

4

Potenzen und Potenzfunktionen

EINSTIEG

Daten werden mittlerweile meist digital gespeichert, zum Beispiel auf externen Festplatten. Diese haben heute eine Speicherkapazität von mehreren Terabyte, Arbeitsspeicher haben mehrere Gigabyte. Clouds arbeiten mit mehreren Peta- oder Exabytes.

- Recherchiere, was die Vorsätze Mega, Giga, Tera, Peta, Exa und Zetta bedeuten.
- Fertige eine Tabelle über gebräuchliche Vorsätze an. Arbeite auch mit Vorsätzen, die einen Bruchterm (zum Beispiel Dezi $\cong \frac{1}{10}$) zum Ausdruck bringen. Notiere jeweils die entsprechende Zehnerpotenz.
- In der „Steinzeit der Informatik“ war der Umrechnungsfaktor zwischen beispielsweise Kilobyte und Megabyte noch anders als heute allgemein üblich. Recherchiere und berechne, wie viel Speicherkapazität die Fortpflanzung dieses Unterschieds – ausgehend vom Byte – heute beim Terabyte (Zettabyte) ausmacht.



AUSBLICK

Am Ende dieses Kapitels hast du gelernt, ...

- mit Potenzen, die rationale Exponenten haben, umzugehen.
- die Potenz- und Wurzelschreibweise ineinander umzuwandeln.
- die Potenzgesetze ohne Hilfsmittel anzuwenden.
- Potenz- und Wurzelfunktionen grafisch darzustellen und den Verlauf der Graphen zu beschreiben.
- die Funktionsgleichung von Potenzfunktionen grafisch und rechnerisch zu ermitteln.
- einfache Potenzgleichungen zu lösen.

Lena und Peter unterhalten sich über ihren Taschenrechner.



- Berechne zunächst 2^3 , 3^4 , 10^5 und 4^2 .
- Berechne anschließend $(-2)^3$, $(-3)^4$, $(-10)^5$ und $(-4)^2$. Was fällt dir auf?
- Untersuche, was passiert, wenn du in den obigen Beispielen die Exponenten mit negativen Vorzeichen eintippst. Wähle weitere Potenzen mit positiven und negativen Exponenten und vergleiche die Ergebnisse.

MERKWISSEN

Du weißt bereits, dass man Produkte aus lauter gleichen Faktoren auch als **Potenz** schreiben kann.

Diese Schreibweise gilt auch für **reelle Zahlen** a als **Basis**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

Es gilt weiterhin: $a^1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Um Potenzen für ganzzahlige Exponenten zu erhalten, definiert man $a^0 = 1$ und $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Teilt man also a^n schrittweise durch a , erhält man a^{n-1} , a^{n-2} , ..., a^2 , a^1 , a^0 , a^{-1} , a^{-2} , ...

Exponent

25

Basis

BEISPIELE

I Schreibe die Potenzen ohne negative Exponenten.

- a) 2^{-5} b) $1,3^{-1}$ c) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-6}$ d) p^{-2} e) a^{-200}

Lösung:

- a) $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ b) $\frac{1}{1,3} = \frac{10}{13}$ c) $\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^6} = 1\,000\,000$ d) $\frac{1}{p^2}$ e) $\frac{1}{a^{200}}$

II Wandle die Bruchterme in Potenzen mit negativem Exponenten um.

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{1,44}$ c) $\frac{1}{-27}$
 d) $\frac{1}{t^7}$ e) $\frac{1}{-s^5}$

Lösung:

- a) $4^{-1} = 2^{-2}$ b) $1,44^{-1} = 1,2^{-2}$ c) $(-27)^{-1} = (-3)^{-3}$
 d) t^{-7} e) $(-s)^{-5}$

VERSTÄNDNIS

- Vergleiche 2^{-3} mit 3^{-2} , 2^{-5} mit 5^{-2} und 2^{-4} mit 4^{-2} .
- Vergleiche weitere natürliche Zahlen n von der Form 2^{-n} mit n^{-2} .
- Formuliere ein Kriterium, wann 2^{-n} größer, kleiner oder gleich a^{-n} ist.

1 Ergänze die fehlende Basis bzw. den fehlenden Exponent.

a) $\frac{1}{32} = 2^{\square}$ b) $-216 = \square^3$ c) $256 = (-4)^{\square}$ d) $\frac{1}{25} = \square^{-2}$

2 Ordne die Zahlen der Reihe nach, fange mit der kleinsten an.

a) $(-1)^2$; 2^{-1} ; 1^{-2} ; $(-2)^{(-2)}$; $(\frac{1}{2})^{-1}$ b) $(-3)^2$; 2^{-3} ; $(-2)^3$; $(-3)^{-2}$; $(\frac{1}{3})^{-2}$

3 Was gehört zusammen? Ordne zu.

$-\frac{1}{125}$ $(-5)^{-3}$ $\frac{1}{243}$ -125 $(-3)^5$
 5^{-3} -243 $(-5)^3$ $\frac{1}{125}$ 3^{-5}

4 Experimentiere mit einer Tabellenkalkulation: Wähle eine positive Zahl, die ...

- 1 mehrstellig ist, und quadriere sie.
- 2 zwischen 0 und 1 liegt, und quadriere sie.

Quadriere anschließend das Ergebnis mehrmals.

zu 1

| | A | B | C |
|---|---|-----------------------|---------------------------|
| 1 | x | x ² (Zahl) | x ² (Standard) |
| 2 | | 859 | 737881 |
| 3 | | 737881 | 5,44468E+11 |
| 4 | | 5,4447E+11 | 2,96446E+23 |

zu 2

| | A | B | C |
|---|---|-----------------------|---------------------------|
| 1 | x | x ² (Zahl) | x ² (Standard) |
| 2 | | 0,0541 | 0,0029268100000000 |
| 3 | | 0,00292681 | 0,0000085662167761 |
| 4 | | 0,00000857 | 0,000000000733801 |

- a) Beschreibe jeweils die Änderung der Anzeige. Was fällt dir auf?
- b) Begründe, dass diese neue Darstellung in bestimmten Situationen günstig ist.

5 Sehr große und sehr kleine Zahlen stellt man oft als Produkt einer Dezimalzahl mit einer Vorkommastelle und einer **Zehnerpotenz** dar. Diese Darstellung nennt man auch **wissenschaftliche Schreibweise** oder **Exponentialschreibweise**.

Beispiele: $1\,700\,000 = 1,7 \cdot 10^6$ $0,0000017 = 1,7 \cdot 10^{-6}$

Ergänze die folgende Tabelle. Recherchiere fehlende Einträge.

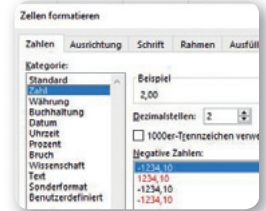
| physikalische Größe | herkömmliche Schreibweise | wissenschaftliche Schreibweise |
|------------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| Lichtgeschwindigkeit | ■ | ■ |
| ■ | 40 000 km | ■ |
| ■ | ■ | $1,49 \cdot 10^8$ km |
| ■ | ■ | $1 \cdot 10^{-10}$ m |
| Wellenlänge des roten Lichts | ■ | ■ |
| Korngröße des Tons | ■ | ■ |

AUFGABEN



Potenzen mit negativer Basis sind positiv, wenn der Exponent gerade ist. Sie sind negativ, wenn der Exponent ungerade ist.

Wechsle in den Einstellungen zwischen „Zahl“ und „Standard“. Beachte, dass in der Tabellenkalkulation das Zeichen „^“ der Befehl für Potenzieren ist.



Beispiele:


Mittlere Entfernung Erde-Sonne

Erdumfang

Mittlerer Radius eines Atoms



Lena und Peter wollen mit ihrem Taschenrechner herausfinden, was passiert, wenn sie nach dem „x^y“-Zeichen Bruchzahlen eingeben. Sie berechnen $4^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $9^{\frac{1}{4}}$, $32^{\frac{1}{5}}$ und $64^{\frac{1}{6}}$.

- Führe diese Berechnungen durch. Formuliere eine Vermutung über die Bedeutung des Exponenten der Form $\frac{1}{n}$.
- Eine weitere Taste kennen die beiden noch nicht: . Sie geben $\sqrt[2]{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[2]{9}$, $\sqrt[5]{32}$ und $\sqrt[6]{64}$ ein. Führe diese Berechnungen ebenfalls durch. Vergleiche deine Ergebnisse mit deinen vorherigen Lösungen.
- Vergleiche nun $\sqrt[2]{8}$ mit $2^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{25}$ mit $5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[5]{27}$ mit $3^{\frac{3}{5}}$. Formuliere eine Vermutung über die Bedeutung von $\sqrt[n]{a^m}$.

MERKWISSEN

Die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt[n]{a}$, die **n-te Wurzel** aus a . Mit anderen Worten:

$\sqrt[n]{a}$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.

Das Potenzieren (einer nichtnegativen Zahl) mit n und das Ziehen der n-ten Wurzel heben sich auf. Somit ist folgende Festlegung sinnvoll: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Steht die m-te Potenz ($m \in \mathbb{Z}$) von $a \in \mathbb{R}_0^+$ unter der n-ten Wurzel ($n \in \mathbb{N}$), so gilt: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

BEISPIELE

I Wandle die Wurzelterme in Potenzen um.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt[5]{81}$ d) $\sqrt[4]{a^3}$ e) $\sqrt[7]{b^2}$

Lösung:

a) $2^{\frac{1}{2}}$ b) $16^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$ c) $81^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{4}{5}}$ d) $a^{\frac{3}{4}}$ e) $b^{\frac{2}{7}}$

II Wandle die Potenzen in Wurzelterme um.

a) $3^{\frac{1}{5}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ c) $2^{\frac{17}{5}}$ d) $a^{\frac{1}{4}}$ e) $b^{\frac{7}{2}}$

Lösung:

a) $\sqrt[5]{3}$ b) $\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$ c) $\sqrt[5]{2^{17}}$ d) $\sqrt[4]{a}$ e) $\sqrt{b^7}$

III Was gehört zusammen? Ordne zu.

| | | | | | |
|---------------------------|-----------------------------|---------------------------|--------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 $3^{\frac{1}{3}}$ | 2 $2^{-\frac{3}{2}}$ | 3 $a^{-\frac{5}{4}}$ | 4 $a^{-\frac{4}{5}}$ | 5 $3^{-\frac{1}{7}}$ | 6 $2^{-\frac{3}{5}}$ |
| A $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ | B $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$ | C $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ | D $\frac{1}{\sqrt{2^3}}$ | E $\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$ | F $\frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$ |

Lösung:

1 – C 2 – D 3 – F 4 – E 5 – A 6 – B

VERSTÄNDNIS

- Silke und Philipp wollen herausfinden, was $2^{-\frac{1}{2}}$ ist.
 Silke meint: „ $2^{\frac{1}{2}}$ ist $\sqrt{2}$. Wenn ich durch die Basis, also durch 2 dividiere, muss ich den Exponent um 1 vermindern, ich erhalte also $2^{-\frac{1}{2}}$ und dies ist $\frac{\sqrt{2}}{2}$.“
 Philipp behauptet: „Wenn ich Wurzel ziehe, halbiere ich den Exponenten. Da $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ist, muss $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein.“
 Wer hat Recht? Begründe.

1 Gib die größere der beiden Zahlen an.

- a) $3^2; 3^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{2}}; 2^{-\frac{1}{2}}$ c) $7^{\frac{2}{3}}; 7^{\frac{3}{2}}$ d) $5^{-2}; 5^{-\frac{1}{2}}$
 e) $2^{\frac{1}{3}}; 3^{\frac{1}{3}}$ f) $2^{-\frac{1}{3}}; 3^{-\frac{1}{3}}$ g) $(27)^{-\frac{1}{3}}; 25^{-\frac{1}{3}}$ h) $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}; (\frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}}$

2 In welcher Beziehung stehen die Zahlen zueinander?

Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie mit den gegebenen Zahlenpaaren.

| Die Zahlen sind ... | | | |
|---------------------|--|----------------------------|--------------------------------|
| gleich. | Zahl und deren Kehrzahl zueinander. | Gegenzahlen zueinander. | Zahl und deren Quadratzahl. |
| ■ | ■ | ■ | ■ |

- a) $(-2)^3; 64^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{1}{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $3^{\frac{2}{3}}; \sqrt[3]{9}$ d) $3^{-2}; \frac{1}{81}$
 e) $\frac{1}{\sqrt{125}}; 5^{\frac{3}{2}}$ f) $2^{-\frac{1}{3}}; 2^{-\frac{2}{3}}$ g) $(-\frac{1}{7})^2; 49^{-1}$ h) $(-5)^{-3}; (\frac{1}{5})^3$

3 Aus den nebenstehenden Zahlen sollen sinnvolle Potenzterme gebildet werden, wobei jede der Zahlen genau einmal verwendet werden soll. Vorzeichen und Klammern darfst du beliebig setzen.

Beispiel: $(2^3)^5$ oder $3^{-\frac{2}{5}}$.

a) Bilde eine ...

- 1 möglichst große Zahl.
- 2 möglichst kleine Zahl.
- 3 Zahl, die möglichst nahe an 0 ist.
- 4 Zahl, die möglichst nahe an 1 ist.

b) Wähle drei andere Zahlen und löse die Aufgaben 1 bis 4 aus a).

c) Denke dir ähnliche Aufgaben aus und löse sie. Tausche mit einem Mitschüler.

4 Gib jeweils an, zwischen welchen beiden natürlichen Zahlen der Term liegt.

Überprüfe anschließend mit deinem Taschenrechner.

Beispiel: $4 < \sqrt{23} < 5$.

- a) $\sqrt{10}; \sqrt[3]{10}; \sqrt[4]{10}; \sqrt[5]{10}; \sqrt[100]{10}$
 b) $\sqrt{100}; \sqrt[3]{100}; \sqrt[4]{100}; \sqrt[5]{100}; \sqrt[100]{100}$
 c) $\sqrt[3]{10}; \sqrt[3]{100}; \sqrt[3]{1000}; \sqrt[3]{10\,000}; \sqrt[3]{100\,000}$
 d) $\sqrt{15}; \sqrt{140}; \sqrt[3]{287}; \sqrt[3]{1478}; \sqrt[3]{4560}$

AUFGABEN



$$3^2 \cdot 3^2 = 9 \cdot 9 = 81 = 3^4$$

$$\frac{2^4}{2^2} = \frac{32}{4} = 8 = 2^3$$

$$2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 = 6^2$$

$$(-2)^4 \cdot (-2)^2 = 1 \cdot (-32) = -32 = (-2)^6$$

$$(-2)^4 \cdot 5^2 = -8 \cdot 125 = -1000 = (-10)^3$$

$$\frac{5^4}{3^4} = \frac{625}{81} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^4$$

$$(2^2)^5 = \frac{1}{(2^2)^5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 2^{-10}$$

$$\frac{3^4}{2^4} = \frac{27}{8} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$(3^2)^2 = 9^2 = 81 = 3^4$$

$$\frac{3^4}{3^4} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3} = 3^{-1}$$

- Ergänze die fehlenden Exponenten und vergleiche sie anschließend.
- Formuliere mögliche Rechenregeln und überprüfe sie an weiteren Beispielen.

Beispiel: $2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32 = 2^5$.

MERKWISSEN

Rechengesetze für Potenzen ($a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Q}$) mit ...

gleichen Basen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

gleichen Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenzieren von Potenzen:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

BEISPIELE

I Vereinfache mithilfe der Potenzgesetze.

a) $x^2 \cdot x^4$ b) $p^5 : p^3$ c) $s^6 \cdot t^6$ d) $a^3 : b^3$ e) $(k^3)^3$

Lösung:

a) $x^{2+4} = x^6$ b) $p^{5-3} = p^2$ c) $(s \cdot t)^6$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ e) $k^{3 \cdot 3} = k^9$

II Vereinfache.

a) $x^{-2} \cdot x^4$ b) $p^5 : p^5$ c) $s^{-1} \cdot t^{-1}$ d) $a^0 : b^0$ e) $(k^{-2})^3$

Lösung:

a) $x^{-2+4} = x^2$ b) $p^{5-5} = p^0 = 1$ c) $(s \cdot t)^{-1}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ e) $k^{-2 \cdot 3} = k^{-6}$

III Vereinfache.

a) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$ b) $p^{\frac{1}{5}} : p^{\frac{1}{3}}$ c) $s^{\frac{1}{6}} \cdot t^{\frac{1}{6}}$ d) $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$ e) $\left(k^{\frac{1}{3}}\right)^3$

Lösung:

a) $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}}$ b) $p^{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}} = p^{-\frac{2}{15}}$ c) $(s \cdot t)^{\frac{1}{6}}$ d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ e) $k^{\frac{1}{3} \cdot 3} = k$

VERSTÄNDNIS

- Erkläre den Unterschied zwischen $4 \cdot 6$ und 6^4 .
- Was ist richtig: $a^m \cdot a^m = a^{2m}$ oder $a^m \cdot a^m = (a \cdot a)^m$? Erkläre.

1 Vereinfache mithilfe der Potenzgesetze und berechne ohne Hilfsmittel.

- a) $25^2 \cdot 2^2$ b) $20^2 : 10^2$ c) $6^{-8} \cdot 6^{10}$ d) $24^3 : 6^3$
 e) $8^{-9} : 8^{-11}$ f) $(-2)^4 \cdot 5^4$ g) $(3^{15})^{\frac{1}{5}}$ h) $3^6 \cdot 3^{-2}$
 i) $(\frac{2}{3})^8 \cdot (\frac{3}{2})^8$ j) $(\frac{5}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-3}$ k) $(\frac{1}{6})^7 : (\frac{1}{6})^5$ l) $(\frac{5}{3})^4 : (\frac{5}{6})^4$

Lösungen zu 1:

$\frac{1}{36}$; 1; 2,5; 4; 16; 27; 36;
64; 64; 81; 2500; 10 000

2 Finde möglichst viele unterschiedliche Lösungswege und berechne.

- a) $2^3 \cdot 2^3$ b) $3^2 \cdot 3^2$ c) $5^2 \cdot 5^4$ d) $a^4 \cdot a^{12}$

3 Was gehört zusammen? Finde Terme, die die gleiche Zahl darstellen.

| | | | |
|-------------------|---|---|---------------------|
| $(\frac{1}{9})^3$ | 3^{-6} | $(2^{-3})^2$ | $(3^{-2})^3$ |
| $(\frac{1}{8})^2$ | $(\frac{1}{3^2})^3$ | $(\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^3$ | $(\frac{1}{2^3})^2$ |
| 2^{-6} | $(\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^2$ | $\frac{1}{3^6}$ | $\frac{1}{2^6}$ |

4 Gib den Term als eine Potenz an und berechne ihn.

- a) $8^2 \cdot 4$ b) $27^4 : 9^3$ c) $(-\frac{1}{3}) \cdot 9$ d) $-125 : \frac{1}{25}$
 e) $63^5 : 7^5$ f) $(-0,3)^2 \cdot 5^2$ g) $(32^2)^{\frac{1}{5}}$ h) $(-0,216^4)^{\frac{1}{3}}$

5 Die Suchmaschine „GOOGLE“ bekam ihren Namen nach dem Wort „googol“, das eine englischsprachige Bezeichnung für 10^{100} ist.

- a) Finde heraus, weshalb die Suchmaschine diesen Namen trägt.
 b) Recherchiere, was die Bezeichnung „googolplex“ bedeutet. Wie viele Ziffern hat diese Zahl? Wie viel googol ist ein googolplex?



6 Potenzen potenzieren.

- a) Berechne folgende Termwerte.
 1 2^0 2 2^1 3 2^2 4 2^3
- b) Zeige mit Hilfe der Potenzgesetze, dass 2^{2^n} quadriert wird, wenn der Exponent n auf $(n + 1)$ erhöht wird.
- c) Der französische Mathematiker Pierre de Fermat (1607-1665) vermutete, dass alle Zahlen von der Form $2^{2^n} + 1$ Primzahlen sind. Zeige, dass dies für $n = 0, 1, 2$ und 3 gilt. Recherchiere nach aktuellen Forschungsergebnissen.
- d) Wie viele Quadratzahlen von der Form 2^{2^n} gibt es? Begründe.
- e) Berechne folgende Termwerte.
 1 3^3^0 2 3^3^1 3 3^3^2 4 3^3^3
- f) Wie verändert sich der Termwert von 3^{3^n} ? Ordne zu.
 1 $3^{3^{n+1}}$ 2 3^{3^n+1}
 3 3^{3^n-1} 4 $3^{3^{n-1}}$
- A 3^{3^n} wird verdreifacht. B Aus 3^{3^n} wird die dritte Wurzel gezogen.
 C Die Kubikzahl von 3^{3^n} wird gebildet. D 3^{3^n} wird gedrittelt.
- g) Wie viele Primzahlen von der Form $3^{3^n} + 1$ gibt es? Begründe.
 h) Wie viele Quadratzahlen von der Form 3^{3^n} gibt es? Begründe.



- 7 Bianca behauptet, die Begründung der Potenzgesetze sei für natürliche Exponenten doch ganz einfach und schreibt Folgendes in ihr Heft:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \dots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}$$

- Ist diese Begründung plausibel? Erkläre die einzelnen Schritte.
 - Finde analoge Begründungen für die restlichen Potenzgesetze.
 - Wie musst du deine Argumente ändern, wenn der Exponent auch negativ sein kann? Arbeite, falls notwendig, mit Fallunterscheidungen.
- 8 Du kennst bereits die Potenzgesetze, die den Umgang mit Potenzen erleichtern. Da Wurzelterme Potenzen mit rationalen Exponenten sind, gilt Ähnliches auch für sie.

Wurzelgesetze

Für $a \geq 0$; $b > 0$; $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

1 $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

2 $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

3 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Für $a \geq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{Z}$ gilt:

4 $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

Ein möglicher Beweis für das Wurzelgesetz 1:

Bezeichne $x = \sqrt[n]{a}$ und $y = \sqrt[n]{b}$. Sei also x diejenige nichtnegative Zahl, deren n -te Potenz gleich a ist, und y diejenige nichtnegative Zahl, deren n -te Potenz gleich b ist. Dann gilt:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x \cdot y = \sqrt[n]{(x \cdot y)^n} = \sqrt[n]{x^n \cdot y^n} = \sqrt[n]{a \cdot b}.$$

- Begründe die einzelnen Schritte in dem obigen Beweis.
- Finde analoge Beweise für die weiteren Wurzelgesetze.
- Ordne die Potenzgesetze den zugehörigen Wurzelgesetzen zu.

- 9 Berechne im Kopf.

a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$

b) $\sqrt[4]{\frac{81}{125}}$

c) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$

d) $\sqrt{\sqrt{256}}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$

f) $\sqrt{4^3}$

g) $\sqrt[3]{3^6}$

h) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{16} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$.

- 10 Bringe den größtmöglichen Faktor vor das Wurzelzeichen.

a) $\sqrt[3]{40}$

b) $\sqrt[4]{32}$

c) $\sqrt[3]{108}$

d) $\sqrt[4]{30\,000}$

e) $\sqrt[5]{160}$

f) $\sqrt[4]{a^5}$

g) $\sqrt[4]{64a^5b^2}$

h) $\sqrt[5]{64a^5b^2}$

- 11 Bringe alle Faktoren unter das Wurzelzeichen.

a) $5 \cdot \sqrt[3]{2}$

b) $2 \cdot \sqrt[4]{3}$

c) $3 \cdot \sqrt[3]{10}$

d) $10 \cdot \sqrt[3]{5}$

e) $4 \cdot \sqrt[3]{2}$

f) $a \cdot \sqrt[3]{b^2}$

g) $2a \cdot \sqrt[3]{b^2}$

h) $2a^2 \cdot \sqrt[3]{b^2}$

- 12 Richtig oder falsch? Begründe bzw. widerlege durch ein Gegenbeispiel.

a) Jede Potenz von 2 mit ganzzahligem Exponenten ist größer als 2.

b) Das Produkt zweier Kubikwurzelterme ist stets ein Kubikwurzelterm.

c) Jede Potenz einer negativen Zahl ist eine negative Zahl.

d) Jede Potenz einer positiven Zahl ist positiv.

e) Jede Wurzel aus 2 ist kleiner als 2.

f) Jede Potenz einer positiven Zahl mit negativem Exponenten ist negativ.

13 Finde und korrigiere die Fehler. Begründe dein Vorgehen.

- a) $(4^2)^3 = 4^5$ b) $a^2 \cdot a^3 = a^6$ c) $2^3 \cdot 3^3 = 5^3$ d) $x^2 \cdot x^3 = (2x)^5$
 e) $10^4 : 2^4 = 8^4$ f) $12^5 : 3^5 = 4^1$ g) $a^6 : a^2 = a^3$ h) $2^{-3} = -8$
 i) $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{4}{3}}$ j) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[8]{5}$ k) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{12}$ l) $\sqrt[5]{128} : \sqrt[5]{4} = \sqrt{32}$
 m) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{8} = \sqrt[5]{8}$ n) $\sqrt[4]{9} : \sqrt[3]{9} = \sqrt{9} = 3$ o) $\sqrt{5} : \sqrt[5]{5} = 5^{-3}$

14 Formuliere möglichst viele Rechenaufgaben, deren Lösung folgende Zahl bzw. folgender Term ist. Setze zur Ideenfindung auch deinen Taschenrechner ein.

- a) $2^{-\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{4}$ c) $0,0001^{-1}$ d) $\sqrt[5]{a^2}$ e) $x^{-\frac{7}{4}}$



15 Silke und Philipp unterhalten sich über das Rationalmachen des Nenners, wenn n-te Wurzeln im Nenner stehen.



Bei eingliedrigen Nennern habe ich kein Problem: Ich multipliziere mit einem Term, der die n-te Wurzel rückgängig macht, also z. B. bei $\frac{1}{\sqrt[2]{2}}$ mit $\frac{\sqrt[2]{4}}{\sqrt[2]{4}}$, oder bei $\frac{5}{\sqrt[3]{27}}$ mit $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$. Was macht man aber, wenn der Nenner zweigliedrig ist?



Naja, bei Quadratwurzeln haben wir eine Summe mit der entsprechenden Differenz und umgekehrt getilgt. Beispielsweise haben wir den Term $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ mit $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ erweitert, damit im Nenner $5-2=3$ entsteht. Geht es bei n-ten Wurzeln nicht genauso?

- a) Begründe, warum Philipps Verfahren bei zweigliedrigen Quadratwurzeltermen immer funktioniert.
 b) Zeige am Beispiel von $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$, dass dieses Verfahren bei n-ten Wurzeln im Allgemeinen nicht funktioniert.
 c) Entwickle ein passendes Verfahren für zweigliedrige Kubikwurzelterme.

Es gilt:
 $(x+y)(x^2-xy+y^2) = x^3+y^3$
 und
 $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3-y^3$

WISSEN

Wurzeln aus negativen Zahlen

Im vorherigen Kapitel wurden n-te Wurzeln nur für den Fall definiert, dass der Radikand (die Zahl „unter der Wurzel“) nichtnegativ ist. Andererseits haben wir in diesem Kapitel das Potenzieren negativer Zahlen „erlaubt“. So ist zum Beispiel $(-2)^3 = -8$.

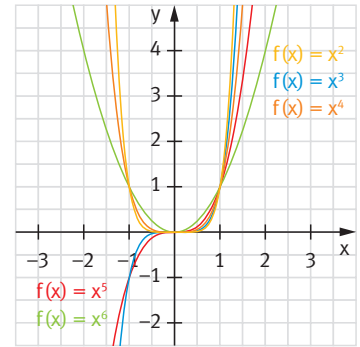
Solche Rechenoperationen durch das Ziehen der entsprechenden n-ten Wurzel rückgängig zu machen, ist im Grunde eine Vereinbarungssache. Beispielsweise berechnet dein Taschenrechner bestimmte Wurzeln auch aus negativen Zahlen, z. B. $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Eine mögliche Definition – **wir verwenden in der Schule eine davon abweichende** – kann wie folgt sein:

Ist $a \in \mathbb{R}$ und n eine **ungerade** Zahl, so ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige reelle Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist.

- Begründe, warum in der obigen Definition eine Einschränkung auf ungerade n notwendig ist.
- Berechne im Kopf den Wert der nachfolgenden Wurzelterme. Überprüfe anschließend mit deinem Taschenrechner.
 $\sqrt[3]{-8}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt[3]{-64}; \sqrt[3]{-125}; \sqrt[2]{-1}; \sqrt[3]{-216}; \sqrt[5]{-32}; \sqrt[5]{-243}; \sqrt[2]{-128}; \sqrt[5]{-0,00001}$
- Begründe an Beispielen, mit welchen Potenzgesetzen man durch die obige Definition Probleme bekommt.

Anne und Luca stellen mit einer dynamischen Geometriesoftware die Graphen einiger Funktionen der Form $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) dar. Anne sagt: „Hier müssen wir etwas Ordnung hineinbringen.“



Ich stelle die Graphen der Funktionen mit den geraden Exponenten dar und du die mit den ungeraden.“

- Zeichne mithilfe eines Computerprogramms in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Graphen folgender Funktionen (jeweils drei):
 - 1 $f(x) = x^2$; $g(x) = x^4$; $h(x) = x^6$
 - 2 $f(x) = x^1$; $g(x) = x^3$; $h(x) = x^5$
 - 3 $f(x) = x^{-2}$; $g(x) = x^{-4}$; $h(x) = x^{-6}$
 - 4 $f(x) = x^{-1}$; $g(x) = x^{-3}$; $h(x) = x^{-5}$
- Vergleiche die Schaubilder. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede kannst du feststellen? Formuliere eine Vermutung, wie der Graph der nächsten Funktion in der Reihe verlaufen könnte. Überprüfe deine Vermutung mit einem Computerprogramm.
- Beschreibe gemeinsame Eigenschaften aller dargestellten Funktionsgraphen.

MERKWISSEN

Eine Funktion der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ heißt **Potenzfunktion** mit ganzzahligem Exponenten. Man unterscheidet folgende Fälle.

| | n gerade | n ungerade |
|--|---|--|
| Symmetrie | symmetrisch zur y-Achse | symmetrisch zum Ursprung |
| spezielle Punkte | A (-1 1) und B (1 1) | A (-1 -1) und B (1 1) |
| n > 0 f(0) = 0 | <p>$f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow -\infty$</p> | <p>$f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$ $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$</p> |
| n < 0 nicht definiert an der Stelle 0 | <p>$f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$</p> | <p>$f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow -\infty$</p> |

Lässt man bei einer Funktion f die x -Werte gegen $+\infty$ gehen und gehen dabei gleichzeitig auch die Funktionswerte gegen $+\infty$, so schreibt man:
 $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

Nähert sich eine Funktion f für $x \rightarrow \pm\infty$ einem festen Wert (z. B. 0) immer mehr an, so liegt eine waagrechte **Asymptote** vor ($y = 0$). Man schreibt:
 $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

Ist eine Funktion an einer bestimmten Stelle nicht definiert, so liegt eine **Definitionslücke** vor. An diesen Definitionslücken können senkrechte Asymptoten vorliegen.

Für $n < 0$ sind die x - und die y -Achse jeweils Asymptoten.

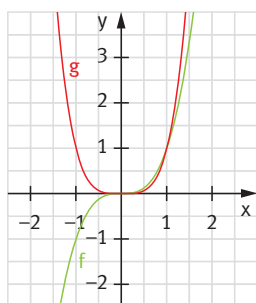
I Stelle folgende Funktionen in einer Wertetabelle im Intervall $[-2; 2]$ grafisch dar. Erstelle dazu zunächst eine Wertetabelle.

a) $f: y = x^3$ b) $g: y = x^4$ c) $h: y = x^{-1}$ d) $i: y = x^{-2}$

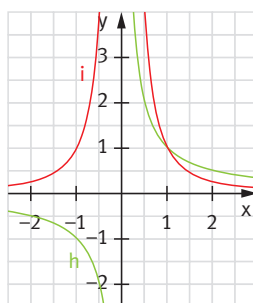
Lösung:

| x | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
|--------------|------|-----------------|----|--------|---|--------|---|----------------|------|
| $y = x^3$ | -8 | -3,375 | -1 | -0,125 | 0 | 0,125 | 1 | 3,375 | 8 |
| $y = x^4$ | 16 | 5,0625 | 1 | 0,0625 | 0 | 0,0625 | 1 | 5,0625 | 16 |
| $y = x^{-1}$ | -0,5 | $\approx -0,67$ | -1 | -2 | - | 2 | 1 | $\approx 0,67$ | 0,5 |
| $y = x^{-2}$ | 0,25 | $\approx 0,44$ | 1 | 4 | - | 4 | 1 | $\approx 0,44$ | 0,25 |

zu a) und b):



zu c) und d):



II Betrachte die Graphen der Funktionen f, g, h und i mit:

$f(x) = x^4$ $g(x) = x^{-1}$ $h(x) = x^{-2}$ $i(x) = x^3$

Gib diejenigen Funktionen an, deren Graph ...

- punktsymmetrisch zum Ursprung ist.
- eine Asymptote hat.
- durch den Punkt A $(-1 | 1)$ verläuft.
- nach $+\infty$ strebt, wenn $x \rightarrow +\infty$ geht.

Lösung:

- a) g und i b) g und h c) f und h d) f und i

Überprüfe mit einem Computerprogramm.

VERSTÄNDNIS

Begründe, dass die Graphen aller Potenzfunktionen f mit $f(x) = x^n$ mit ...

- ganzzahligem n durch den Punkt B $(1 | 1)$ verlaufen.
- geradem n durch den Punkt A $(-1 | 1)$ verlaufen.
- ungeradem n durch den Punkt A $(-1 | -1)$ verlaufen.
- negativem ganzzahligem Exponenten durch keinen Punkt mit $x = 0$ verlaufen.

- 1 Die angegebenen Punkte liegen auf dem Graphen der Funktion. Berechne jeweils die fehlende Koordinate. Findest du mehrere Möglichkeiten?

| | | | | | |
|----|-----------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| a) | $f(x) = x^2$ | A(3 a) | B(-2,5 b) | C(c 20,25) | D(d $\frac{6}{19}$) |
| b) | $f(x) = x^3$ | A(-2 a) | B(1,4 b) | C(c 0,125) | D(d -3^9) |
| c) | $f(x) = x^5$ | A($-\frac{1}{2}$ a) | B(5 b) | C(c -2^{15}) | D(d $\frac{1}{243}$) |
| d) | $f(x) = x^6$ | A($\frac{1}{5}$ a) | B(3^2 b) | C(c $1 \cdot 10^{-6}$) | D(d -1) |
| e) | $f(x) = x^{-2}$ | A(3 a) | B($-\frac{3}{4}$ b) | C(c $\frac{1}{9}$) | D(d 16) |

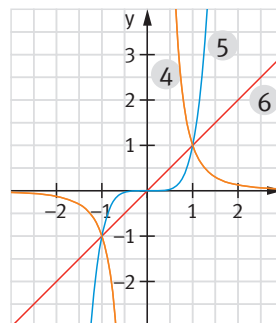
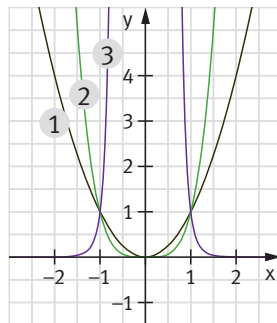
- 2 Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $y = x^{-3}$.

- a) Übertrage die Wertetabelle in dein Heft und vervollständige sie. Ist die Funktion in allen Punkten definiert?

| | | | | | | | | | | |
|---|----|------|------|----|------|---|-----|---|-----|-----|
| x | -2 | -1,5 | -1,2 | -1 | -0,7 | 0 | 0,4 | 1 | 1,3 | 1,5 |
| y | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

- b) Zeichne den Graphen der Funktion so genau wie möglich.
c) Beschreibe den Verlauf des Graphen in Worten.

- 3 Ordne die Graphen den zugehörigen Funktionsgleichungen zu.



- $f(x) = x^1$
- $g(x) = x^4$
- $h(x) = x^{-3}$
- $i(x) = x^5$
- $j(x) = x^{-8}$
- $k(x) = x^2$

Überprüfe mit einem Computerprogramm.

- 4 Beschreibe den Verlauf der Funktionen aus Aufgabe 3. Verwende dabei folgende Ausdrücke:

Wertemenge

Definitionsmenge

Die Funktionswerte gehen gegen ..., wenn ...

Asymptote

Der Funktionsgraph fällt / steigt, wenn...

Die Funktionswerte gehen gegen ..., wenn ...

Der Graph der Funktion geht durch den Punkt A(1|1) / B(-1|1) / C(-1|-1)

Symmetrie zum Ursprung / zur y-Achse


Definitionslücke

- 5 Ermittle alle gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen f und g.

- a) $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^{-1}$ b) $f(x) = x^5$ und $g(x) = x^8$
c) $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^{-2}$ d) $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^5$

- 6 Gib die Funktionsgleichung aller Potenzfunktionen f der Form $f(x) = x^n$ mit ganzzahligen Exponenten an, deren Graph durch den folgenden Punkt geht:

- a) P(1|-1) b) Q(1|2) c) R(2|1) d) S(2|2)
e) T(2|3) f) U(2|4) g) V(2| $\frac{1}{8}$) h) W(2|-2)

- 7 a) Welche der folgenden Differenzen sind positiv, welche negativ, welche haben den Wert null? Begründe ohne Rechnung.
- 1 $17^2 - 13^2$ 2 $0,4^3 - 0,7^3$ 3 $9^2 - 9^3$ 4 $0,7^2 - 0,7^3$
- b) Welche der folgenden Quotienten sind größer als 1, welche gleich 1 und welche kleiner als 1? Begründe ohne Rechnung.
- 1 $2,1^3 : 3,7^3$ 2 $0,84^2 : 0,61^2$ 3 $1,9^2 : 1,9^3$ 4 $8,5^2 : (-8,5)^2$
- c) Erstelle selbst eigene Aufgaben mit Ergebnissen, die
- 1 negativ 2 kleiner 1 3 gleich 1 4 größer 1 sind.
- 8 In den nebenstehenden Abbildungen siehst du eine moderne Skulptur auf dem Platz der Republik in Frankfurt am Main aus verschiedenen Blickwinkeln.
- a) Welche Potenzfunktionen dienen als Grundlage? Begründe.
- b) Beschreibe den Verlauf der Funktionen.
- 9  Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten lassen sich anhand Ihrer Symmetrie in zwei Gruppen einteilen. Diese Symmetrien der Funktionsgraphen lassen sich formalisieren.



Symmetrie von Funktionsgraphen

Ist der Graph einer Funktion **f** **symmetrisch** ...

- 1 **zur y-Achse**, so gilt für jedes $x \in \mathbb{D}_f$: $f(x) = f(-x)$ ist.
Man sagt: Die Funktion ist **gerade**.
- 2 **zum Koordinatenursprung**, so gilt für jedes $x \in \mathbb{D}_f$: $f(x) = -f(-x)$.
Man sagt: Die Funktion ist **ungerade**.

- a) Begründe, dass dieser Zusammenhang zwischen den Funktionswerten **gleichbedeutend** mit der entsprechenden Symmetrie des Graphen ist.
- b) Zeige algebraisch, dass der Graph der Funktion ...
- 1 f mit $f(x) = x^2$ symmetrisch zur y-Achse ist.
- 2 g mit $g(x) = x^3$ symmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

PARTNERARBEIT

„zwei aus drei“ mit Potenzfunktionen

Erstellt Kärtchen, auf denen ihr je einen Graphen der folgenden Funktionen f_n darstellt:

$$f_n(x) = x^n \text{ mit } n = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Anschließend mischt ihr die Karten und bildet einen verdeckten Kartenstapel.

Der erste Spieler zieht aus dem Kartenstapel drei Karten und legt sie aufgedeckt nebeneinander. Seine Aufgabe ist es nun, eine Eigenschaft finden, die auf zwei der Funktionsgraphen zutrifft, nicht aber auf den dritten. Der zweite Spieler überprüft die Lösung. Ist die Lösung richtig, nimmt der erste Spieler die beiden Kärtchen zu sich, auf denen die beiden Funktionen mit der genannten Eigenschaft, abgebildet sind. Ist die Lösung falsch, geht er in dieser Runde leer aus.

Nun ist der zweite Spieler an der Reihe: Er ergänzt die übriggebliebene, noch aufgedeckte Karte mit zwei weiteren aus dem Stapel und sucht eine Eigenschaft, die auf zwei der sichtbaren Funktionsgraphen zutrifft, nicht aber auf den dritten ... Wer am Ende mehr Karten hat, gewinnt.

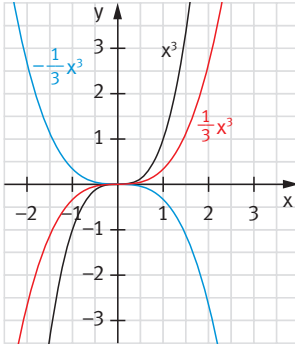
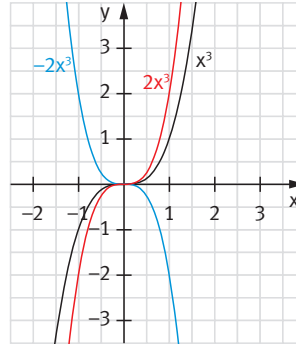
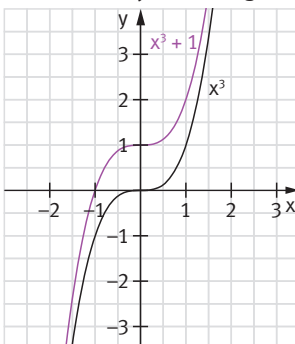
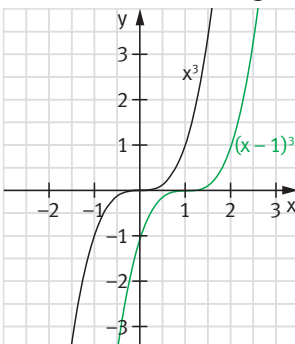
Am besten bearbeitet
ihr diese Aufgabe in vier
Gruppen. Tragt eure
Ergebnisse anschließend
im Plenum vor.

Stelle mit einem Computerprogramm den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ dar.

- Stelle im gleichen Koordinatensystem folgende Funktionen dar:
 ① $f_1(x) = a \cdot x^3$ ② $f_2(x) = (x + a)^3$ ③ $f_3(x) = x^3 + a$ ④ $f_4(x) = (ax)^3$
 Vergleiche die Graphen. Setze dabei für a folgende Werte ein:
 $a = 2; 3; 4; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -1; -2; -3; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; 0$. Nutze gegebenenfalls den Schieberegler.
- Formuliere eine Vermutung, welchen Einfluss der Parameter a jeweils auf den Funktionsgraphen hat. Arbeite, mit Fallunterscheidungen, falls dies notwendig ist.
- Überprüfe deine Vermutung an einer anderen Funktion, z. B. an g mit $g(x) = x^{-1}$.

MERKWISSEN

Verändert man den Term einer Ausgangsfunktion, hat das Einfluss auf den Verlauf des Graphen der Funktion. Dabei kommt es auf die Stelle an, an welcher man den Term verändert:

| Veränderung des ... | | | |
|---------------------|--|-----------------|--|
| Funktions-terms | Graphen | | |
| $a \cdot f(x)$ | für $0 < a < 1$ Stauchung des Graphen mit dem Faktor $ a $ in y -Richtung für $a < 0$, zusätzlich eine Spiegelung an der x -Achse | | für $1 < a $ Streckung des Graphen mit dem Faktor $ a $ in y -Richtung für $a < 0$, zusätzlich eine Spiegelung an der x -Achse |
| |  | |  |
| Funktions-terms | Graphen | Funktions-terms | Graphen |
| $f(x) + c$ | Verschiebung um c Einheiten in y -Richtung | $f(x - d)$ | Verschiebung um d Einheiten in x -Richtung |
| |  | |  |

I Beschreibe, wie der Graph folgender Funktionen aus dem Graphen von f mit $f(x) = x^3$ hervorgeht.

a) $f_1(x) = \frac{2}{3}x^3$ b) $f_2(x) = -\frac{2}{3}x^3$ c) $f_3(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^3$ d) $f_4(x) = x^3 - \frac{2}{3}$

Lösung:

- a) Stauchung mit dem Faktor $\frac{2}{3}$
 b) Stauchung mit dem Faktor $\frac{2}{3}$ und Spiegelung an der x-Achse
 c) Verschiebung um $\frac{2}{3}$ Einheiten in x-Richtung
 d) Verschiebung um $-\frac{2}{3}$ Einheiten in y-Richtung

II Gib den neuen Funktionsterm an. Die Funktion f mit

1 $f(x) = x^4$ 2 $f(x) = \frac{1}{x^2}$

wird ...

- a) um 2 Einheiten in y-Richtung verschoben.
 b) um -3 Einheiten in x-Richtung verschoben.
 c) in y-Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt.
 d) in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht.
 e) an der x-Achse gespiegelt.

Lösung:

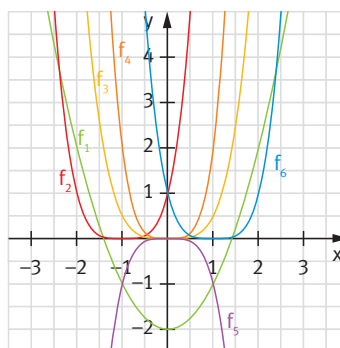
1 a) $x^4 + 2$ b) $(x + 3)^4$ c) $3x^4$ d) $\frac{1}{2}x^4$ e) $-x^4$
 2 a) $\frac{1}{x^2} + 2$ b) $\frac{1}{(x + 3)^2}$ c) $\frac{3}{x^2}$ d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2x^2}$ e) $-\frac{1}{x^2}$

VERSTÄNDNIS

- Eine „äußere Veränderung“ bewirkt eine Veränderung des Graphen entlang der y-Achse, eine „innere“ entlang der x-Achse. Ordne die Veränderungen aus dem Merkwissen entsprechend zu.

1 Es wurden Änderungen an der Funktion f mit $f(x) = x^4$ durchgeführt. Ordne den Funktionsgraphen die passenden Beschreibungen der Änderung und die jeweiligen Funktionsgleichungen zu.

- A Verschiebung in x-Richtung um 1 Einheit
 B Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2
 C Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$
 D Verschiebung in x-Richtung um -1 Einheit
 E Verschiebung in y-Richtung um -2 Einheiten
 F Spiegelung an der x-Achse



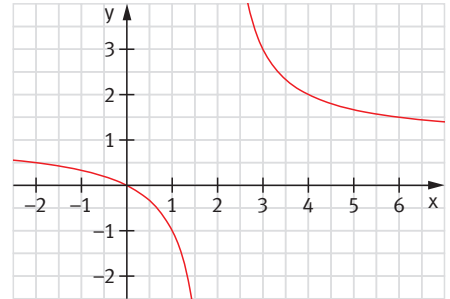
AUFGABEN

Kontrolliere deine Zeichnung mit einem Computerprogramm.

- 2 Zeichne zunächst den Graphen der Funktion f in dein Heft. Erstelle dazu eine geeignete Wertetabelle.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ b) $f(x) = -\frac{1}{x}$ c) $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = -\frac{1}{4}$

- 3 Britta behauptet, dass sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x-2} + 1$ dargestellt hat. Stimmt das? Begründe.

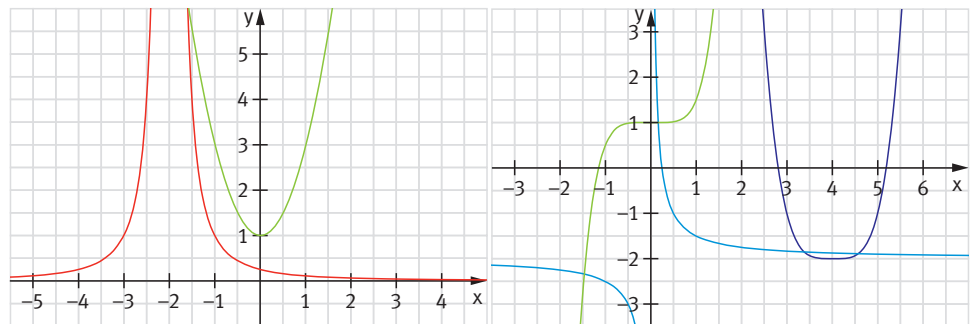


- 4 Die folgenden Funktionen sind entstanden, indem an der Funktion f mit $f(x) = x^3$ mehrere Veränderungen hintereinander durchgeführt wurden. Beschreibe diese zunächst, ohne den Graphen zu zeichnen. Überprüfe dann mit einem Computerprogramm.

a) $f(x) = (x-2)^3 + 1$ b) $f(x) = 2 \cdot (x-2)^3$ c) $f(x) = -x^3 + 1$
 d) $f(x) = -(x-1)^3$ e) $f(x) = 2 \cdot (x-1)^3 + 2$ f) $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x-2)^3 + 1$

- 5 Nachfolgend siehst du Aussagen zu Potenzfunktionen, an denen Veränderungen durchgeführt wurden. Beurteile, ob es eine solche Potenzfunktion geben kann. Der Graph der Funktion ...

- A wurde um 4 Einheiten in x -Richtung verschoben.
 B wurde in y -Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht.
 C hat die Asymptote $x = -2$. D hat die x -Achse als Asymptote.
 E hat ein Symmetriezentrum im Punkt $P(0|1)$.
 F wurde um 1 Einheit in y -Richtung verschoben.
 G ist symmetrisch zu $x = 4$. H wurde in y -Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt.



- 6 In der Fahrschule verwendet man folgende Näherungsformel für die Berechnung des Bremsweges in m : $s_B \approx 0,01 \cdot v^2$. Dabei bezeichnet v die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs in km/h .

- a) Erläutere an Beispielen die Bedeutung der Formel.
 b) Ermittle anhand der Formel einen Funktionsterm, der die Geschwindigkeit am Anfang des Bremsvorgangs in Abhängigkeit des Bremsweges angibt. Stelle die Funktion grafisch dar.
 c) Stelle auf der Grundlage von b) für verschiedene Geschwindigkeitsüberschreitungen dar, wie sich die Bremswege in einer 30-Zone (in einer geschlossenen Ortschaft, auf einer Landstraße, auf der Autobahn) gegenüber der erlaubten Höchstgeschwindigkeit verlängern.





- 7 Manfred und Willi diskutieren über die Anzahl der Schnittpunkte zweier Potenzfunktionen.

Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ haben zwei gemeinsame Punkte: Den Ursprung und den Punkt $P(1|1)$.



Manfred

Die Funktionen f und h mit $f(x) = x^2$ und $h(x) = x^4$ haben überdies auch den Punkt $Q(-1|1)$ gemeinsam. Kann es mehr als drei Schnittpunkte geben?



Willi

Ich glaube, wenn wir auch Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten in Betracht ziehen, dann kann es vorkommen, dass wir vier Schnittpunkte haben. Ich bin mir aber nicht sicher.

- a) Denke dir geeignete Beispiele aus und trage sie in die Tabelle ein.

| Anzahl der Schnittpunkte | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------|--------------------------|--------------------------|
| Funktion 1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | x^2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Funktion 2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | x^3 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- b) Widerlege Manfreds Vermutung, dass zwei unterschiedliche Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten mehr als 3 gemeinsame Punkte haben können.

PHYSIK

Gravitationsgesetz

Nach dem Gravitationsgesetz von Isaac Newton (1643–1727) berechnet sich die Gravitationskraft, die zwei Massen erfahren, nach der folgenden Formel:

$$F \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Dabei bezeichnet r den Abstand zwischen den Körperschwerpunkten (in m) und m_1 bzw. m_2 die beiden Massen (in kg).

- Für Menschen auf der Erde gilt: Die Gravitationskraft, die ein Mensch erfährt, ist abhängig von der Höhe des Meeresspiegels (NN), auf der er sich befindet. Ermittle einen Funktionsterm, der die Gravitationskraft in Abhängigkeit der Höhe über NN angibt, die die Erde auf dich ausübt. Stelle den Graphen der Funktion mit deinem Computerprogramm dar (Erdradius ≈ 6378 km, Erdmasse $\approx 5,9736 \cdot 10^{24}$ kg).
- Berechne, welche Gravitationskraft auf der Erdoberfläche (in 10 km Flughöhe, in 5 km Meerestiefe) auf dich wirkt.
- Berechne die Höhe, ab der du dich im Zustand der Mikrogravitation befinden würdest. Als Mikrogravitation bezeichnet man eine Gravitationskraft, die weniger als ein Millionstel der Schwerkraft auf der Erde entspricht – ein Zustand der Beinahe-Schwerelosigkeit.



Stelle im gleichen Koordinatensystem die Funktion h mit $h(x) = x$ dar.

Stelle mithilfe eines Computerprogramms die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^{\frac{1}{2}}$ für $x \geq 0$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Vergleiche deren Verlauf.

- Erläutere an konkreten Beispielen von Punktepaaren, wie z. B. $P(2|4)$ und $Q(4|2)$, den Zusammenhang zwischen den beiden Graphen.
- Gehe mit den Funktionen f und g mit $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ bzw. $f(x) = x^4$ und $g(x) = x^{\frac{1}{4}}$ analog vor.
- Formuliere eine Vermutung, wie aus dem Graphen einer Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ der Graph der Funktion g mit $g(x) = x^{\frac{1}{n}}$ entsteht.

MERKWISSEN

Allgemein heißt eine Funktion f **umkehrbar**, wenn durch Vertauschen von Funktionswert y und Argument x wieder eine Funktion – **die Umkehrfunktion** \bar{f} – entsteht. Die Funktion f wird dann auch „eindeutig“ genannt: Jedem y -Wert ist genau ein x -Wert zugeordnet.

Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^n$ (bzw. $f(x) = x^{-n}$) haben als Umkehrfunktionen die **Wurzelfunktion** $\bar{f}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ (bzw. $\bar{f}(x) = x^{-\frac{1}{n}}$) für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $D = \mathbb{R}_0^+$ (bzw. $D = \mathbb{R}^+$). Eine Spiegelung des Graphen der Funktion $y = x^n$ an der Geraden $y = x$ ergibt den Graphen der Funktion $y = x^{\frac{1}{n}}$. Formal entspricht dies einem Tausch der Variablen: $x = y^n \Leftrightarrow y = x^{\frac{1}{n}}$, falls $x, y \geq 0$.

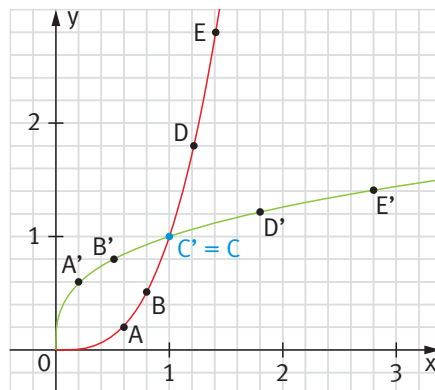
BEISPIELE

- I Bestimme rechnerisch die Umkehrfunktion zu $f(x) = x^3$ und $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Lösung:

| Vorgehen | Beispiel | allgemein |
|--|---|---|
| 1 D und W von f bestimmen | $D = \mathbb{R}_0^+$; $W = \mathbb{R}_0^+$ | $D = \mathbb{R}_0^+$; $W = \mathbb{R}_0^+$ |
| 2 Funktionsterme mit x und y schreiben | $y = x^3$ | $y = x^n$ |
| 3 Variablen x und y vertauschen | $x = y^3$ | $x = y^n$ |
| 4 nach y auflösen | $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ | $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ |
| 5 Umkehrfunktion | $\bar{f}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | $\bar{f}(x) = x^{\frac{1}{n}}$ |
| 6 D und W von \bar{f} bestimmen | $D = \mathbb{R}_0^+$; $W = \mathbb{R}_0^+$ | $D = \mathbb{R}_0^+$; $W = \mathbb{R}_0^+$ |

- II Bestimme grafisch – d. h. durch Koordinatentausch – die Umkehrfunktion zu f mit $f(x) = x^3$.



- 1 D und W von f bestimmen
- 2 **Graph der Funktion f** zeichnen
- 3 **gemeinsamen Punkt $C(1|1)$** eintragen
- 4 von mindestens drei weiteren Punkten die Koordinaten vertauschen und eintragen, z. B. $D(1,2|1,8) \Rightarrow D'(1,8|1,2)$
- 5 **Graph der Umkehrfunktion \bar{f}** vervollständigen und Funktionsgleichung aufstellen: $\bar{f}(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
- 6 D und W von \bar{f} bestimmen

VERSTÄNDNIS

- Begründe, dass die Einschränkung auf $x \geq 0$ bei der Ermittlung der Umkehrfunktion zu einer Potenzfunktion der Form $f(x) = x^n$ für gerade n -Werte notwendig ist.
- Begründe, dass die Vertauschung der Koordinaten einer Spiegelung an der Geraden $y = x$ entspricht.

1 Bestimme rechnerisch die Umkehrfunktion zu folgenden Funktionen f . Stelle sie anschließend paarweise in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar.

a) $f(x) = x^2, x \geq 0$ b) $f(x) = x^4, x \geq 0$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \geq 0$ d) $f(x) = x, x \geq 0$

2 Stelle die Graphen folgender Funktionen dar und ermittle graphisch deren Umkehrfunktionen. Formuliere Vermutungen über den Einfluss von Parametern auf die Umkehrfunktion.

a) $f_1(x) = 2x^2, f_2(x) = 2x^3, f_3(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{3}}, f_4(x) = 2x$, jeweils $x \geq 0$.

b) $f_1(x) = x^2 + 1, f_2(x) = x^3 + 1, f_3(x) = x^{\frac{1}{3}} + 1, f_4(x) = x + 1$, jeweils $D = \mathbb{R}^+$.

c) $f_1(x) = (x-2)^2, f_2(x) = (x-2)^3, f_3(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}}, f_4(x) = x-2$, jeweils $D = [2; \infty[$.

d) $f_1(x) = -x^2, f_2(x) = -x^3, f_3(x) = -x^{\frac{1}{3}}, f_4(x) = 2-x$, jeweils $x \geq 0$.

3 Begründe, warum zu folgenden Funktionen im angegebenen Definitionsbereich keine Umkehrfunktion gebildet werden kann.

a) $f(x) = 2x^2, D = [-2; +2]$

b) $f(x) = 4x^4, D = \mathbb{R}$

4 Was gehört zusammen? Finde „Funktion-Umkehrfunktion“-Paare.

A $x^{\frac{1}{4}}$

B $\frac{1}{5}x$

C $-x^3 + 1$

D x^4

E $\frac{1}{9}x^2$

F $x^2 - 2$

G $3 \cdot \sqrt{x}$

H $-\sqrt[3]{x-1}$

I $5 \cdot x$

J $\sqrt{x+2}$

5 Im englischen Sprachraum ist die Fahrenheit-Temperatur weit verbreitet.

Sie wird in Grad Fahrenheit (1°F) angegeben.

Die Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit lautet: $\vartheta_F = \frac{9}{5}\vartheta_C + 32$.

a) Rechne die Temperaturen 0°C , 37°C und 100°C in Grad Fahrenheit um und zeichne ein Umrechnungsdiagramm von Grad Celsius in Grad Fahrenheit.

b) Rechne die Temperaturen 41°F , 70°F und 100°F in Grad Celsius um und zeichne ein Umrechnungsdiagramm von Grad Fahrenheit in Grad Celsius. Vergleiche dieses mit dem Diagramm aus der Teilaufgabe a).



WISSEN

Warum heißen Umkehrfunktionen Umkehrfunktionen?

Umkehrfunktionen „kehren“ tatsächlich Funktionen um. Sie machen die Wirkung, die eine Funktionsvorschrift auf das Argument x ausübt, rückgängig: $\bar{f}(f(x)) = x$.

Beispiel: $f(x) = x^2$ und $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$ auf $D = \mathbb{R}_0^+$. An der Stelle $x = 2$ ist $\bar{f}(f(2)) = \bar{f}(2^2) = \bar{f}(4) = \sqrt{4} = 2$.

Überprüfe diese Eigenschaft bei den restlichen Funktionen aus Aufgabe 1.

Stelle mit einem Computerprogramm die Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 mit

- 1 $f_1(x) = x^2$ 2 $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$ 3 $f_3(x) = x^{\frac{1}{4}}$ 4 $f_4(x) = x^{\frac{1}{5}}$

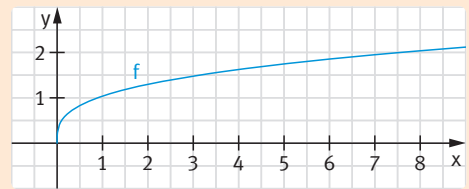
im gleichen Koordinatensystem dar.

- Vergleiche die Graphen. Formuliere Gemeinsamkeiten und Unterschiede.
- Lese gemeinsame Punkte der Funktionsgraphen ab.
- Formuliere eine Vermutung, wie der Graph der nächsten Funktion in der Reihe verlaufen könnte.

MERKWISSEN

Potenzfunktionen f der Form $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ heißen Wurzelfunktionen. Sie haben **gemeinsame Eigenschaften**:

- gemeinsame Punkte:
O (0|0) und P (1|1), denn $f(0) = 0, f(1) = 1$
- Monotonie: monoton steigend
- Verhalten für $x \rightarrow \infty$:
 $f(x) \rightarrow \infty$ (langsam)



Für $x_1 < x_2$ ist $f \dots$

- monoton steigend, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$
- monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$

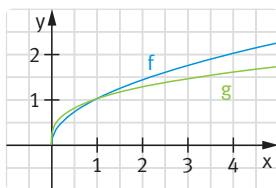
BEISPIELE

I Vervollständige die Wertetabelle. Zeichne anschließend die Funktionsgraphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem.

| | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|------|-----|------|---|-----|---|---|---|
| x | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 | 4 | 8 |
| $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

Lösung:

| | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|--------|--------|--------|---|--------|--------|--------|--------|
| x | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 1,5 | 2 | 4 | 8 |
| $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ | 0 | 0,5 | ≈ 0,71 | ≈ 0,87 | 1 | ≈ 1,22 | ≈ 1,41 | 2 | ≈ 2,83 |
| $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ | 0 | ≈ 0,63 | ≈ 0,79 | ≈ 0,91 | 1 | ≈ 1,14 | ≈ 1,26 | ≈ 1,59 | 2 |



VERSTÄNDNIS

- Erkläre, warum der Punkt P (1|1) auf dem Graph aller Wurzelfunktionen aus dem Merkwissen liegt.
- Begründe, weshalb Funktionen der Art $y = x^{\frac{1}{n}}$ Wurzelfunktionen genannt werden.

AUFGABEN

1 Auf jeder Funktion liegen mehrere der angegebenen Punkte. Bei richtiger Zuordnung ergeben sich verschiedene Namen. Finde sie heraus.

$f_1(x) = \sqrt{x}$ $f_2(x) = \sqrt[4]{x}$ $f_3(x) = x$ $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$
 E (1|1) L (9|3) T (4|4) N (8|2)
 U (16|2) A (2,25|1,5) O (2,5|2,5) B ($\frac{1}{27} | \frac{1}{3}$) W ($\frac{81}{16} | \frac{3}{2}$)

2 Vervollständige die Wertetabellen. Zeichne anschließend die Funktionsgraphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

a)

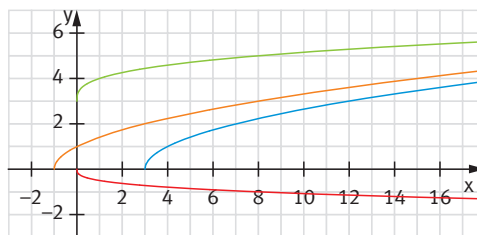
| x | -2 | -1 | 0 | 0,25 | 1 | 2 | 4 |
|------------------------------|----|----|---|------|--------|--------|---|
| $f(x) = 2\sqrt{x}$ | - | - | □ | □ | □ | ≈ 2,83 | □ |
| $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ | - | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $f(x) = \sqrt{x+2}$ | 0 | □ | □ | □ | ≈ 1,73 | □ | □ |
| $f(x) = \sqrt{x} + 2$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $f(x) = -\sqrt{x}$ | □ | □ | □ | -0,5 | □ | □ | □ |

b)

| x | -1 | 0 | 0,125 | 1 | 2 | 8 | 9 |
|---------------------------------|----|---|--------|---|---|---|--------|
| $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$ | - | 0 | | | | | |
| $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$ | - | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ | □ | - | □ | □ | □ | | □ |
| $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ | 0 | □ | ≈ 1,04 | □ | □ | □ | ≈ 2,15 |
| $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |
| $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ | □ | □ | □ | □ | □ | □ | □ |

3 Ordne die Beschriftungen den Funktionsgraphen zu.

- 1 $f(x) = \sqrt{x-3}$
- 2 $g(x) = \sqrt[3]{x} + 3$
- 3 $h(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}$
- 4 $i(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$



4 Gegeben sind die Funktionen mit $y_1 = x^{\frac{1}{2}}$ und $y_2 = \frac{1}{2}x$.

- a) Zeichne die Graphen der Funktionen in ein Koordinatensystem.
- b) Spiegle die Graphen von y_1 und y_2 an der x-Achse.
- c) Gib die Koordinaten aller Schnittpunkte der Graphen im Koordinatensystem an.
- d) Die Schnittpunkte bestimmen ein gleichschenkliges Dreieck. Berechne den Flächeninhalt.



5 Bisher sind Wurzelfunktionen mit Exponenten $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) definiert. Potenzen haben wir aber allgemeiner mit $\frac{m}{n}$ im Exponenten kennengelernt. Tatsächlich ist dies auch für Wurzelfunktionen möglich.

Sind m und n natürliche Zahlen und $x \geq 0$, so ist die Potenzfunktion $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ eine **(allgemeine) Wurzelfunktion**.

a) Formuliere Vermutungen und fertige Skizzen an, wie der Graph folgender Funktionen verlaufen könnte. Überprüfe anschließend mithilfe eines Computerprogramms.

- 1 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ $h(x) = x^{\frac{3}{4}}$ $i(x) = x^{\frac{2}{5}}$
- 2 $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ $g(x) = x^{\frac{4}{3}}$ $h(x) = x^{\frac{5}{3}}$ $i(x) = x^{\frac{11}{4}}$

b) Finde gemeinsame Eigenschaften der Graphen in Abhängigkeit der Exponenten.

Ein Pflanzkübel soll die Form eines Würfels haben. In ihn sollen mindestens 10 l Erde passen.

- Schätze zunächst die Kantenlänge, die ein solcher Kübel mindestens haben muss.
- Überprüfe deine Schätzung anschließend rechnerisch.



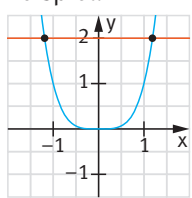
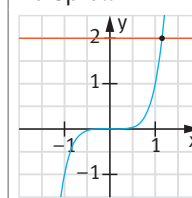
MERKWISSEN

Potenzgleichungen sind Gleichungen der Form $x^n = b$, wobei n eine natürliche Zahl größer 1 ist. Beispiele für Potenzgleichungen:

$$x^3 = 27; x^7 = 1234; x^4 = \frac{81}{256}.$$

Potenzgleichungen können auf verschiedene Arten gelöst werden:

- grafisch:** Die Lösungen sind Schnittpunkte der Graphen von $f(x) = x^n$ und $g(x) = b$.

| n gerade | n ungerade |
|--|---|
| Beispiel: $x^4 = 2$  | Beispiel: $x^5 = 2$  |
| Lösungen: $x_1 \approx 1,2$ $x_2 \approx -1,2$ | Lösung: $x \approx 1,1$ |

- rechnerisch:** Auflösen der Gleichung durch Ziehen der n -ten Wurzel.
- systematisches Probieren:** Systematisches Einsetzen für x , bis Lösung gefunden ist.

Eine Potenzgleichung der Form $x^n = b$ kann zwei Lösungen, genau eine Lösung oder keine Lösung besitzen.

BEISPIELE

I Löse die Potenzgleichungen für den geraden Exponenten $n = 4$ ($x \in \mathbb{R}$).

a) $x^4 = 3$

b) $x^4 = -7$

Lösung:

- a) 1 grafisch:

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4$ hat mit dem Graphen von g mit $g(x) = 3$ zwei Schnittpunkte. Deren x -Werte sind die Lösungen der Gleichung.

Näherungswert:

$$x_1 \approx -1,32; x_2 \approx 1,32$$

- 2 rechnerisch:

$x^4 = 3$ hat zwei Lösungen:

$$x_1 = \sqrt[4]{3} \text{ und } x_2 = -\sqrt[4]{3}.$$

$$\text{Probe: } (\sqrt[4]{3})^4 = 3 = (-\sqrt[4]{3})^4 \quad (\text{wahr})$$

$$\text{Damit ist } \mathbb{L} = \{-\sqrt[4]{3}; +\sqrt[4]{3}\}.$$

- b) 1 grafisch:

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4$ hat mit dem Graphen von g mit $g(x) = -7$ keinen Schnittpunkt.

- 2 rechnerisch:

$x^4 = -7$ hat keine Lösung, da x^4 nicht negativ werden kann.

$$\text{Damit ist } \mathbb{L} = \{\}.$$

VERSTÄNDNIS

- Beschreibe, wie man eine Gleichung der Form $ax^n = c$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in eine Gleichung der Form $x^n = b$ umwandeln kann.
- Begründe die drei möglichen Fälle für die Anzahl der Lösungen von Potenzgleichungen anhand der grafischen Lösungsmethode.

1 Bestimme die Lösungsmengen der Potenzgleichungen ($x \in \mathbb{R}$).

a) $x^4 = 81$ b) $x^5 = 32$ c) $x^7 = \frac{1}{128}$ d) $x^6 = 40$
 $x^4 = -81$ $x^5 = -32$ $x^7 = -\frac{1}{128}$ $x^6 = -40$

2 Löse die Potenzgleichungen.

a) $t^7 = -1$ b) $x^3 = \frac{125}{27}$ c) $p^6 = 100\,000$ d) $a^7 \cdot (-a)^2 = 512$
e) $s^3 = -\frac{27}{216}$ f) $a^5 = 0,00243$ g) $s^4 = 36$ h) $y^5 = -32^3$

3 Untersuche die Fälle, in denen eine Potenzgleichung der Form $x^n = b$ ($x \in \mathbb{R}$) mit $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{R}$ zwei Lösungen, genau eine Lösung oder keine Lösung besitzt. Vervollständige dazu die Tabelle mit der rechnerischen Lösung in deinem Heft.

| | n gerade | n ungerade |
|---------|---|---|
| $b > 0$ | $x^n = b$ $\Rightarrow \dots$ Es gibt ... Lösungen. | $x^n = b$ $\Rightarrow \dots$ Es gibt ... Lösungen. |
| $b = 0$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $b < 0$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

4 a) Gib zwei verschiedene Potenzgleichungen ($x \in \mathbb{R}$) an, die die Lösung -1 haben können.

b) Finde heraus, ob es eine Potenzgleichung $x^n = b$ mit den Lösungen -3 und 2 gibt.



5 Im Merkwissen wurden nur Potenzgleichungen betrachtet, in denen die Unbekannte x mit einem positiven natürlichen Exponenten n vorkommt. Wie bei den Wurzelfunktionen ist eine Erweiterung möglich.

Eine Gleichung der Form $x^q = b$, $q \in \mathbb{Q}^+$, $b \in \mathbb{R}$ ist eine **Potenzgleichung mit positivem rationalen Exponenten**.

Die Lösung solcher Gleichungen kann mit Hilfe der bereits bekannten Strategien (rechnerisch, graphisch, durch systematisches Probieren) erfolgen.

a) Löse die Gleichungen:

1 $x^{\frac{1}{3}} = 3$ 2 $x^{\frac{2}{3}} = 8$ 3 $x^{\frac{1}{4}} = 1$
4 $x^{\frac{3}{4}} = 3 \cdot \sqrt[3]{3}$ 5 $2 \cdot x^{\frac{1}{3}} = 10$ 6 $\frac{1}{2} \cdot x^{\frac{4}{3}} = 8$

b) Finde Gleichungen mit positiven rationalen Exponenten q , die

1 genau eine 2 genau zwei 3 keine

Lösungen haben.

Betrachte dabei $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$, d. h. $q = \frac{m}{n}$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ und $\frac{m}{n} \notin \mathbb{N}$.

AUFGABEN

KAPITEL 4

Zu 4.1

1 Gib eine Zweierpotenz (eine Dreierpotenz) mit ganzzahligem Exponenten an, die

- a) zwischen 10 und 100 liegt.
- b) größer als 1000 ist.
- c) zwischen 0 und 1 liegt.
- d) zwischen 0 und 0,1 liegt.
- e) eine Quadratzahl ist.

- a) zwischen 100 und 1000 liegt.
- b) größer als 10 000 ist.
- c) zwischen 0 und 0,01 liegt.
- d) zwischen 0 und 0,001 liegt.
- e) ungerade ist.

Zu 4.2

2 Ordne die Zahlen der Reihe nach, fange mit der kleinsten an.

- a) $2^{\frac{1}{2}}$; 2^0 ; 2^{-3} ; 2^4 ; $2^{\frac{1}{3}}$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^4$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
- c) $2^{\frac{1}{3}}$; $1^{\frac{1}{3}}$; $3^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{1}{3}}$
- d) $2^{-\frac{1}{3}}$; $1^{-\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $8^{-\frac{1}{3}}$
- e) $2^{-\frac{1}{2}}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $-2^{\frac{1}{2}}$; 2^{-2}

- a) $2^{\frac{1}{2}}$; 2^0 ; $2^{-\frac{3}{5}}$; 2^{100} ; $2^{0,45}$
- b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{5}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{0,45}$
- c) $2^{\frac{3}{4}}$; $1^{\frac{3}{4}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $\frac{1}{2}^{\frac{3}{4}}$; $8^{\frac{3}{4}}$
- d) $2^{-\frac{3}{4}}$; $1^{\frac{3}{4}}$; $3^{-\frac{3}{4}}$; $\frac{1}{2}^{-\frac{3}{4}}$; $8^{-\frac{3}{4}}$
- e) $\sqrt[3]{2^4}$; $\sqrt[4]{3^2}$; $2^{-\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $4^{-\frac{2}{3}}$

3 Formuliere Vermutungen über Potenzen mit ...

gleicher Basis, wenn sich der Exponent verändert. Unterscheide zwischen Basen > 1 und zwischen 0 und 1.

gleichem Exponenten, wenn sich die Basis verändert. Unterscheide zwischen positiven und negativen Exponenten.

4 Wähle diejenigen Terme aus, die die Zahl ...

$5^{-\frac{1}{3}}$ darstellen.

$$\sqrt[3]{5} \quad -\frac{1}{125} \quad \frac{1}{5^3} \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}$$

$-\sqrt[3]{5^4}$ darstellen.

$$\frac{1}{\sqrt[4]{5^3}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} \quad -\frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} \quad \frac{1}{625^{\frac{1}{3}}} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{125}} \quad 5^{\frac{4}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{625}} \quad -\frac{3}{625} \quad \sqrt[4]{5^3} \quad \sqrt[3]{5^{-4}}$$

Zu 4.3

5 Welche Zahl ist größer? Wähle aus, ohne die Zahlen zu berechnen.

- a) $(2 \cdot 3)^4$ oder 3^5
- b) $33 \cdot 4^5$ oder 8^5
- c) $2^4 \cdot 3^2$ oder 6^4
- d) $(2^3)^4$ oder $(3^2)^2$
- e) 10^{10} oder 50^5
- f) $\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}}$ oder $\frac{1}{2^9}$

- a) $(2 \cdot 3)^{10}$ oder 3^{13}
- b) $3 \cdot 4^7$ oder 8^5
- c) $2^4 \cdot 3^2$ oder $4^2 \cdot 2^3$
- d) $(2^3)^4$ oder $(2^3 \cdot 3^2)^2$
- e) 10^{10} oder $33 \cdot 50^5$
- f) $\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{12}}$ oder $\frac{1}{2^9}$

6 Was gehört zusammen? Finde Terme, die die gleiche Zahl darstellen.

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \quad 2^8 \quad 2^{\frac{9}{2}} \quad 2^{-\frac{1}{4}} \cdot 3^{-\frac{1}{4}} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{6}} \quad \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \quad \frac{1}{(\sqrt{6})^3} \quad 2^3 \quad 6^{-\frac{3}{2}} \quad 2^{\frac{7}{2}} \quad \sqrt[3]{6} \quad 2^4 : 2^{\frac{1}{2}} \quad (2^{16})^{\frac{1}{2}} \quad 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

7 Welche Behauptung ist richtig? Begründe.

Zu 4.4

- a) Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ ist monoton steigend.
- b) Der Graph der Funktion $f(x) = x^{-1}$ geht durch den Punkt $P(5|-5)$.
- c) Der Graph der Funktion $f(x) = x^{-1}$ geht durch den Punkt $P(5|\frac{1}{5})$.
- d) Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^3$ und $g(x) = x^4$ haben mindestens zwei gemeinsame Punkte.

- a) Der Graph jeder Funktion der Form $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, ist monoton steigend.
- b) Der Graph jeder Funktion der Form $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, geht durch den Punkt $P(5|-5)$.
- c) Der Graph jeder Funktion der Form $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, geht durch den Punkt $P(5|\frac{1}{5})$.
- d) Die Graphen zweier beliebigen Potenzfunktionen mit ganzzahligem Exponenten haben mindestens zwei gemeinsame Punkte.

8 Der Graph der folgenden Funktion f wird um 5 Einheiten in x -Richtung („nach rechts“) und um -1 Einheit in y -Richtung („nach unten“) verschoben, sowie um den Faktor 2 gestreckt.

Zu 4.5

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \text{ } n \text{ gerade}$$

- a) Gib den Funktionsterm der neuen Funktion an und skizziere den zugehörigen Graphen in einem Koordinatensystem.
- b) Wähle die richtigen Behauptungen aus und begründe deine Auswahl.
 - A Der Graph der Funktion geht durch den Punkt $P(5|-1)$.
 - B Der Graph der Funktion geht durch den Punkt $Q(6|0)$.
 - C Der Graph der Funktion geht durch den Punkt $R(7|7)$.
 - D Der Graph der Funktion ist achsensymmetrisch.
 - E Der Graph der Funktion ist monoton steigend.
 - F Der Graph der Funktion geht durch den Punkt $S(7|15)$.

9 Finde eine Wurzelfunktion $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, deren Graph durch den Punkt P geht. Zu welcher Funktion g ist f die Umkehrfunktion, d. h. für welche Funktion g gilt $\bar{g} = f$?

Zu 4.6 und 4.7

- a) $P(2|\sqrt[4]{2})$
- b) $P(125|5)$
- c) $P(\frac{1}{4}|\frac{1}{2})$
- d) $P(\frac{1}{27}|\frac{1}{3})$

- a) $P(0,0016|0,2)$
- b) $P(2\sqrt{2}|\sqrt{2})$
- c) $P(10,24|3,2)$
- d) $P(\frac{27}{125}|\frac{3}{5})$

10 Berechne die x -Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g , mit $D = \mathbb{R}$.

Zu 4.8

- a) $f(x) = x^3$; $g(x) = 6x$
- b) $f(x) = x^4$; $g(x) = \frac{1}{8}x$
- c) $f(x) = 2x^6$; $g(x) = 128$
- d) $f(x) = 3x^5$; $g(x) = -96$

- a) $f(x) = x^4$; $g(x) = 6x$
- b) $f(x) = \frac{1}{8}x^5$; $g(x) = \frac{1}{27}x^2$
- c) $f(x) = 2x^6$; $g(x) = 120$
- d) $f(x) = 3x^5$; $g(x) = -\frac{3}{32}$

- 1 Stelle in wissenschaftlicher Schreibweise dar.
- $1 \mu\text{m} \approx 0,000000001 \text{ km}$
 - $1 \text{ GB} \approx 1\,000\,000\,000 \text{ B}$
 - Lichtgeschwindigkeit: $c \approx 30\,000\,000\,000 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$
 - Ruhemasse eines Protons: $m = 0,00000000000000000000000016723 \text{ mg}$
- 2 Das Schachspiel steht ganz im Zeichen der Zweierpotenzen. Ergänze hierzu mit weiteren Beispielen die Tabelle.

| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------------------|--------------------------|
| Ein Spieler hat 2 Türme. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Es gibt insgesamt 32 weiße Felder. | <input type="checkbox"/> |

Der Legende nach hat der Erfinder des Schachspiels dieses an einen indischen König verkauft, der vom Spiel fasziniert war. Er hat ihn darum gebeten, einen Wunsch zu äußern, den er als Gegenleistung für das Spiel erfüllen wollte. Der Erfinder des Spiels wollte nur Reiskörner für das Brett bekommen, ein Reiskorn für das erste Feld, zwei für das nächste Feld, vier für das übernächste, ... Für jedes Feld doppelt so viel, wie für das Feld davor. Der König dachte, dieser Wunsch sei einfach zu erfüllen und hat zugesagt. Er kam allerdings in Schwierigkeiten bei der Auszahlung...

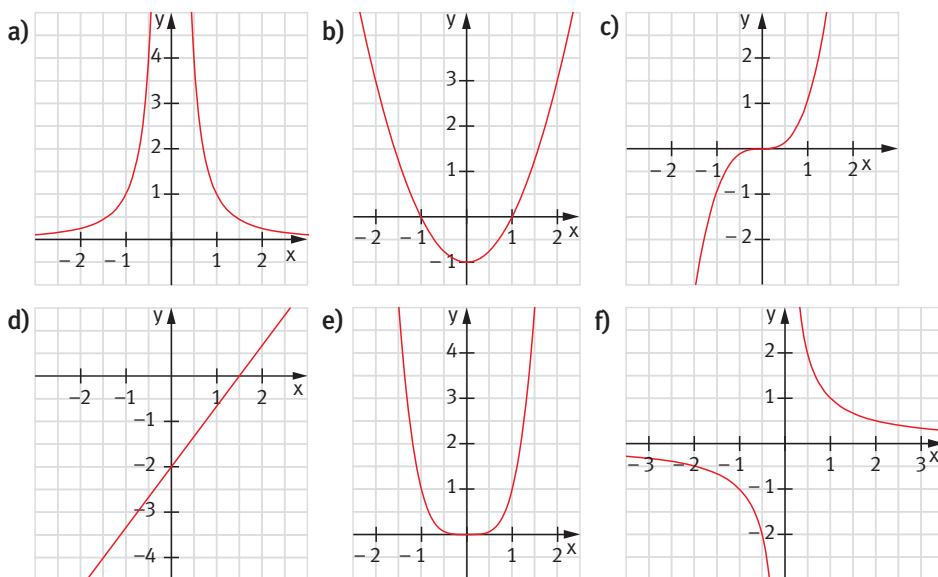



Ein Reiskorn wiegt ca. 25 mg.

- Berechne, wie viel kg Reis der König für das letzte Feld hätte auszahlen müssen. Vergleiche diesen Wert mit der aktuellen Weltproduktion an Reis.
 - Berechne, wie sich die Auszahlung verändert, wenn der Erfinder nur für jedes weiße Feld Körner verlangt und die schwarzen Felder mitschenkt.
 - Beim Brettspiel „Mühle“ spielt die Zahl 3 eine wichtige Rolle. Für wie viel kg Reis hätte es der Erfinder dieses Spiels verkaufen können, wenn er für jedes Feld dreimal so viele Reiskörner verlangt hätte, wie für das Feld davor?
- 3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^3}$.
- Gib die Definitions- und Wertemenge der Funktion an.
 - Zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem ein.
 - Zeige, dass der Graph von f punktsymmetrisch zu $O(0|0)$ ist.
- 4 Zeichne die Graphen der Funktionen und ergänze ihre Eigenschaften im Heft.

| | a) $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$ | B) $f(x) = x^{-4}$ | c) $f(x) = x^4$ | d) $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ |
|------------------------------|-----------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| Definitionsmenge | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Wertemenge | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Monotonie | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Nullstellen | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Asymptoten | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| Gleichung der Umkehrfunktion | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- 5 Bestimme jeweils eine Funktionsgleichung. Beschreibe die Funktion bezüglich Definitions- und Wertemenge, Nullstellen, Symmetrie und Monotonie.



- 6 Die größte bis heute bekannte Primzahl ist $2^{77\,232\,917} - 1$ (Stand: August 2018).
- Schätze ab, wie viele Ziffern diese Zahl im Dezimalsystem etwa hat. Wie viele DIN-A4-Blätter braucht man, wenn man die Dezimaldarstellung dieser Zahl ausdrucken möchte?
 - Primzahlen der Art $2^n - 1$ heißen Mersenne-Primzahlen. Recherchiere nach ihren Eigenschaften und nach dem Zusammenhang zwischen ihnen und den sogenannten vollkommenen Zahlen.
- 7 Eines der klassischen Probleme der Antike war die sogenannte Würfelverdopplung: Zu einem Würfel soll ein weiterer Würfel mit doppeltem Volumen konstruiert werden. Ermittle das Verhältnis der Kantenlängen bzw. der Oberflächeninhalte der beiden Würfel.
- 
- 8 Der Durchmesser eines Sauerstoffmoleküls beträgt $3 \cdot 10^{-8}$ cm.
- Wie viele Moleküle müsste man lückenlos aneinander legen, um eine Kette von 1 cm Länge zu erhalten?
 - In einem Kubikzentimeter Luft sind 28,9 Trillionen Sauerstoffmoleküle. Wie lang wäre die Kette, wenn man diese lückenlos aneinander reihen würde?
- 9 Ein Gärtner möchte 100 Blumensträuße auf dem Wochenmarkt verkaufen. Er bindet immer fünf Blumen zu einem kleinen Strauß zusammen und jeweils fünf Strauß wickelt er in Cellophan ein. Fünf solcher Bündel stellt er in einen großen Eimer.
- Wie viele solcher Eimer benötigt er?
 - Wie viele Blumen muss er schneiden?

- 10 Tina hat etwas Interessantes entdeckt: $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$.
- Finde weitere Zahlen, für die eine analoge Beziehung gilt.
 - Begründe, warum im Allgemeinen $\sqrt[3]{a\frac{b}{c}} = a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ für $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \neq 1$ nicht gilt.
 - Formuliere eine Bedingung, die erfüllt sein muss, damit die Gleichung aus Aufgabe b) gelten kann.
- 11 Welche Potenzfunktionen sind sowohl achsen- als auch punktsymmetrisch?
- 12 Legt man ein Kapital K_0 zu p % festem Jahreszins für n Jahre an, so hat man am Ende der Zinsperiode ein Kapital K_n von $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.
- Ermittle anhand der obigen Formel den Funktionsterm einer Funktion, die in Abhängigkeit vom gewählten Jahreszins angibt, auf welchen Betrag ein anfängliches Kapital von 5000 € in 5 Jahren anwächst.
 - Stelle die Funktion grafisch dar und bestimme den Schnittpunkt mit der y (Kapital)-Achse. Interpretiere diesen Wert.
 - Zeichne die Gerade mit der Gleichung $y = 10\,000$ € in das Diagramm ein. Ermittle den Schnittpunkt der beiden Graphen und interpretiere das Ergebnis.
 - Für eine Zinsperiode von 5 Jahren ist zurzeit ein Zinssatz von etwa $p = 0,5$ % in den Banken gebräuchlich. Ermittle mit Hilfe des Funktionsgraphen, auf welchen Betrag aktuell ein Kapital von 5000 € in 5 Jahren anwächst.

- 13 Welche Behauptung ist richtig?
Wähle aus und begründe deine Wahl.

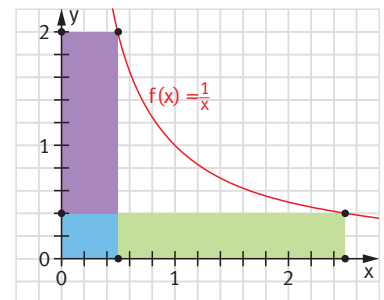
A Der Graph jeder Potenzfunktion geht durch den Punkt $P(1 | 1)$.

B Den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x+2)^3}$ kann man sich so vorstellen, dass der Graph der Funktion von $g(x) = \frac{1}{x^3}$ um zwei Einheiten nach links verschoben wurde.

C Ist für eine Potenzfunktion $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, so hat f einen negativen Exponenten.

D Jede Potenzfunktion, deren Graph symmetrisch zur y -Achse ist, hat genau eine Nullstelle.

- 14 Durch jeden Punkt einer Hyperbel ist ein achsenparalleles Rechteck festgelegt.
- Berechne den Flächeninhalt für vier verschiedene Punkte.
 - Formuliere eine Vermutung zur allgemeinen Berechnung des Flächeninhalts und beweise sie.



- 15 Wir haben in diesem Kapitel nur Potenzen mit rationalen Exponenten definiert, obwohl der Taschenrechner auch mit irrationalen Exponenten umgehen kann. Beispielsweise erhält man für $2^{\sqrt{2}}$ den Wert 2,665144143. Eine mögliche Erklärung dafür kann derart erfolgen:

Da $1 < \sqrt{2} < 2$ gilt, muss der Wert von $2^{\sqrt{2}}$ zwischen 2^1 und 2^2 liegen, also zwischen 2 und 4. Da aber auch $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ gilt, ist der Wert von $2^{\sqrt{2}}$ zwischen $2^{1,4}$ und $2^{1,5}$, also etwa zwischen 2,6390... und 2,8284..., usw.

- a) Setze dieses Verfahren fort und ermittle den Wert von $2^{\sqrt{2}}$ auf drei Dezimalstellen genau. Verwende dabei die folgende Tabelle.

| Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ | | Intervallschachtelung für $2^{\sqrt{2}}$ | |
|--------------------------------------|------|--|-------------------------|
| 1 | 2 | $2^1 = 2$ | $2^2 = 4$ |
| 1,4 | 1,5 | $2^{1,4} = 2,6390\dots$ | $2^{1,5} = 2,8284\dots$ |
| 1,41 | 1,42 | ■ | ■ |
| ■ | ■ | ■ | ■ |
| ■ | ■ | ■ | ■ |

- b) Verfahre analog mit $2^{\sqrt{3}}$, $3^{\sqrt{2}}$ und $3^{\sqrt{3}}$.
Überprüfe anschließend mit dem Taschenrechner.
- c) Wie soll das Verfahren geändert werden, wenn es um $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ geht?
- d) Formuliere eine mögliche Definition von Potenzen mit irrationalen Exponenten.



- 16 Gib einen möglichen Funktionsterm an. Gesucht ist eine Potenzfunktion ...

- a) fünften Grades mit Symmetriezentrum $P(1|1)$, die in y -Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gestaucht wurde.
- b) mit $f(2) = -1$, $f(4) = -1$ und $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow \infty$.
- c) mit der Symmetrieachse $x = -2$, deren eine Asymptote die y -Achse ist und für die $f(0) = \frac{1}{16}$ gilt.
- d) mit den Asymptoten $x = 3$ und $y = 2$, sowie mit $f(2) = 1$ und $f(4) = 3$.

GESCHICHTE

Das Sierpinski-Dreieck

Das Sierpinski-Dreieck ist ein Gebilde, das iterativ (schrittweise sich wiederholend) entsteht: Aus einem gleichseitigen Dreieck wird zuerst das Mittendreieck entfernt. Mit den restlichen drei Dreiecken wird genauso vorgegangen, das Mittendreieck wird jeweils entfernt, usw. Interessant ist, wie sich dabei Flächeninhalt und Umfang verändern: Der Flächeninhalt wird nach jedem Schritt kleiner, der Umfang größer.



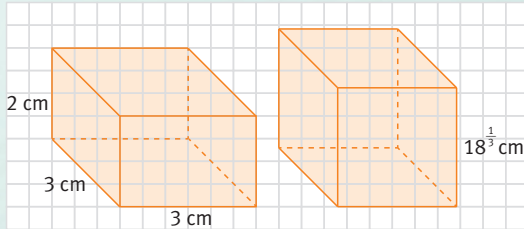
- Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang des Sierpinski-Dreiecks nach 1, 2, 3, 4, ... Schritten in Bezug auf das Ausgangsdreieck mit Seitenlänge a . Fertige dazu eine Tabelle an.
- Wie groß wird der Flächeninhalt bzw. der Umfang des Sierpinski-Dreiecks, wenn man den Vorgang unendlich lang fortsetzt?
- Recherchiere nach weiteren, ähnlichen mathematischen Gebilden.

Das Heron-Verfahren für Kubikwurzeln $\sqrt[3]{x}$

Dieses Verfahren liefert nicht nur eine Näherung für Quadratwurzeln. Die Methode kann auch auf Kubikwurzeln übertragen werden.

Beispiel: Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt[3]{18}$.

Idee



Ein Quader mit quadratischer Grundfläche und dem Volumen von 18 cm^3 wird schrittweise in einen volumengleichen Würfel umgewandelt. Die Kantenlänge des Würfels ist der gesuchte Kubikwurzelwert. Das Verfahren hat den Vorteil, dass zu jeder Kubikwurzel $\sqrt[3]{n}$ ein solcher Quader mit quadratischer Grundfläche gefunden werden kann. Im einfachsten Fall hat er die Maße $1 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} \cdot n \text{ cm}$. Im Beispiel starten wir mit $3 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}$.

Ablauf

Wandle den Ausgangsquader in einen volumengleichen Quader – ebenfalls mit quadratischer Grundfläche – um, indem du als neue Kantenlänge der Grundfläche das arithmetische Mittel aus den drei bisherigen Kantenlängen verwendest. Die Höhe des Quaders ergibt sich dann, indem du das Volumen durch den Flächeninhalt der neuen Grundfläche teilst.

1

$a_{\text{alt}} = 3 \text{ cm}$
 $b_{\text{alt}} = 2 \text{ cm}$
 $a_{\text{neu}} = \frac{3+3+2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67 \text{ cm}$
 $b_{\text{neu}} = \frac{18}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{162}{64} \approx 2,53 \text{ cm}$

2

$a_{\text{alt}} = 2,67 \text{ cm}$
 $b_{\text{alt}} = 2,53 \text{ cm}$
 $a_{\text{neu}} = \frac{2,67+2,67+2,53}{3} = \frac{755}{288} \approx 2,6215 \text{ cm}$
 $b_{\text{neu}} = \frac{18}{\left(\frac{755}{288}\right)^2} = \frac{1\,492\,992}{570\,025} \approx 2,6197 \text{ cm}$

3 ...
Bereits nach dem zweiten Schritt kennen wir $\sqrt[3]{18}$ auf eine Nachkommastelle genau.

Bestimme einen Näherungswert für folgende Kubikwurzeln mit Hilfe des Heron-Verfahrens auf zwei Nachkommastellen genau.

- ① $\sqrt[3]{32}$ ② $\sqrt[3]{12}$ ③ $\sqrt[3]{3}$ ④ $\sqrt[3]{10}$

Das Heron-Verfahren mit dem Computer $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{x}$

Auch bei der Näherung von Kubikwurzeln werden beim Heron-Verfahren stets dieselben Rechenschritte wiederholt. Diese heißen in der Informatik Iterationsschritte. Dabei wird im „nullten“ Schritt ein nichtnegativer Startwert a_0 (Kantenlänge der Grundfläche) gewählt und hieraus der Startwert der Höhe b_0 bestimmt. Anschließend wird im ersten Iterationsschritt aus den drei Kantenlängen das arithmetische Mittel gebildet und dieser Wert als neue Kantenlänge der Grundfläche gewählt. Die neue Höhe berechnet sich als Quotient aus dem gegebenen Volumen und dem neuen Grundflächeninhalt. Diesen Schritt kann man beliebig oft wiederholen und somit eine beliebige Genauigkeit erreichen. In der Praxis genügen oft 10-12 Iterationsschritte.

| | Beispiel: $\sqrt[3]{18}$ | allgemein: $\sqrt[3]{n}$ |
|------------|---|--|
| 0. Schritt | $a_0 = 3$ $b_0 = \frac{18}{3^2} = 2$ | $a_0 > 0$ $b_0 = \frac{n}{a_0^2}$ |
| 1. Schritt | $a_1 = \frac{3+3+2}{3} = \frac{8}{3}$ $b_1 = \frac{18}{\left(\frac{8}{3}\right)^2}$ | $a_1 = \frac{a_0 + a_0 + b_0}{3}$ $b_1 = \frac{n}{(a_1)^2}$ |
| 2. Schritt | $a_2 = \frac{\frac{8}{3} + \frac{8}{3} + \frac{162}{64}}{3}$ $b_2 = \frac{18}{\left(\frac{755}{288}\right)^2}$ | $a_2 = \frac{a_1 + a_1 + b_1}{3}$ $b_2 = \frac{n}{(a_2)^2}$ |
| ... | | |

Die Iterationsschritte kann man gut mit einem Tabellenkalkulationsprogramm durchführen.

| | A | B | C | D |
|----|---------------------------------------|-------------------|-------------|------------------|
| 1 | Heronverfahren | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | Berechnung der Kubikwurzel aus | | | 18 |
| 4 | | | | |
| 5 | Schritt | Grundkante | Höhe | Kontrolle |
| 6 | 0 | 3 | 2 | 18 |
| 7 | 1 | 2,66666667 | 2,53125 | 18 |
| 8 | 2 | 2,62152778 | 2,61916933 | 18 |
| 9 | 3 | 2,62074163 | 2,62074092 | 18 |
| 10 | 4 | 2,62074139 | 2,62074139 | 18 |
| 11 | 5 | 2,62074139 | 2,62074139 | 18 |
| 12 | 6 | 2,62074139 | 2,62074139 | 18 |
| 13 | 7 | 2,62074139 | 2,62074139 | 18 |

- a) Beschreibe den Aufbau und die Einträge des Tabellenblatts.
- b) Übertrage das Tabellenblatt und berechne damit $\sqrt[3]{100}$ und $\sqrt[3]{2}$ auf 4 Dezimalstellen genau.

Verallgemeinerung des Heron-Verfahrens – Berechnung der 5. Wurzel $\sqrt[5]{x}$ $\sqrt[5]{x}$

Das Heron-Verfahren kann man weiter verallgemeinern und mit dessen Hilfe beliebige Wurzelwerte $\sqrt[k]{n}$ annähern. Für $k > 3$ sind die Schritte allerdings nicht mehr geometrisch darstellbar. Wir erläutern am Beispiel $\sqrt[5]{16}$ die Methode:

0. Schritt: Wahl eines beliebigen nichtnegativen Startwerts $a_0 = 2$.
Bestimmung der abhängigen Größe b_0 , indem n durch a_0^{k-1} geteilt wird.

$$b_0 = \frac{16}{2^4} = 1$$

Somit gilt: $1 < \sqrt[5]{16} < 2$.

1. Schritt: Bildung des arithmetischen Mittels aus $(k-1) \cdot a_0$ und b_0

$$a_1 = \frac{2+2+2+2+1}{5} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Bestimmung der neuen abhängigen Größe

$$b_1 = \frac{16}{\left(\frac{9}{5}\right)^4} = \frac{10\,000}{65\,61} \approx 1,5242$$

Daraus folgt: $1,5242 < \sqrt[5]{16} < 1,8$.

2. und jeder weiterer Schritt: Anwendung des 1. Schrittes auf das Ergebnis des je vorangegangenen Schrittes.

| | A | B | C | D |
|----|---|-------------------|-------------|------------------|
| 1 | Verallgemeinerung Heronverfahren | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | Berechnung der 5. Wurzel aus | | | 16 |
| 4 | | | | |
| 5 | Schritt | Grundkante | Höhe | Kontrolle |
| 6 | 0 | 2 | 1 | 16 |
| 7 | 1 | 1,800000000 | 1,524157903 | 16 |
| 8 | 2 | 1,744831581 | 1,726258898 | 16 |
| 9 | 3 | 1,741117044 | 1,741037459 | 16 |
| 10 | 4 | 1,741101127 | 1,741101125 | 16 |
| 11 | 5 | 1,741101127 | 1,741101127 | 16 |
| 12 | 6 | 1,741101127 | 1,741101127 | 16 |

- a) Beschreibe, wie die Einträge des Tabellenblatts gegenüber der Annäherung von Kubikwurzeln geändert werden müssen.
- b) Übertrage das Tabellenblatt und berechne damit $\sqrt[5]{100}$, $\sqrt[5]{81}$, $\sqrt[6]{1000}$ und $\sqrt[10]{250}$ auf 5 Dezimalstellen genau.

- c) Welchen Einfluss hat der Startwert a_0 auf das Verfahren? Führe Annäherungen mit einem jeweils unterschiedlichen Startwert für $\sqrt[5]{100}$ durch und formuliere Vermutungen.



Intervallhalbierung für Kubikwurzeln und für höhere Wurzeln

Auch die Intervallhalbierung lässt sich auf Kubikwurzeln und Wurzeln höheren Grades übertragen.

Beispiel: Bestimme einen Näherungswert für $\sqrt[3]{18}$.

Idee

Die dritte Potenz von $\sqrt[3]{18}$ beträgt 18. Man sucht zunächst einen Wert, dessen dritte Potenz kleiner, und einen anderen Wert, dessen dritte Potenz größer als 18 ist. $\sqrt[3]{18}$ liegt zwischen diesen beiden Werten. Da $2^3 = 8$ kleiner als 18 und $3^3 = 27$ größer als 18 ist, liegt $\sqrt[3]{18}$ zwischen 2 und 3.

Im nächsten Schritt wird das Intervall halbiert:

$$\frac{2+3}{2} = 2,5. \text{ Die dritte Potenz dieses Wertes beträgt:}$$

$2,5^3 = 15,625$. Da dieser Wert kleiner als 18 ist, muss $\sqrt[3]{18}$ zwischen 2,5 und 3 liegen. Die Halbierung kann nun beliebig oft fortgesetzt und damit der Wert für $\sqrt[3]{18}$ beliebig angenähert werden.

| | A | B | C | D | E |
|----|---------------------------------------|----------------|--------------------|------------------------|------------------------------------|
| 1 | Intervallhalbierung | | | | |
| 2 | | | | | |
| 3 | Berechnung der Kubikwurzel aus | | | 18,000000000 | |
| 4 | | | | | |
| | | unterer | oberer Wert | Intervallhälfte | Intervallhälfte³ |
| 5 | Schritt | Wert | Wert | Wert | Wert |
| 6 | 0 | 2 | 3 | 2,5 | 15,625 |
| 7 | 1 | 2,500000000 | 3,000000000 | 2,75 | 20,796875 |
| 8 | 2 | 2,500000000 | 2,750000000 | 2,625 | 18,08789063 |
| 9 | 3 | 2,500000000 | 2,625000000 | 2,5625 | 16,82641602 |
| 10 | 4 | 2,562500000 | 2,625000000 | 2,59375 | 17,44955444 |
| 11 | 5 | 2,593750000 | 2,625000000 | 2,609375 | 17,76681137 |
| 12 | 6 | 2,609375000 | 2,625000000 | 2,6171875 | 17,92687178 |
| 13 | 7 | 2,617187500 | 2,625000000 | 2,62109375 | 18,00726122 |
| 14 | 8 | 2,617187500 | 2,621093750 | 2,619140625 | 17,96703652 |
| 15 | 9 | 2,619140625 | 2,621093750 | 2,620117188 | 17,98714137 |
| 16 | 10 | 2,620117188 | 2,621093750 | 2,620605469 | 17,99719942 |

- a) Beschreibe den Aufbau und die Einträge des Tabellenblatts.
- b) Übertrage das Tabellenblatt und berechne damit $\sqrt[3]{100}$ und $\sqrt[3]{2}$ auf 3 Dezimalstellen genau.
- c) Vergleiche die Intervallhalbierung und das Heron-Verfahren für die Näherung von $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{100}$ und $\sqrt[3]{2}$. Welche Methode ist schneller? Überprüfe deine Vermutung an weiteren konkreten Beispielen.
- d) Beschreibe, wie die Einträge des Tabellenblatts gegenüber der Annäherung von Kubikwurzeln geändert werden müssen, um $\sqrt[5]{16}$ zu bestimmen. Führe eine Intervallhalbierung für $\sqrt[5]{16}$ durch.

KAPITEL 4

Überprüfe deine Fähigkeiten und Kenntnisse. Bearbeite dazu die folgenden Aufgaben und bewerte anschließend deine Lösungen mit einem Smiley.

| | | |
|---------------|--------------------|--------------------------|
| 😊 | 😐 | ☹️ |
| Das kann ich! | Das kann ich fast! | Das kann ich noch nicht! |

Hinweise zum Nacharbeiten findest du auf der folgenden Seite. Die Lösungen stehen im Anhang.

Aufgaben zur Einzelarbeit

1 Schreibe die Terme ohne Exponenten.

- a) $5^{-\frac{1}{2}}$ 5^1 5^{-1} $5^{\frac{1}{2}}$
 b) 3^{-1} $(-1)^3$ $3^{\frac{1}{3}}$ $(-\frac{1}{3})^3$

2 Was gehört zusammen?

$\sqrt[3]{a^2}$

$a^{-\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

$\sqrt{a^3}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$

$a^{-\frac{2}{3}}$

$a^{\frac{2}{3}}$

3 Übertrage die Tabelle in dein Heft und vervollständige sie.

| Basis \ Exponent | 1 | 5 | 8 | 10 |
|--------------------------|-------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| -1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $\frac{1}{8}$ | <input type="checkbox"/> |
| $\frac{1}{3}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $\sqrt[3]{10}$ |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| $\frac{2}{3}$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | $\sqrt[3]{64} = 4$ | <input type="checkbox"/> |
| $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} = 1$ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

4 Betrachte die Potenz 2^4 . Wie verändert sich der Wert der Potenz, wenn ...

- die Basis verdoppelt wird?
- der Exponent halbiert wird?
- die Basis halbiert wird?
- die Basis durch ihren Kehrwert ersetzt wird?
- der Exponent verdoppelt wird?
- der Exponent durch seine Gegenzahl ersetzt wird?

5 Welche Gleichungen sind richtig? Wähle aus.

- a) $2^3 \cdot 4^{\frac{3}{2}} = 2^9$ b) $\frac{6^{0,7}}{2^{0,7}} = 3^{0,7}$
 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$ d) $(\sqrt[3]{3})^4 \cdot 8^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-\frac{4}{3}} = 2^4$
 e) $\frac{2}{\sqrt[5]{9}} = \sqrt[5]{27}$ f) $\sqrt{\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{12}}$

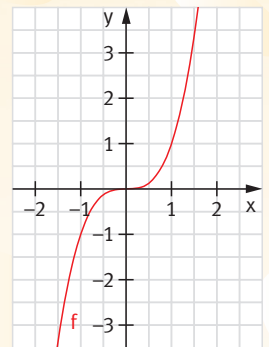
6 Betrachte folgende Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{2x^2}$ $g(x) = \frac{1}{2x}$ $h(x) = \frac{1}{2}x$
 $i(x) = \frac{1}{2}x^2$ $j(x) = \frac{1}{2}x^3$

- Wähle zwei Funktionen aus. Gib möglichst viele gemeinsame Eigenschaften an. Verfahre mit weiteren Funktionspaaren analog.
- Wähle nun drei Funktionen aus. Finde mindestens eine Eigenschaft, die alle drei Funktionen gemeinsam haben.

7 Betrachte die Funktionen $f(x) = x^3$, $g(x) = 4x$ und $h(x) = \frac{16}{x}$. Bestimme alle gemeinsamen Punkte der drei Funktionsgraphen.

8 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Potenzfunktion f. Beurteile die Aussagen.



- Der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.
- $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$
- $f(-1) = f(1)$
- Der Funktionsterm hat einen geraden Exponenten.
- $f(-2) = -f(2)$
- Der Funktionsterm hat einen rationalen, nicht ganzzahligen Exponenten.

9 Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^4}$ wurde an der x-Achse gespiegelt, in y-Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt, um 2 Einheiten in x-Richtung und um -1 Einheit in y-Richtung verschoben.

- Bestimme die Funktionsgleichung der entstandenen Funktion.
- Zeichne den Graphen der neuen Funktion und beschreibe seinen Verlauf. Verwende dabei die folgenden Begriffe:

Grenzwert

Definitionslücke

Asymptote

symmetrisch

10 Gegeben sind drei Funktionen:

$$f_1(x) = x^3 \quad f_2(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f_3(x) = \sqrt[4]{x}$$

a) Stelle die Funktionen grafisch dar.

b) Ordne die Eigenschaften zu:

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 0$$

$$f(x) \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow 0$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow \infty$$

$$f(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow 0$$

11 Beschreibe den Verlauf des Graphen folgender Funktionen, ohne sie darzustellen. Überprüfe mit einem Computerprogramm.

a) $a(x) = -x^3$

b) $b(x) = x^{\frac{1}{3}}$

c) $c(x) = x^{-3}$

d) $d(x) = x^{-2}$

12 Bei sozialen Medien ist es heutzutage üblich, den Bekanntheitsgrad zwischen zwei Personen zu bestimmen. Personen, die man als Freunde angibt, sind Bekannte ersten Grades. Personen, die die Bekannten ersten Grades kennen, aber die Person selbst nicht, sind Bekannte zweiten Grades, usw.

a) Nehmen wir an, du hast 20 Bekannte ersten Grades und jeder von ihnen weitere 20, die du nicht kennst, usw. Wie viele Bekannte fünften Grades hast du? Berechne.

b) Wie viele Bekannte höchstens fünften Grades hast du? Vergleiche diese Zahl mit der aktuellen Erdbevölkerung.

c) Wie ändert sich die Zahl der Bekannten von höchstens fünftem Grad, wenn jeder 30 Bekannte hat?

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

- 1 Bearbeite die folgenden Aufgaben alleine.
- 2 Suche dir einen Partner und erkläre ihm deine Lösungen. Höre aufmerksam und gewissenhaft zu, wenn dein Partner dir seine Lösungen erklärt.
- 3 Korrigiere gegebenenfalls deine Antworten und benutze dazu eine andere Farbe.

Sind folgende Behauptungen **richtig** oder **falsch**? Begründe schriftlich.

13 Ein negatives Vorzeichen im Exponenten bedeutet den Kehrwert der entsprechenden Potenz.

14 $\frac{7}{5}$ im Exponent bezeichnet die siebte Wurzel aus der 5. Potenz der Basis.

15 Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten multipliziert werden.

16 Unter einer Wurzel darf keine Potenz mit negativem Exponent stehen.

17 $2^{\frac{3}{5}}$ ist kleiner als 2.

18 $3^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5$ ist größer als 1000.

19 Der Graph von $f(x) = x^4$ ist symmetrisch zum Ursprung.

20 Jede Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten hat genau eine Nullstelle.

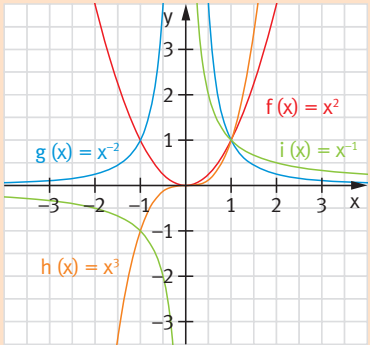
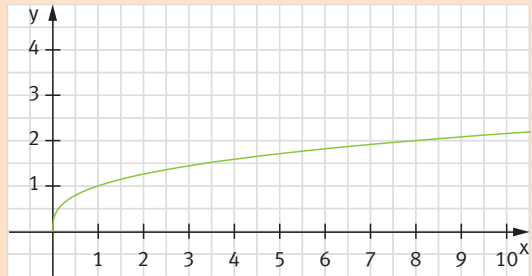
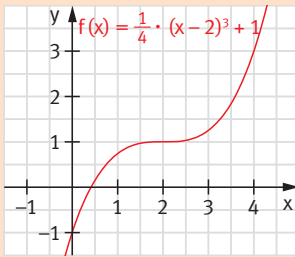
21 Der Graph von $f(x) = 3 \cdot (x + 2)^6 - 4$ hat keine Symmetrieachse.

22 Jede Potenzfunktion, deren Graph eine Asymptote hat, ist symmetrisch zum Ursprung.

23 Für $f(x) = \frac{1}{x^4}$ gilt, dass $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$.

24 Gilt für eine Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten $f(2) = f(-2)$, so ist ihr Graph symmetrisch zur y-Achse.

| Aufgabe | Ich kann ... | Hilfe |
|--------------------------------------|--|-------------|
| 1, 3, 13, 14, 16 | Potenzen mit rationalen Exponenten bestimmen. | S. 96 |
| 2, 4, 5, 15, 17, 18 | die Potenzgesetze begründen und anwenden. | S. 98 |
| 6, 7, 20 | Eigenschaften für Potenzfunktionen mit ganzzahligen sowie rationalen Exponenten angeben. | S. 102, 110 |
| 8, 9, 10, 11, 12, 19, 21, 22, 23, 24 | Potenzfunktionen grafisch darstellen und Eigenschaften der Funktionen beschreiben. | S. 106 |

| | | |
|------------------------|--|--|
| <p>S. 94 S. 96</p> | $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ $\sqrt[5]{32} = 2, \text{ da } 2^5 = 32$ $\sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{2^4} = 2^{\frac{4}{5}}$ | <p>Durch die Fortsetzung der Division einer Potenz durch ihre Basis entstehen Potenzen mit negativen Exponenten. Ist $a \neq 0$, dann gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Für $a \in \mathbb{R}$ ist $a^0 = 1$. Die n-te Wurzel ($n \in \mathbb{N}$) aus $a \geq 0$ ist diejenige nichtnegative Zahl, deren n-te Potenz gleich a ist. Es gilt $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Steht die m-te Potenz ($m \in \mathbb{Z}$) von $a \geq 0$ unter der n-ten Wurzel ($n \in \mathbb{N}$), so gilt: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$</p> |
| <p>S. 98</p> | $2^5 \cdot 2^4 = 2^9 \qquad 3^4 \cdot 2^4 = 6^4$ $\frac{1}{2} = \frac{16}{32} = \frac{2^4}{2^5} = 2^{-1} \qquad \frac{2^4}{5^4} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$ $(2^3)^4 = 2^{12}$ | <p>Ist $a \geq 0$ und $b > 0$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Q}$, so gelten folgende Potenzgesetze:</p> $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ |
| <p>S. 102</p> |  | <p>Eine Funktion der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ heißt Potenzfunktion mit ganzzahligem Exponenten. Der Graph der Funktion ...</p> <ul style="list-style-type: none"> • verläuft durch $(1 1)$. • verläuft durch $(-1 1)$ und ist symmetrisch zur y-Achse, wenn n gerade ist. • verläuft durch $Q(-1 -1)$ und ist symmetrisch zum Ursprung, wenn n ungerade ist. • hat sowohl die x-Achse als auch die y-Achse als Asymptote, wenn n negativ ist. <p>Der Grenzwert einer Funktion ist derjenige Wert, dem sich die Funktionswerte annähern, wenn die x-Werte gegen $+\infty$, $-\infty$ oder einen bestimmten Wert x_0 streben.</p> |
| <p>S. 110</p> |  | <p>Eine Potenzfunktion der Form $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ heißt Wurzelfunktion. Der Graph der Funktion geht durch die Punkte $P(0 0)$ und $Q(1 1)$ und ist monoton steigend. Es gilt: $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Die Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen der Form $f(x) = x^n$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$.</p> |
| <p>S. 106</p> |  | <p>Die Funktionsterme von Potenzfunktionen f kann man auf verschiedene Art und Weise verändern: $f(x) = a \cdot (x - d)^n + c$.</p> |

Terme

1 Entscheide, für welche rationalen Zahlen der Term definiert ist.

a) $\frac{5}{2-x}$ b) $\frac{4}{7+x}$ c) $\frac{5x}{(x+1)}$ d) $\frac{x}{x^2+1}$

2 Gegeben ist der Term $\frac{a^2}{(a+1)^2}$.

- a) Bestimme den Wert des Terms für $a = 2$.
 b) Der Term hat den Wert $\frac{25}{36}$. Berechne a .
 c) Begründe, dass der Term nie den Wert $-\frac{1}{4}$ annehmen kann.

3 Ordne die Dominosteine so, dass gleichwertige Terme nebeneinander stehen. Es ergibt sich ein Lösungswort. Wie lautet es?

| | | | | | |
|---|--------------------|--------------|---|-----------------------------------|------|
| E | $y^{-1} \cdot x^2$ | $2x \cdot y$ | E | $\frac{x}{y} \cdot \frac{y^3}{x}$ | Ende |
|---|--------------------|--------------|---|-----------------------------------|------|

| | | | | | |
|---|-----------|---------------|---|-------|---------------|
| T | $xy + xy$ | $\frac{y}{x}$ | G | Start | $x^2 \cdot y$ |
|---|-----------|---------------|---|-------|---------------|

| | | | | | |
|---|---------------------|-----------------|---|-------------------|------------|
| O | $x \cdot y \cdot x$ | $\frac{x^2}{y}$ | H | $xy \cdot x^{-2}$ | $xy^2 : x$ |
|---|---------------------|-----------------|---|-------------------|------------|

4 Die Gleichung $y = \frac{a \cdot x}{b+c}$ wurde umgeformt. Erkläre, welche Umformungen richtig sind.

- 1 $a = \frac{y \cdot (b+c)}{x}$ 2 $x = \frac{y}{a} \cdot b + c$
 3 $b = \frac{y}{a \cdot x} - c$ 4 $c = \frac{a \cdot x}{y} - b$

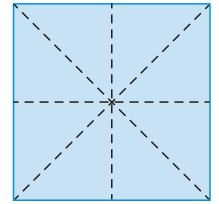
5 Löse die Klammern auf und vereinfache so weit wie möglich.

- a) $2 - (-5 + a) \cdot (c + d)$
 b) $(x - y) \cdot (y + x^2)$
 c) $-5c - (4c - 9)$
 d) $(t - s)^2 - (s + t)^2$
 e) $-(3x^2 - 7x) + (5x - 8x^2 + 4)$

6 Die Seitenlängen eines Rechtecks unterscheiden sich um 8 cm. Verkürzt man die längere Seite um 5 cm, so ist der Flächeninhalt des neuen Rechtecks um 25 cm^2 kleiner als der des ursprünglichen Rechtecks. Bestimme die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks.

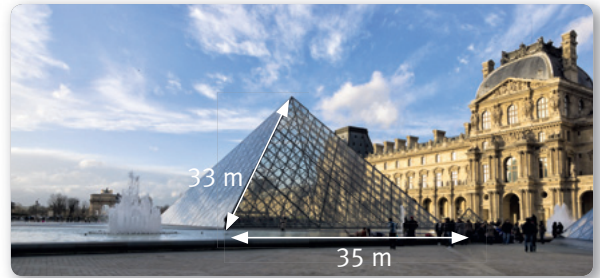
Ähnlichkeit

7 Falte ein quadratisches Blatt Papier wie in der Abbildung.



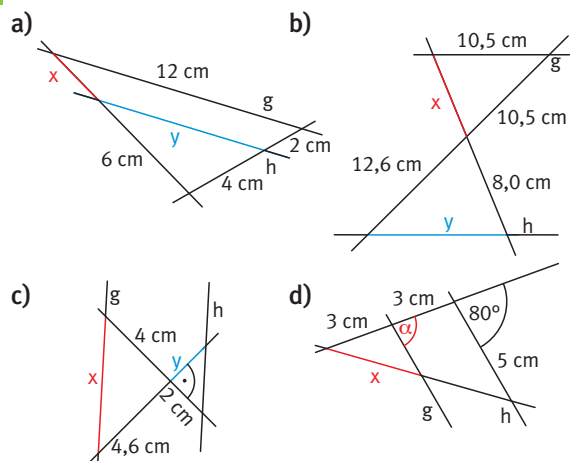
- a) Markiere zwei Dreiecke, die zueinander ähnlich, aber nicht kongruent sind.
 b) Färbe in den markierten Figuren aus a) gleiche Winkel in derselben Farbe.
 c) Begründe die Gleichheit der Winkel.

8 Von der quadratischen Pyramide am Louvre in Paris soll ein Modell aus Holz im Maßstab 1 : 150 gebaut werden.



- a) Gib die Seitenlängen des Modells an.
 b) Für die Mantelfläche im Modell wird eine Größe von 871 cm^2 ermittelt. Wie groß ist die Glasoberfläche der Originalpyramide?
 c) Die Originalpyramide hat ein Innenvolumen von rund 8900 m^3 . Bestätige diesen Wert. Wie schwer ist das Modell, wenn 1 cm^3 Holz $0,5 \text{ g}$ wiegt?

9 Bestimme die Maße der markierten Teile (g || h).

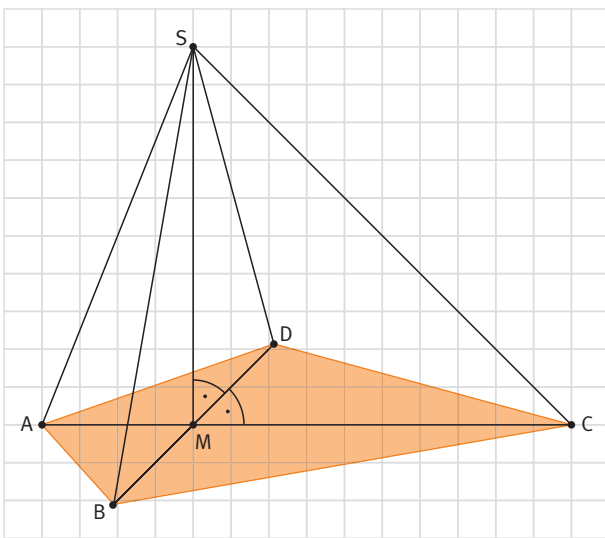




Schrägbilder

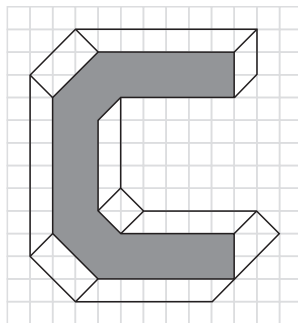
6 Konstruiere das Schrägbild eines 7 cm hohen Quaders ABCDEFGH ($q = 0,5$; $\omega = 60^\circ$). Für die Seiten der Grundfläche ABCD gilt: $\overline{AB} = 5$ cm und $\overline{BC} = 4$ cm. Die Punkte A und C liegen auf der Schrägbildachse.

7 Zeichne die Grundfläche ABCD des Schrägbilds in wahrer Größe in dein Heft und bestimme anschließend deren Flächeninhalt. Im Schrägbild gilt: $q = 0,5$; $\omega = 45^\circ$.



8 Das gleichseitige Dreieck ABC mit der Seitenlänge 7 cm ist Grundfläche einer Pyramide ABCS. Die Strecke \overline{CS} steht senkrecht auf ABC mit $\overline{CS} = 8$ cm. Zeichne das Schrägbild der Pyramide mit $q = 0,5$; $\omega = 45^\circ$ und der Schrägbildachse AC.

9 Tim hat ein Schrägbild des Buchstabens „C“ erstellt. Erkläre, welcher Fehler Tim unterlaufen ist, und zeichne das Schrägbild richtig in dein Heft.



Brüche

14 Ordne die Terme nach der Größe ihrer Ergebnisse.

- a) 1 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$ 3 $\frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3}$
 4 $\frac{6}{7} - \frac{2}{7}$ 5 $\frac{3}{4} + \frac{1}{8}$
- b) 1 $1,25 - 0,8$ 2 $0,1 \cdot 10$ 3 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
 4 $0,4 : \frac{1}{2}$ 5 $\frac{1}{3} \cdot 0,1$

15

- | | |
|--|-----------------------------------|
| A $\frac{1}{5}$ von $\frac{1}{7}$ | 1 $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ |
| B $\frac{1}{5}$ vermehrt um $\frac{1}{7}$ | 2 $\frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ |
| C $\frac{1}{5}$ vermindert um $\frac{1}{7}$ | 3 $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$ |
| D Wie oft passt $\frac{1}{7}$ in $\frac{1}{5}$? | 4 $\frac{1}{5} : \frac{1}{7}$ |

- a) Welche Aufgabe gehört zu welcher Beschreibung? Ordne zu.
 b) Berechne zu jeder Aufgabe das Ergebnis.

16 Gib das Verhältnis an, in dem die Volumina der Körper zueinander stehen.

a) b)

$\frac{V_2}{V_1} = \square$ $\frac{V_2}{V_1} = \square$

c) d)

$\frac{V_2}{V_1} = \square$ $\frac{V_2}{V_1} = \square$

17 Wie müsste man x verändern, sodass der Bruchterm $\frac{2 \cdot x}{3} \dots$

- a) einen doppelt so großen Wert erhält?
 b) vom Betrag denselben Wert erhält, aber niemals negativ wird?
 c) um 1 vermehrt wird?