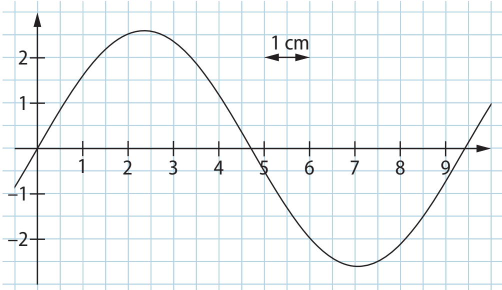
b) Um wie viel Prozent ist der Streckenzug UFER länger als die Strecke $\overline{UR}$?



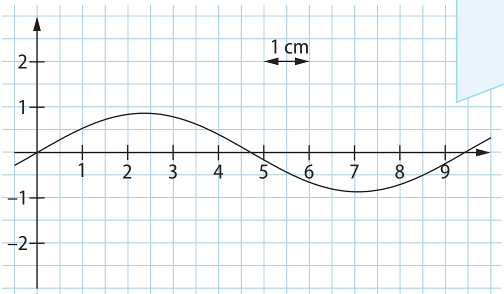
10 Ein zylindrischer, mit A4-Papier gerade umwickelter Besenstiel aus Holz mit dem Durchmesser d wird eben im Winkel α durchgeschnitten. Das Papier wird abgewickelt (siehe Abb.). Je nach Schnittwinkel lässt sich der obere Rand der Mantelfläche darstellen:



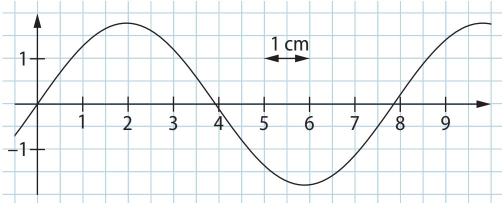
1 $d = 3$ cm, $\alpha = 30°$



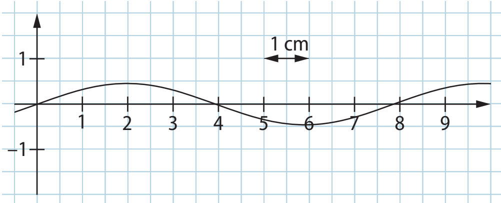
2 $d = 3$ cm, $\alpha = 60°$



3 $d = 2{,}5$ cm, $\alpha = 35°$



4 $d = 2{,}5$ cm, $\alpha = 70°$



a) Bestimme jeweils eine Funktionsgleichung, mit der der obere Rand der abgewickelten Mantelfläche beschrieben werden kann.

b) Beschreibe den Einfluss des Durchmessers und des Schnittwinkels auf die Parameter der allgemeinen Sinusfunktion.

11 Die Tabelle zeigt den Wasserstand bezogen auf Seekartennull am Ort Bremerhaven.

Datum			Zeit	Wasserstand (m)
Fr	02.02.2018	HW	02:09	4,8
Fr	02.02.2018	NW	08:46	0,4
Fr	02.02.2018	HW	14:49	4,6
Fr	02.02.2018	NW	21:06	0,5
Sa	03.02.2018	HW	02:55	4,9
Sa	03.02.2018	NW	09:36	0,4
Sa	03.02.2018	HW	15:38	4,6
Sa	03.02.2018	NW	21:52	0,4
So	04.02.2018	HW	03:42	4,9
So	04.02.2018	NW	10:22	0,4
So	04.02.2018	HW	16:24	4,6
So	04.02.2018	NW	22:32	0,4

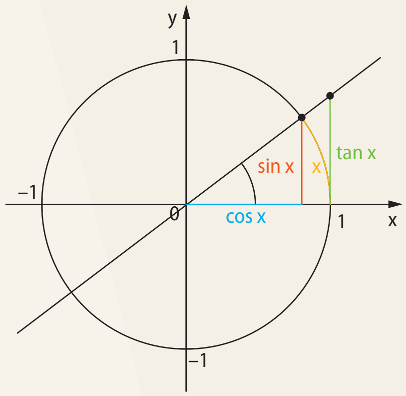
a) Stelle den Wasserstand grafisch dar. Beschreibe den Verlauf.

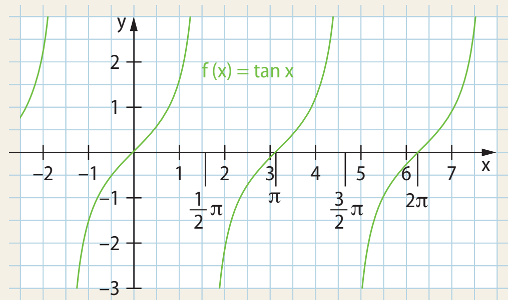
b) Ermittle eine Funktionsgleichung, die den Verlauf näherungsweise wiedergibt.

HW: Hochwasser,
NW: Niedrigwasser

Die Tangensfunktion

Die Funktion f (x) = tan x, die jedem Winkelmaß x im Einheitskreis genau einen Tangenswert zuordnet, heißt **Tangensfunktion**, ihr Graph **Tangenskurve**. Es gilt die Beziehung: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.





	Bogenmaß	Gradmaß
Definitionsbereich $\mathbb{D}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$	alle Winkel ohne die ungeraden ganzzahligen Vielfachen von 90°
Wertebereich $\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	
Periodenlänge	π	180°
Symmetrie	punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung	
	tan (–x) = –tan x	tan (–α) = –tan α
Nullstellen	$k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ganzzahlige Vielfache von π	$k \cdot 180°$ ($k \in \mathbb{Z}$) (ganzzahlige Vielfache von 180°)

a) Berechne unter Verwendung der Werte in der Tabelle die Werte für $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Zeichne den Graphen der Tangensfunktion. Kennzeichne die Eigenschaften (Definitionslücken, Periodenlänge und Nullstellen) farbig.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	360°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1	0
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	–1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	1
tan x												

b) Bestimme alle Winkelmaße x, die Lösungen der folgenden Gleichungen sind.
  a) tan x = 0,45 **b)** tan x = 3,68 **c)** tan x = –5,65

c) Untersuche mit einem Computerprogramm den Einfluss der Parameter a, b, c und d in $f(x) = a \cdot \tan[b \cdot (x + c) + d]$ auf die Tangensfunktion (auch im Vergleich zur Sinusfunktion).

Goniometrische Gleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable im Argument einer trigonometrischen Funktion oder mehrerer trigonometrischer Funktionen vorkommt, nennt man **goniometrische Gleichungen**.

Beispiele:

1

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sin^2 x - 3 \cdot \sin x + 1 &= 0 \qquad x \in [0; \pi] \\
\text{Substitution: } z &= \sin x \\
2z^2 - 3z + 1 &= 0 \qquad |:2 \\
z^2 - \tfrac{3}{2}z + \tfrac{1}{2} &= 0 \\
z_{1,2} &= \tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16} - \tfrac{1}{2}} \\
&= \tfrac{3}{4} \pm \tfrac{1}{4} \\
z_1 &= 1 \\
&\Rightarrow x_1 = \pi \\
z_2 &= \tfrac{1}{2} \\
&\Rightarrow x_2 = \tfrac{\pi}{6} \\
& x_3 = \pi - \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{5}{6}\pi
\end{aligned}
$$

2

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sin x &= 2 - \cos x \qquad x \in [0; 2\pi] \\
2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} &= 2 - \cos x \qquad |\text{ quadrieren} \\
4 \cdot (1 - \cos^2 x) &= 4 - 4 \cdot \cos x + \cos^2 x \\
0 &= (-4) \cdot \cos x + 5 \cdot \cos^2 x \\
0 &= (\cos x) \cdot (-4 + 5 \cdot \cos x) \\
\text{1. Fall: } \cos x &= 0 \\
&\Rightarrow x_1 = \tfrac{\pi}{2} \\
\text{2. Fall: } -4 + 5 \cdot \cos x &= 0 \\
\cos x &= \tfrac{4}{5} \\
&\Rightarrow x_2 = 0{,}64 \\
& x_3 = 2\pi - 0{,}64 = 5{,}64
\end{aligned}
$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) &= 2 - \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\
2 &= 2 \qquad (w) \\
2 \cdot \sin 0{,}64 &= 2 - \cos 0{,}64 \\
1{,}2 &= 1{,}2 \qquad (w) \\
2 \cdot \sin 5{,}64 &= 2 - \cos 5{,}64 \\
-1{,}2 &= 1{,}2 \qquad (f)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{L} = \left\{0{,}64; \tfrac{\pi}{2}\right\}$

a) Löse die Gleichungen für $x \in [0; 2\pi]$

- **A** $\sin^2 x + 0{,}2 \cdot \sin x = 0$
- **B** $2 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$
- **C** $\tan x \cdot \sin x + 0{,}3 \cdot \tan x = 0$
- **D** $\tan x - \cos x \cdot \tan x = 0$
- **E** $2 \cdot \tan^2 x + 3 \cdot \tan x = 2$
- **F** $\sin^2 x - 1{,}5 \cdot \sin x = 1$
- **G** $\sin x = \cos x$
- **H** $\sin x - 0{,}5 \cdot \tan x = 0$
- **I** $\cos x = \tan x$
- **J** $2 \cdot \tan x \cdot \sin x = 3$
- **K** $4 \cdot \sin^2 x + 7 \cdot \cos x = 7$
- **L** $6 \cdot \sin^2 x = (-6) \cdot \cos^2 x + 3{,}5 \cdot \tan x \cdot \sin x \cdot \cos x$

b) Gegeben sind die Funktionen $f_1(x) = 2 \cdot \sin x$ und $f_2(x) = \cos x$ mit $x \in [0; 2\pi]$. Zeichne die Graphen der beiden Funktionen in ein Koordinatensystem. Bestimme grafisch die Koordinaten der Schnittpunkte beider Graphen. Überprüfe rechnerisch.

c) Gegeben ist die Gleichung $\sin x + \cos x = a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Begründe, für welche Werte von a man mindestens eine Lösung erhält.

1 Das kann ich!

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley. Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Das kann ich **wirklich gut!**	Das kann ich **fast!**	Das muss ich **noch üben!**

1

55°   −275°   −155°   −25°

415°   95°   −235°   125°

335°   205°   85°   −265°

a) Gib zu jedem Winkel das zugehörige Bogenmaß an.

b) Finde alle zusammengehörigen Winkel, die den gleichen Sinuswert haben.

2 Löse folgende Aufgaben mithilfe eines Einheitskreises. Überprüfe die Lösungen mit dem Taschenrechner.

a) $y = \sin 200°$ **b)** $y = \sin\left(\frac{2}{9}\pi\right)$

c) $y = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ **d)** $\sin x = 0{,}8$

e) $\sin x = -0{,}6$ **f)** $\cos x = 0{,}7$

3 Berechne alle Lösungen der Gleichung zwischen 0 und 2π. Runde auf zwei Dezimalstellen.

a) $\sin x = 0{,}892$ **b)** $\sin x = 0{,}423$

c) $\sin x = -0{,}087$ **d)** $\sin x = -0{,}914$

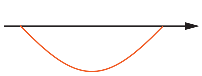
e) $\cos x = 0{,}672$ **f)** $\cos x = -0{,}996$

4 Es gilt: $\sin(-x) = -\sin x$.
Begründe diesen Zusammenhang am Einheitskreis.

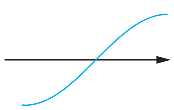
5 Zeichne den Graphen von $f(x) = \sin x$ im Intervall $-2\pi \le x \le 4\pi$. Gib die Nullstellen der Funktion im angegebenen Intervall an.

6 Gib mindestens drei Bereiche an, in denen der Graph der Sinusfunktion (der Kosinusfunktion) jeweils wie der abgebildete Graphenausschnitt verläuft.

1

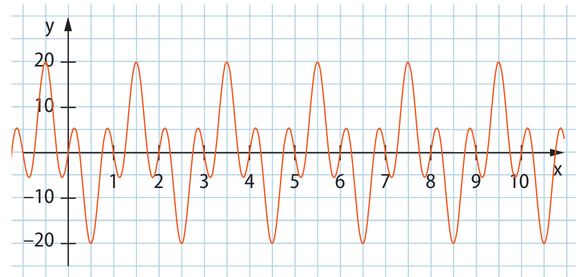


2

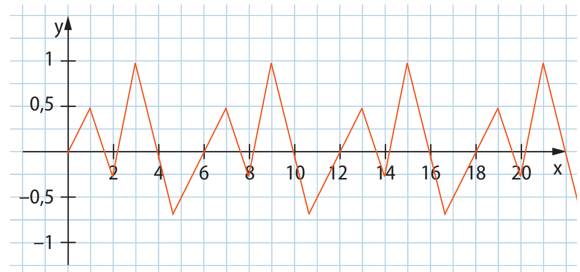


7 Ermittle die Periodenlänge der Funktion.

a)



b)



8 Vervollständige jeweils den Satz.
Bei einer Sinusfunktion mit der Gleichung …

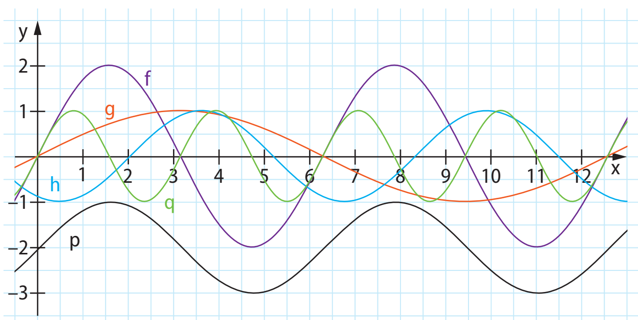
a) $f(x) = a \cdot \sin x$ beschreibt der Faktor a …

b) $f(x) = \sin(b \cdot x)$ beschreibt der Faktor b …

c) $f(x) = \sin(x + c)$ beschreibt der Wert c …

d) $f(x) = \sin x + d$ beschreibt der Wert d …

9 Bestimme zu den abgebildeten Graphen jeweils eine zugehörige Funktionsgleichung. Gib auch jeweils den Wertebereich und die Periodenlänge an.

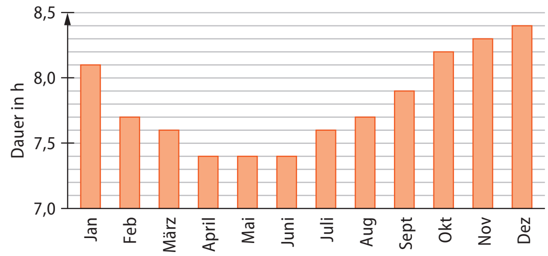


10 Beschreibe, wie der Graph der Funktion $f(x) = 2{,}5 \cdot \sin[0{,}5 \cdot (x - 2)] + 1$ aus dem Graphen der Sinusfunktion $g(x) = \sin x$ hervorgeht, und zeichne den Graphen von f.

11 Beschreibe, wie der Graph der Funktion $f(x) = (-2) \cdot \cos(4x)$ aus dem Graphen der Kosinusfunktion $g(x) = \cos x$ hervorgeht, und zeichne den Graphen von f.

12 Das Riesenrad „Singapore Flyer“ hat eine Höhe von 165 m, einen Durchmesser von 150 m und benötigt für eine volle Umdrehung 30 min. Ermittle eine Funktionsgleichung, die diesen Sachverhalt beschreibt.

13 Das Säulendiagramm veranschaulicht die durchschnittliche tägliche Sonnenscheindauer auf der Insel Mauritius im Indischen Ozean.



a) Beschreibe das Diagramm.

b) Pia hat die Sonnenscheindauer durch den Term $f(t) = 0{,}5\,\text{h} \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{365\,\text{d}} \cdot (t - 258\,\text{d})\right] + 7{,}9\,\text{h}$ beschrieben. Die Variable t steht dabei für die Anzahl der seit Jahresbeginn vergangenen Tage. Beurteile die Güte des Terms.

Aufgaben für Lernpartner

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründe schriftlich.

A Mit dem Bogenmaß kann man die Größe eines Winkels am Einheitskreis eindeutig angeben.

B Die Sinuswerte wiederholen sich am Einheitskreis jeweils nach π Einheiten.

C Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion.

D Die Kosinusfunktion erhält man, indem man die Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ entlang der x-Achse in eine beliebige Richtung verschiebt.

E Der Graph der Kosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

F Die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin x$ hat gegenüber der Funktion $g(x) = \sin x$ die doppelte Periodenlänge.

G Die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin x + 0{,}5$ hat den Wertebereich $\mathbb{W} = [-0{,}5; 2{,}5]$.

H Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion haben dieselbe Periodenlänge.

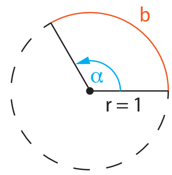
Ich kann …	Aufgaben	Hilfe
Winkel im Bogenmaß angeben.	1, A	S. 18
Sinus- und Kosinuswerte am Einheitskreis und mit dem Taschenrechner bestimmen.	2, 3, B	S. 20, 21
Eigenschaften der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion beschreiben und erkennen.	4, 5, 6, 7, C, D, E, H	S. 24, 30
Die Sinus- und Kosinusfunktion in ihrer allgemeinen Form nutzen und aus der einfachen Sinus- bzw. Kosinusfunktion herleiten.	8, 9, 10, 11, F, G	S. 26, 30
Vorgänge mit Sinus- und Kosinusfunktionen beschreiben.	12, 13	S. 32, 33

1 Auf einen Blick

Seite 18

Winkel im Bogenmaß

An einem Einheitskreis (r = 1 LE) kann man jedem Mittelpunktswinkel α eindeutig die Länge des zugehörigen Kreisbogens b zuordnen.
Die Länge dieses Kreisbogens b am Einheitskreis kann man auch als Maß für den zugehörigen Mittelpunktswinkel verwenden. Man bezeichnet dieses Winkelmaß als **Bogenmaß** mit der Einheit „rad".

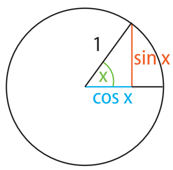


α	90°	180°	270°	360°
b = x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

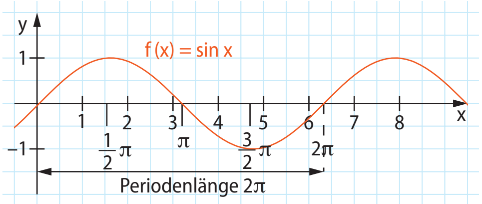
Seite 24, 30

Sinus- und Kosinusfunktion

Im Einheitskreis lässt sich jedem Winkelmaß x eindeutig ein Sinuswert bzw. ein Kosinuswert zuordnen. Die Funktion f (x) = sin x heißt **Sinusfunktion**.

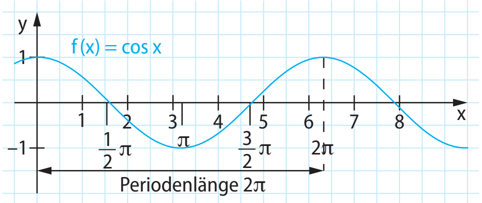


Nullstellen: $k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Symmetrie: $\sin(-x) = -\sin x$



Die Funktion f (x) = cos x heißt **Kosinusfunktion**.

Der Graph der Kosinusfunktion ist gegenüber dem der Sinusfunktion verschoben.
Es gilt: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



Nullstellen: $(2k + 1) \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Symmetrie: $\cos(-x) = \cos x$

Da sich die Funktionswerte in gleichen Abständen stets wiederholen, spricht man von **periodischen Funktionen**.

Seite 26, 30

Einfluss der Parameter

Die allgemeine Sinusfunktion lässt sich in der Form $f(x) = a \cdot \sin[b \cdot (x + c)] + d$ mit $x, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schreiben.

- Der Parameter a verändert den Wertebereich $(y \in [-|a|; |a|])$.
- Der Parameter b verändert die Periodenlänge $\left(\frac{2\pi}{|b|}\right)$.
- Der Parameter c verschiebt den Graphen der Funktion sin x entlang der x-Achse.
- Der Parameter d verschiebt den Graphen der Funktion sin x entlang der y-Achse.

Bei der Kosinusfunktion verhält sich der Einfluss der Parameter wie bei der Sinusfunktion.