10

mathe.delta

Mathematik für das Gymnasium

Teildruck

Der vollständige Band erscheint im Festeinband

Baden-Württemberg

C.C.BUCHNER

mathe.delta 10

Mathematik für das Gymnasium

Baden-Württemberg

C.C.Buchner

mathe.delta
Baden-Württemberg
Herausgegeben von Michael Kleine, Hans-Stefan Siller und Almut Zwölfer

mathe.delta 10 – Baden-Württemberg
Bearbeitet von Axel Goy, Christopher Kastner, Michael Kleine, Markus Ruppert, Angela Siller, Hans-Stefan Siller und Almut Zwölfer
unter Beratung von Axel Goy

Zu diesem Lehrwerk sind erhältlich:
- **Lösungsband 10** (BN 61030)
- Digitales Lehrermaterial **click & teach 10** (610301)

Weitere Materialien finden Sie unter www.ccbuchner.de.

Dieser Titel ist auch als digitale Ausgabe unter www.ccbuchner.de erhältlich.

Teildruck
1. Auflage, 1. Druck 2020
Alle Drucke dieser Auflage sind, weil untereinander unverändert, nebeneinander benutzbar.

Dieses Werk folgt der reformierten Rechtschreibung und Zeichensetzung. Ausnahmen bilden Texte, bei denen künstlerische, philologische oder lizenzrechtliche Gründe einer Änderung entgegenstehen.

An keiner Stelle im Schülerbuch dürfen Eintragungen vorgenommen werden.

Layout: tiff.any GmbH, Berlin
Satz: Wildner + Designer GmbH, Fürth
Illustrationen: Jacqueline Urban, Berlin
Umschlag: HOCHVIER GmbH & Co. KG, Bamberg

www.ccbuchner.de

ISBN der genehmigten Ausgabe: 978-3-661-**61010**-8

1 Funktionen und ihre Graphen

2 Einführung in die Differentialrechnung

3 Fortsetzung der Differentialrechnung

4 Trigonometrische Funktionen

5 Vektorrechnung und analytische Geometrie im Raum

6 Die Binomialverteilung

Startklar!

Aufgabe	Ich kann schon …	Grundwissen
1, 2	… das Distributivgesetz für Terme in beide Richtungen anwenden (d. h. ausklammern und ausmultiplizieren), auch im Kontext der binomischen Formeln.	S. 208
3, 4	… den Einfluss der Parameter bei linearen und quadratischen Funktionen sowie bei Potenz- und Exponentialfunktionen deuten.	S. 208
5, 6	… charakteristische Punkte von linearen und quadratischen Funktionen bestimmen.	S. 208

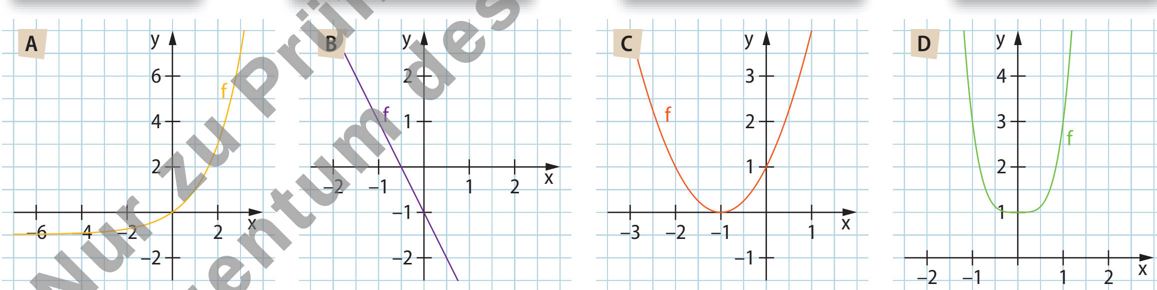
1 Multiplizieren Sie aus. Wenden Sie – wenn möglich – auch die binomischen Formeln an.
a) $(x-2)^2$ **b)** $(x-1)\cdot(x+2)$ **c)** $2\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)^2-2$ **d)** $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

2 Klammern Sie aus. Wenden Sie – wenn möglich – auch die binomischen Formeln rückwärts an.
a) x^2-6x+9 **b)** x^3-2x^2+x **c)** x^3-9x **d)** $4x^3+12x^2+9x$

3 Beschreiben Sie den Einfluss der Parameter bei den folgenden Funktionen. Vergleichen Sie dazu die angegebenen konkreten Beispiele.
a) Betrachten Sie für $f(x)=m\cdot x+c$ die Funktionsgleichungen $f_1(x)=2x-3$ und $f_2(x)=-2x+3$.
b) Betrachten Sie für $g(x)=(x+d)^2+e$ die Funktionsgleichungen $g_1(x)=(x+3)^2-2$ und $g_2(x)=(x-3)^2+2$.
c) Betrachten Sie für $h(x)=a\cdot x^n$ die Funktionsgleichungen $h_1(x)=3x^4$ und $h_2(x)=-4x^3$.
d) Betrachten Sie für $k(x)=a\cdot b^x$ die Funktionsgleichungen $k_1(x)=-2\cdot 3^x$ und $k_2(x)=3\cdot 2^{-x}$.

4 Ordnen Sie den angegebenen Funktionsgleichungen den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

1 $f(x)=2x^4+1$ **2** $f(x)=x^2+2x+1$ **3** $f(x)=x^2-(x+1)^2$ **4** $f(x)=2^x-1$



5 Berechnen Sie die Nullstellen der angegebenen Funktionen.
a) $f(x)=-3x+2$ **b)** $f(x)=x^2-2x-3$ **c)** $f(x)=x\cdot(x^3-4x)$ **d)** $f(x)=x^3+5x^2+6x$

6 Berechnen Sie durch geeignete Umformung der angegebenen Funktionen jeweils den Scheitelpunkt. Geben Sie weiter an, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist.
a) $f(x)=x^2-2x-2$ **b)** $f(x)=x^2+6x+8$ **c)** $f(x)=x\cdot(x-4)$ **d)** $f(x)=-(x+4)\cdot(x-4)$

1 Funktionen und ihre Graphen

Einstieg

Die weltweit höchste Achterbahn „Kingda Ka“ mit maximal 139 Meter steht in den USA im Six Flags Great Adventure Park in Jackson (New Jersey). Die Fahrt auf den „Drop of Doome“ ist kein Zuckerschlecken: Die Bahn beschleunigt in 3,9 Sekunden auf 206 Stundenkilometer. Dann nimmt sie den Anstieg im 90°-Winkel und fällt ebenso steil ab. Es folgt eine 270°-Spirale.

Das erste Teilstück der „Kingda Ka“ ruht auf sechs senkrechten Stützen, die in Abständen von 5 m aufgestellt sind. Es lässt sich im Koordinatensystem durch die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}001x^4 - 0{,}044x^3 + 0{,}484x^2 + 2$ beschreiben ($f(x)$: Höhe über dem Erdboden in m; Startpunkt: $x = 0$; Endpunkt: $x = 25$; 1 Längeneinheit $\cong$ 1 m).

- Skizzieren Sie den Graphen des ersten Teilstücks.
- Ermitteln Sie mithilfe einer Wertetabelle, an welchen Stellen sich der höchste bzw. der tiefste Punkt dieses Streckenabschnitts befindet, und an welcher Stelle die Bahn in diesem Streckenabschnitt das steilste Gefälle hat.
- Erläutern Sie anhand des Graphen, warum nur dieser Teilabschnitt mit dem angegebenen Funktionsterm modelliert werden kann. Gehen Sie dabei insbesondere darauf ein, wie der Graph für sehr große x weiterverlaufen würde.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels haben Sie gelernt, …

- … was man unter einer ganzrationalen Funktion versteht.
- … wie man die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion bestimmen kann.
- … welche Eigenschaften mehrfache Nullstellen haben.
- … wie man Funktionen auf Achsen- und Punktsymmetrie untersuchen kann – und wie man dies speziell bei ganzrationalen Funktionen tun kann.
- … wie sich ganzrationale Funktionen im Unendlichen verhalten können.

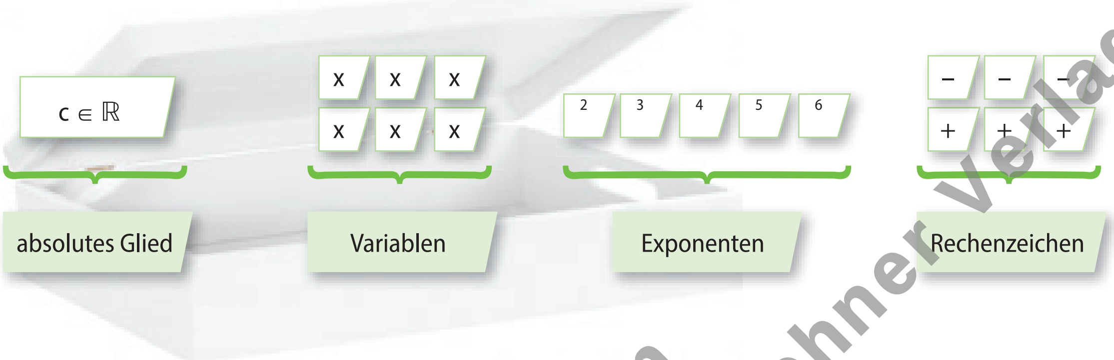
1 Rundreise

Lesen Sie sich zunächst die beiden Arbeitsaufträge durch.
Gehen Sie anschließend abwechselnd beiden Arbeitsaufträgen nach, d. h. bearbeiten Sie zuerst **Arbeitsauftrag 1** mit einem Term aus **Baukasten 1**, dann **Arbeitsauftrag 2** mit einem Term aus **Baukasten 2**. Dann können Sie den nächsten Term für Arbeitsauftrag 1 wählen, anschließend den nächsten Term bei Arbeitsauftrag 2 usw.

Input 1: *Funktionen vom Typ* $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ *nennt man* ***ganzrationale Funktionen.***

Input 2: *Der höchste Exponent n gibt den „**Grad**“ der Funktion an.*
Bsp.: Die Funktion f mit $f(x) = x^5 - 13x^3 + 1$ *hat den Grad 5.*

Termbaukasten 1



Arbeitsauftrag 1

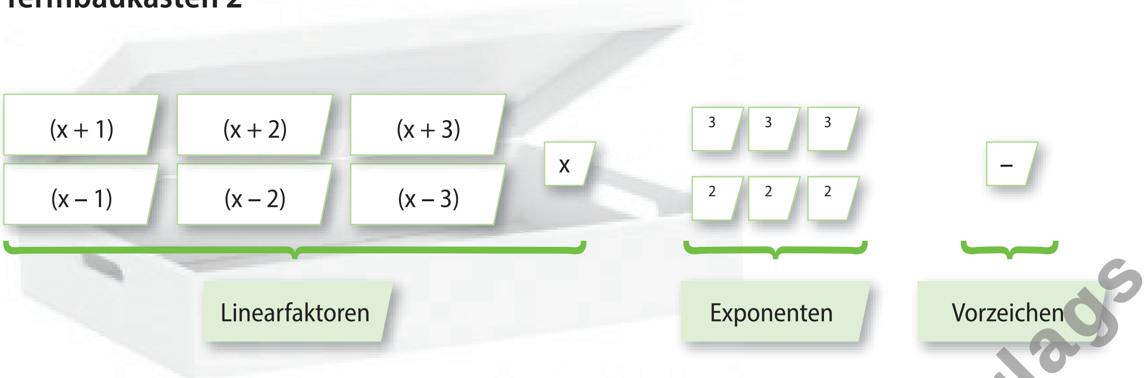
- Stellen Sie mit den ausgelegten „Materialien“ (Termbausteine, Rechenzeichen und Exponenten) Funktionsterme zusammen. Bsp.: $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.
  Gehen Sie vom Leichten zum Schweren, d. h. bauen Sie sukzessive komplexere Terme. Zur Wiederholung können Sie zum Beispiel auch bei linearen oder quadratischen Termen beginnen.
- Skizzieren Sie den zum jeweiligen Term gehörenden Graphen. Sie können dazu ein Computerprogramm verwenden. Halten Sie sowohl die Funktionsgleichung als auch wesentliche Eigenschaften des Graphen fest.
- Versuchen Sie nun, durch Mustererkennung Term und Eigenschaften der Graphen in einen begründeten Zusammenhang zu bringen. Leiten Sie dazu Gesetzmäßigkeiten ab, die Abhängigkeiten zwischen dem Aussehen des Terms und des Graphen beschreiben.

Reflexion

Je nach zu untersuchender Eigenschaft, bietet es sich an, die eine oder die andere Termdarstellung zu verwenden.

- Ordnen Sie die Begriffskärtchen den von Ihnen gebildeten Funktionstermen zu.
- Machen Sie – wenn möglich – eine Aussage über die Lage der angesprochenen Stellen.

Termbaukasten 2



Arbeitsauftrag 2

- Stellen Sie mit den ausgelegten „Materialien" (Linearfaktoren, Vorzeichen und Exponenten) Funktionsterme zusammen. Bsp.: $f(x) = -x^3(x-1)^2(x+1)$.
  Gehen Sie vom Leichten zum Schweren, d. h. bauen Sie sukzessive komplexere Terme zusammen. Zur Wiederholung können Sie zum Beispiel auch bei linearen oder quadratischen Termen beginnen.
- Skizzieren Sie den zum jeweiligen Term gehörenden Graphen. Sie können dazu ein Computerprogramm verwenden. Halten Sie sowohl die Funktionsgleichung als auch wesentliche Eigenschaften des Graphen fest.
- Versuchen Sie nun, durch Mustererkennung Term und Eigenschaften der Graphen in einen begründeten Zusammenhang zu bringen. Leiten Sie dazu Gesetzmäßigkeiten ab, die Abhängigkeiten zwischen dem Aussehen des Terms und des Graphen beschreiben.

Kap. 1.1-1.5

Zusammenhänge mithilfe der Termbaukästen erkennen

- Untersuchen Sie je drei Zusammenhänge zwischen Term und Graph mit beiden Termbaukästen. Reflektieren Sie dann, welche der beiden Darstellungen Ihnen in Bezug auf die Aufgabenstellung (d. h. auf den untersuchten Zusammenhang) mehr Informationen geliefert hat.
- Versuchen Sie so, weitere Zusammenhänge zwischen Aussehen des Terms und Aussehen des zugehörigen Graphen zu finden.

Anzahl der Nullstellen

Lage und Existenz von Nullstellen

Lage und Existenz von Hoch- und Tiefpunkten

Symmetrie

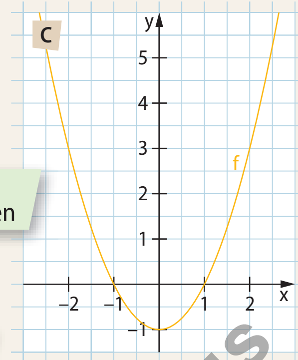
Anzahl der Hoch- und Tiefpunkte

Steigungsverhalten

Entdecken

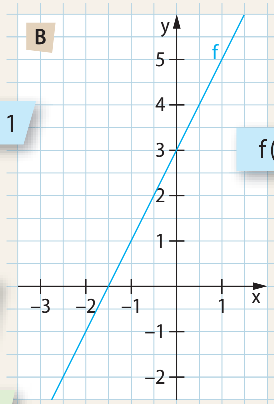
Im Folgenden finden Sie verschiedene Graphen, Funktionsgleichungen sowie Eigenschaften von Graphen.

- Ordnen Sie die einzelnen Bausteine einander zu.
  Sie dürfen Eigenschaftskärtchen auch mehrfach verwenden.



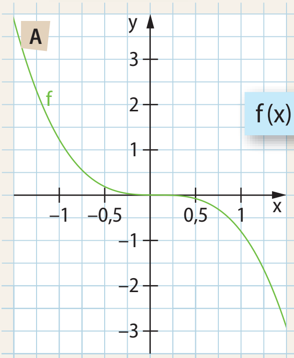
achsen-symmetrisch

punkt-symmetrisch



zwei Nullstellen

$f(x) = x^2 - 1$

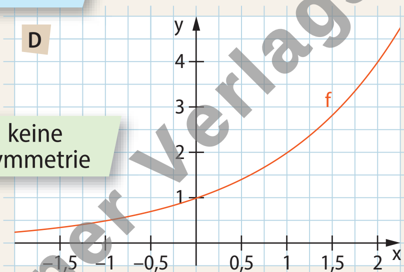


$f(x) = 2^x$

$f(x) = 2x + 3$

$f(x) = -x^3$

ein Scheitelpunkt



keine Symmetrie

genau eine Nullstelle

keine Nullstelle

Verstehen

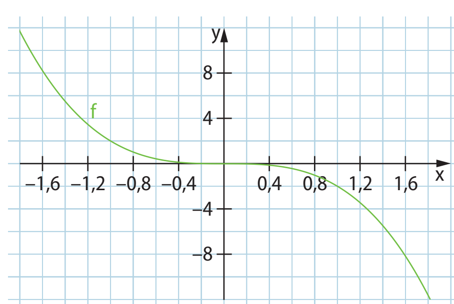
Die Graphen der verschiedenen Funktionsklassen unterscheiden sich in vielerlei Hinsicht, zum Beispiel bezüglich der Anzahl der Nullstellen und in Bezug auf Symmetrien.

Funktionsklasse	Lineare Funktionen	Quadratische Funktionen	Potenzfunktionen	Exponential-funktionen
Term	$f(x) = m \cdot x + c$; mit $c, m \in \mathbb{R}$	$f(x) = a(x-d)^2 + e$ bzw. $f(x) = ax^2 + bx + c$; mit $a \neq 0$, $b, c, d, e \in \mathbb{R}$	$f(x) = a \cdot x^k$; $k \in \mathbb{Z}$; $a \neq 0$	$f(x) = a \cdot b^x$; $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$
Anzahl der Nullstellen	max. eine	max. zwei	max. zwei	keine
Symmetrie	weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse	achsensymmetrisch zur y-Achse für $b = 0$ bzw. $d = 0$	k gerade: achsensymmetrisch zur y-Achse; k ungerade: punktsymmetrisch zum Ursprung	keine

Nullstellen sind Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse

Beispiel

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -2x^3$ und beschreiben Sie seine Eigenschaften.



Lösung:

Es handelt sich um eine Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten und negativem Vorzeichen. Deshalb verläuft der Graph von links oben nach rechts unten und ist punktsymmetrisch.
Er besitzt außerdem eine Nullstelle in $x = 0$.

- Emilia meint: „Der Graph einer Funktion kann maximal zwei Nullstellen haben." Hat sie recht? Argumentieren Sie.
- Gibt es bei Potenzfunktionen einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Nullstellen und dem Grad der Funktion, d. h. der höchsten Potenz von x? Begründen Sie.
- Der Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion wird auch Hoch- bzw. Tiefpunkt genannt. Erklären Sie die Bezeichnung. Gibt es derartige Punkte auch bei den anderen Funktionsklassen? Begründen Sie.

Nachgefragt

Aufgaben

1 Legen Sie eine Wertetabelle an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion f. Beschreiben Sie seine Eigenschaften.
a) $f(x) = -2x - 2$ **b)** $f(x) = x^2 + 1$ **c)** $f(x) = -2x^2 + x$

2 Entscheiden Sie, mit welchem der angegebenen Werkzeuge Sie die Nullstellen der vorgegebenen Funktionen am günstigsten bestimmen können. Begründen Sie.

„abc-Formel" | $f_1(x) = 2x^2 + 3x$ | $f_2(x) = x^2 + 6x + 9$ | Satz vom Nullprodukt | Ausklammern
$f_3(x) = x^2 + 5x + 6$ | $f_4(x) = x^2 + 4x + 3$ | Satz von Vieta | Binomische Formeln | $f_5(x) = 4x^2 - 9$

Satz von Vieta
$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$

Satz vom Nullprodukt
Ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich null ist.

3 Skizzieren Sie die Graphen der quadratischen Funktionen, indem Sie zunächst die Nullstellen bestimmen.
a) $f(x) = -2x^2 - 2x$ **b)** $f(x) = x^2 - x - 2$ **c)** $f(x) = -x^2 - 8x - 16$

4 Die folgende Umformung bringt eine quadratische Funktion von der Normal- auf die Scheitelpunktform.

Beispiel:
$f(x) = x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 5 = (x + 3)^2 - 4$
$\Rightarrow$ Der Scheitelpunkt liegt bei S (–3 | –4).

a) Beschreiben und begründen Sie das Vorgehen im Kasten.
b) Bringen Sie die angegebenen Funktionen ebenfalls auf Scheitelpunktform. Nutzen Sie das Beispiel als Vorlage.
1 $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **2** $f(x) = x^2 - 8x + 13$ **3** $f(x) = -x^2 + 6x + 3$

5 Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f.
a) $f(x) = -2x^2 - 2$ **b)** $f(x) = x^2 + 5x + 5$ **c)** $f(x) = -2x^2 + 6x - 6$

6 Zählen Sie die wichtigsten Eigenschaften des Graphen der Funktion f auf.
a) $f(x) = -2 \cdot (x - 1)^2$ **b)** $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)$ **c)** $f(x) = -2x^2 + 8$

7 Formulieren Sie Aussagen über die Funktionsgleichungen der Funktionen, die die angegebenen Eigenschaften haben.
a) Die Parabel ist nach oben geöffnet und hat ihre Nullstellen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = +1$.
b) Die Parabel hat ihren Scheitelpunkt bei (2 | –2).
c) Die Parabel hat keine Nullstellen, ihr Scheitelpunkt liegt bei (1 | 1).

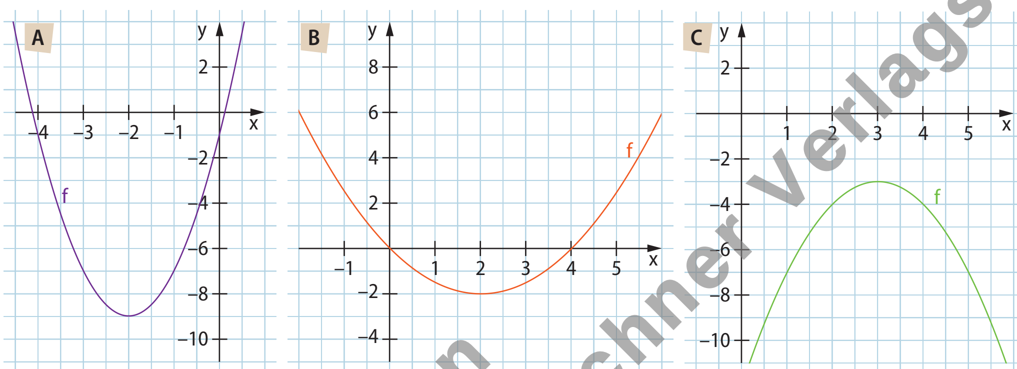
8 Leiten Sie aus der Funktionsgleichung wesentliche Eigenschaften des zugehörigen Graphen ab. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = x^2 + 7x + 12$ **b)** $f(x) = -(x + 1) \cdot (-x - 1)$ **c)** $f(x) = -3x^2 + 6x$

9 Legen Sie eine Wertetabelle an und skizzieren Sie damit den Graphen der Funktion f.

a) $f(x) = -2x^3$ **b)** $f(x) = 0{,}5x^4$ **c)** $f(x) = -\frac{2}{3}x^{-2}$

10 Ordnen Sie den Graphen jeweils eine Funktionsgleichung zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Stellen Sie für übriggebliebene Graphen jeweils eine mögliche Funktionsgleichung auf und beschreiben Sie, wie Sie dabei vorgehen.



1 $f(x) = -(3 - x)^2 - 3$ **2** $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$ **3** $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 1$

11 Untersuchen Sie die gegebenen Funktionen auf ihre wichtigsten Eigenschaften.

a) $f(x) = 2x^3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ **c)** $f(x) = -2x^{-3}$

d) $f(x) = -0{,}5x^4$ **e)** $f(x) = \frac{4}{x^4}$ **f)** $f(x) = -\frac{3}{x^{-3}}$

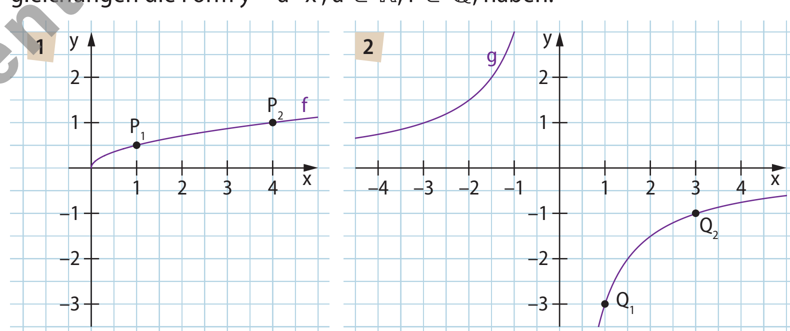
12 **a)** Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{x^2}$ für $-3 \le x \le +3$.

b) Berechnen Sie die Werte von x, für die $\frac{4}{x^2} = 9$ ist.

c) Ermitteln Sie graphisch die Werte von x, für die $\frac{4}{x^2} \le 3$ ist.

Zur Erinnerung:
Sie haben auch schon Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten kennengelernt.
$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

13 Die Abbildungen zeigen jeweils Graphen zweier Funktionen, deren zugehörige Funktionsgleichungen die Form $y = a \cdot x^r$; $a \in \mathbb{R}$; $r \in \mathbb{Q}$, haben.



1 Die Funktion f verläuft durch die Punkte P_1 und P_2.

2 Die Funktion g verläuft durch die Punkte Q_1 und Q_2.

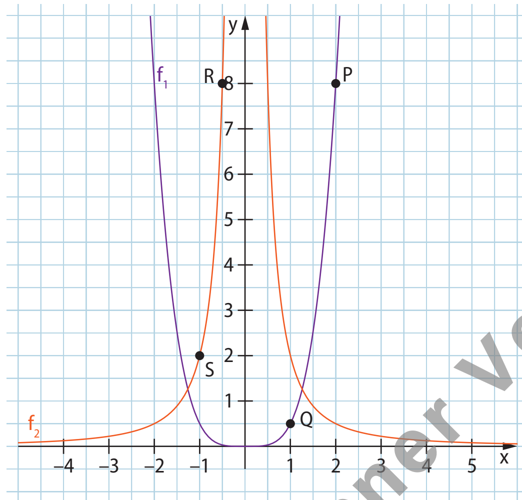
Bestimmen Sie jeweils die Parameter a und r.

14 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^{-2}$; $x \neq 0$.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.

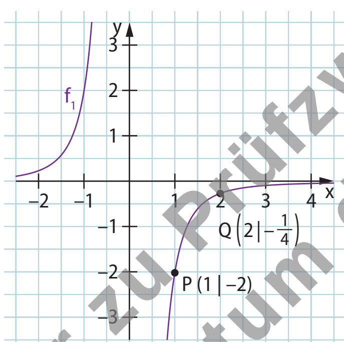
b) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent sich der Funktionswert verändert, wenn x (x > 0) verdoppelt wird.

15 Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f_1 und f_2. Ihre zugehörigen Funktionsgleichungen haben beide die Form $f_i(x) = a \cdot x^k$; $a \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}$.
Bestimmen Sie mithilfe der markierten Punkte P und Q bzw. R und S für beide Funktionen die Parameter a und k.

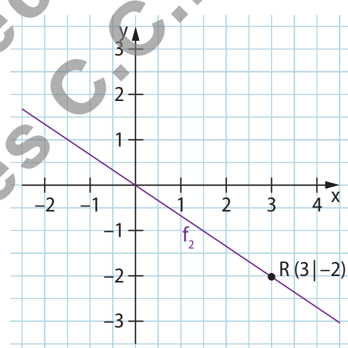


16 Die abgebildeten Graphen lassen sich durch Funktionen der Form $f_i(x) = a \cdot x^k$; $a \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}$, beschreiben. Bestimmen Sie jeweils die zugehörigen Funktionsterme mithilfe der eingezeichneten Punkte.

a)



b)



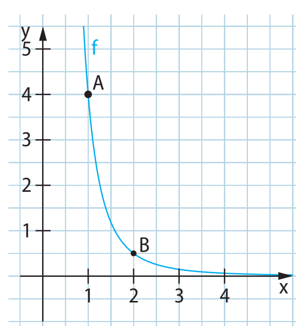
17 Nebenstehend ist für x > 0 der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^k$; $a \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}$, gezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Parameter a und k mithilfe der eingezeichneten Punkte A und B.

b) Ermitteln Sie, in welchem Punkt der Graph die Gerade …

1 $x = \frac{1}{2}$ **2** $y = \frac{1}{16}$

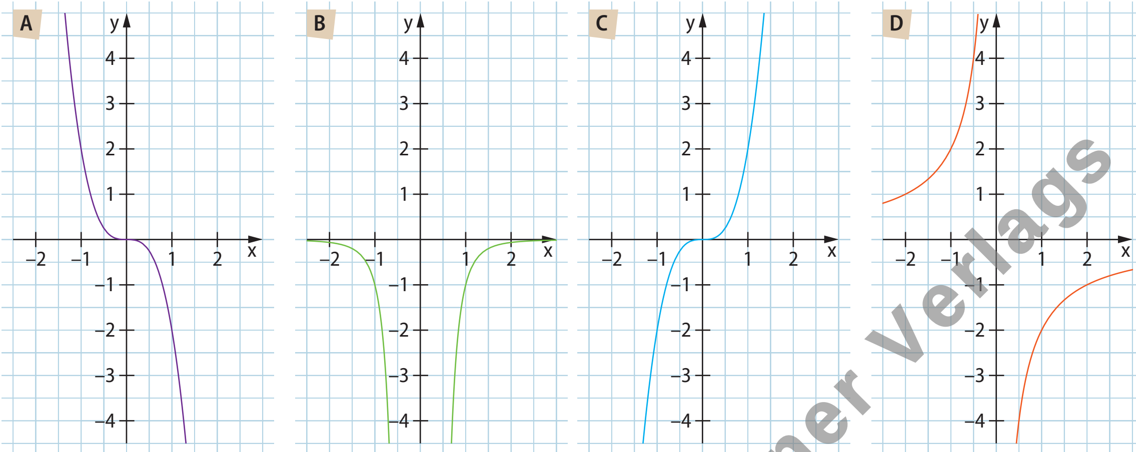
schneidet.



18 Gegeben ist der Graph einer Potenzfunktion der Form $f(x) = a \cdot x^k$; $a \in \mathbb{R}$; $k \in \mathbb{Z}$.
Beschreiben Sie, wie sich die Parameter a und k auf den Graphen der Funktion auswirken. Begründen Sie Ihre Ausführungen.

19 Die vier Abbildungen **A** bis **D** zeigen Graphen von Potenzfunktionen. Weiter sind die Gleichungen von Funktionen f und g gegeben: $f(x) = -x^{-4}$ $g(x) = 2x^3$

Ordnen Sie die Funktionen f und g einem Schaubild zu. Geben Sie für die übrigen Graphen jeweils eine mögliche Funktionsgleichung an.



20 Zählen Sie die wichtigsten Eigenschaften des Graphen der Funktion f auf.

a) $f(x) = 2^x$ **b)** $f(x) = 3^x$ **c)** $f(x) = -2 \cdot 4^x$

21 Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f, möglichst ohne eine Wertetabelle anzulegen. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

a) $f(x) = 2 \cdot 3^x$ **b)** $f(x) = 0{,}5 \cdot 3^x$ **c)** $f(x) = -2 \cdot 3^x$
d) $f(x) = 2^{-x}$ **e)** $f(x) = 0{,}5^x$ **f)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 0{,}1^x$

22 Bestimmen Sie für jede Funktion f den Schnittpunkt mit der y-Achse, die Asymptoten sowie die Wertemenge.

a) $f(x) = 0{,}5^x$ **b)** $f(x) = 2 \cdot 0{,}9^x$ **c)** $f(x) = -3 \cdot 2^x$
d) $f(x) = 3^{-x}$ **e)** $f(x) = -2 \cdot 2^x$ **f)** $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1^x + 1$

23 Entscheiden Sie, welche Graphen der angegebenen Funktionen steigen und welche fallen. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ **b)** $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$ **c)** $f(x) = -\left(\frac{4}{5}\right)^x$
d) $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ **e)** $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$ **f)** $f(x) = -\left(\frac{5}{4}\right)^x$

24 Prüfen Sie jeweils, ob der angegebene Punkt auf dem Graphen der Funktion f liegt. Geben Sie, falls der angegebene Punkt nicht auf dem Graphen liegt, einen Punkt an, der diese Eigenschaft erfüllt.

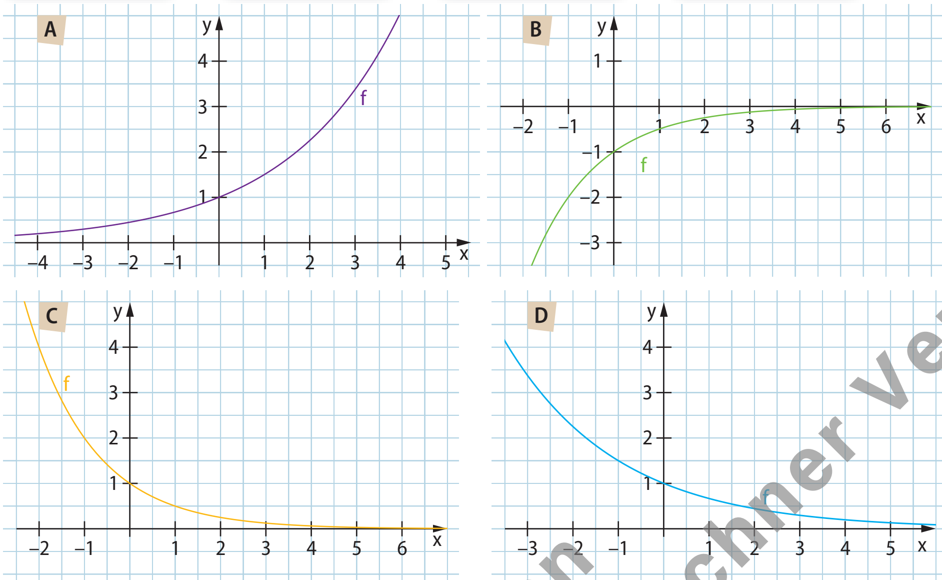
a) $f(x) = 2^x$; P (3 | 6) **b)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; P (3 | 27) **c)** $f(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$; P (2 | 6)

25 Bestimmen Sie die Gleichung einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, deren Graph durch die angegebenen Punkte verläuft.

a) P (1 | 2) und Q (2 | 8) **b)** P (0 | 2) und Q (−3 | 16) **c)** P (0 | 2) und Q (1 | 6)

26 Ordnen Sie den Graphen jeweils eine passende Funktionsgleichung zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

1 $f(x) = 0{,}5^x$ **2** $f(x) = 1{,}5^x$ **3** $f(x) = -0{,}5^x$ **4** $f(x) = 1{,}5^{-x}$



27 Gegeben sind die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = 3^x$, f_2 mit $f_2(x) = 3^{-x}$ und f_3 mit $f_3(x) = 3^{x+1}$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f_1, f_2 und f_3. Beschreiben Sie weiter, wie man die Graphen von f_2 und f_3 aus dem von f_1 erhalten kann, was also die Veränderung im Exponenten bewirkt.

b) Entwickeln Sie daraus einen allgemeinen Satz und überprüfen Sie ihn anhand dreier selbstgewählter Beispiele.

28 Im Funktionenlabor werden, wie in der Rundreise, Funktionsgleichungen systematisch verändert und die daraus resultierenden Veränderungen des Graphen beobachtet.

a) Untersuchen Sie die angegebenen Funktionen f_1 bis f_4.

1 $f_1(x) = 3^x$ $f_2(x) = 3^x + 1$ $f_3(x) = 3^x + 3$ $f_4(x) = 3^x - 1$

2 $f_1(x) = 3^x$ $f_2(x) = 2 \cdot 3^x$ $f_3(x) = -2 \cdot 3^x$ $f_4(x) = 0{,}2 \cdot 3^x$

b) Fassen Sie Ihre Beobachtungen in einem Satz zusammen und begründen Sie, warum eine bestimmte Veränderung in der Funktionsgleichung eine bestimmte Veränderung im Graphen bewirkt.

29 Laut Definition muss bei einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ die Basis $b > 0$ sowie $b \neq 1$ sein. Warum ist dies sinnvoll?
Begründen Sie anhand selbst ausgewählter Funktionen, bei denen die beiden angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind.

Entdecken

Wenn Sie die Termbausteine $(x - 1)$ und $(x + 2)$ multiplizieren und den entstandenen Term als Funktionsterm interpretieren, erhalten Sie mit $f_2(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)$ eine quadratische Funktion f_2. Ausmultipliziert hat diese Funktionsgleichung das Aussehen $f_1(x) = x^2 + x - 2$.
Nehmen Sie nun in einem ersten Schritt den Termbaustein $(x - 2)$ und in einem zweiten Schritt auch noch den Termbaustein $(x + 3)$ hinzu. Multiplizieren Sie die Terme miteinander. Sie erhalten $f_3(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$ und $f_4(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$.

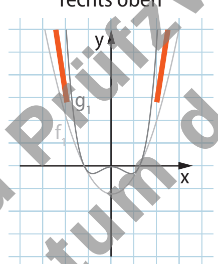
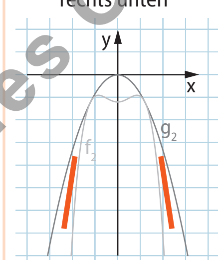
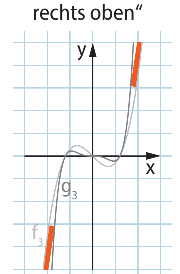
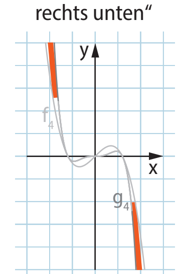
- Multiplizieren Sie die zu f_3 und f_4 gehörigen Terme jeweils aus. Was ist die höchste Potenz, in der x vorkommt?
- Zeichnen Sie jeweils den Graphen von f_2 und f_3. Beschreiben Sie ihn anschließend in Worten.
- Versehen Sie f_3 und f_4 jeweils mit einem negativen Vorzeichen. Zeichnen Sie anschließend wiederum die Graphen.
- Beschreiben Sie jeweils den Kurvenverlauf der so gewonnenen Graphen. Können Sie ein Muster erkennen?

Verstehen

Verknüpft man die Terme verschiedener Potenzfunktionen miteinander, entsteht eine neue Funktionsklasse.

Eine Funktion f der Form $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ nennt man **ganzrationale Funktion**. Die reellen Zahlen a_n $(a_n \neq 0)$, $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**. Die höchste Potenz von x bezeichnet man als den **Grad n** $(n \in \mathbb{N})$ der Funktion.

Das Verhalten für $x \to \pm\infty$ wird vom Summanden $a_n \cdot x^n$ bestimmt:

n gerade		n ungerade	
$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
„von links oben nach rechts oben"	„von links unten nach rechts unten"	„von links unten nach rechts oben"	„von links oben nach rechts unten"
			

Beispiel

Bestimmen Sie den Grad der Funktion f. Beschreiben Sie weiter das Verhalten des Funktionsgraphen für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = x^3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)$

b) $f(x) = -(x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Funktion 5. Grades. Der Graph von f verläuft wegen des positiven Vorfaktors (hier: +1) von links unten nach rechts oben.

b) Es handelt sich um eine Funktion 4. Grades. Dies erkennt man gut an der ausmultiplizierten Form $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 4$. Der Funktionsgraph verläuft wegen des negativen Vorzeichens vor dem Summanden mit dem höchsten Exponenten von x von links unten nach rechts unten.

Nachgefragt

- Kann man aus dem Verhalten im Unendlichen auf den Grad der Funktion schließen? Argumentieren Sie.
- Sind ganzrationale Funktionen, die von links oben nach rechts oben verlaufen, stets achsensymmetrisch? Untersuchen Sie.
- Sind ganzrationale Funktionen, die von links unten nach rechts oben verlaufen, stets punktsymmetrisch? Untersuchen Sie.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie, ob es sich bei der vorgegebenen Funktion f um eine ganzrationale Funktion handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grad.

a) $f(x) = 3x^3 + 2x^2$ **b)** $f(x) = x^2 + \sqrt{3}\,x - \sqrt{2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^3} + 4$
d) $f(x) = (x^3 + 2) \cdot (x^2 - 2)$ **e)** $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2x}$ **f)** $f(x) = x^{-3} + \frac{1}{x^2}$

2 Machen Sie auf Basis des Grades der Funktion f und auf Basis des relevanten Koeffizienten Aussagen über das Verhalten der Funktion im Unendlichen.

a) $f(x) = -2x^5 + x^2$ **b)** $f(x) = x^2 + 2x^3 - 4x$ **c)** $f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$
d) $f(x) = 0{,}5(x + 2) \cdot \frac{1}{2}(x - 2)$ **e)** $f(x) = -3x^3 - 4x^4 - 1$ **f)** $f(x) = -x^3 - \frac{x^5}{3}$

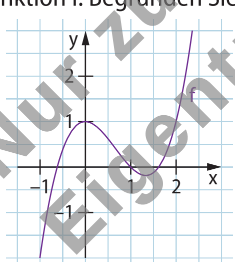
3 Richtig oder falsch? Nehmen Sie begründet Stellung zu den folgenden Aussagen.

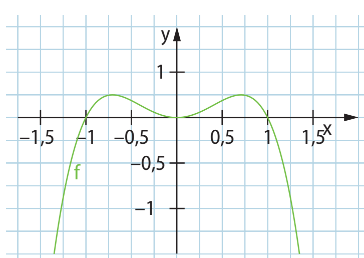
a) „Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -2x^5 + x^2$ verläuft von links unten nach rechts oben."
b) „Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -3x^3 - 4x^4 - 1$ verläuft wegen dem Vorfaktor -3 und dem Grad 3 von links oben nach rechts unten."
c) „Der Graph der Funktion f mit $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)$ ist eine Gerade und verläuft von links unten nach rechts oben."

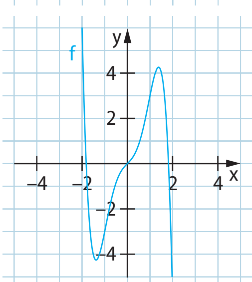
4 Bestimmen Sie möglichst viele Eigenschaften des Graphen der gegebenen Funktion f.

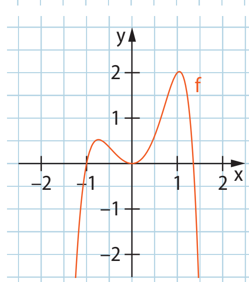
a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ **b)** $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **c)** $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$
d) $f(x) = (x - 2)^3 \cdot (-x - 1)$ **e)** $f(x) = -3 \cdot (x^3 - 2x)^2$ **f)** $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$

5 Schließen Sie vom gegebenen Graphen auf einen möglichen Grad der zugrundeliegenden Funktion f. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a)


b)


c)


d)


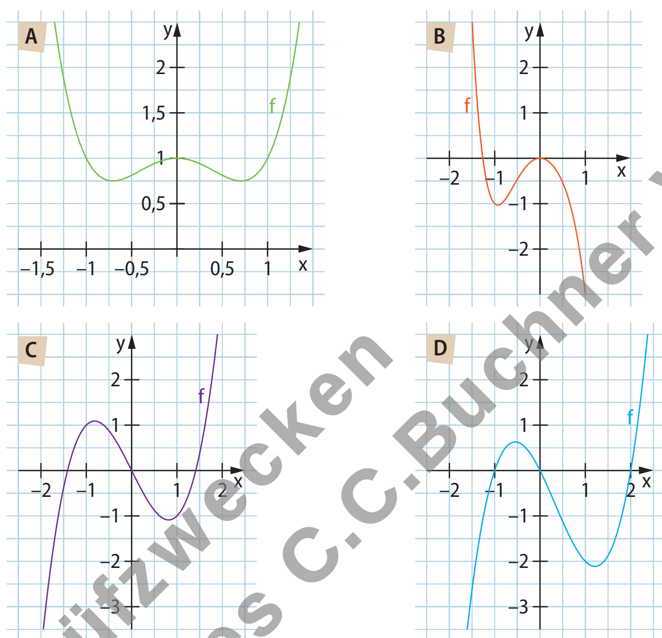
6 Geben Sie eine ganzrationale Funktion f an, die die gegebenen Bedingungen erfüllt.

a) f hat den Grad 3. Der Graph von f geht für $x \to +\infty$ gegen $-\infty$ und für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$.

b) f hat den Grad 4. Der Graph von f geht für $x \to +\infty$ gegen $-\infty$, für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und schneidet die x-Achse in $x = 0$.

c) f hat den Grad 5. Der Graph von f geht für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$, für $x \to -\infty$ gegen $-\infty$ und verläuft durch den Ursprung.

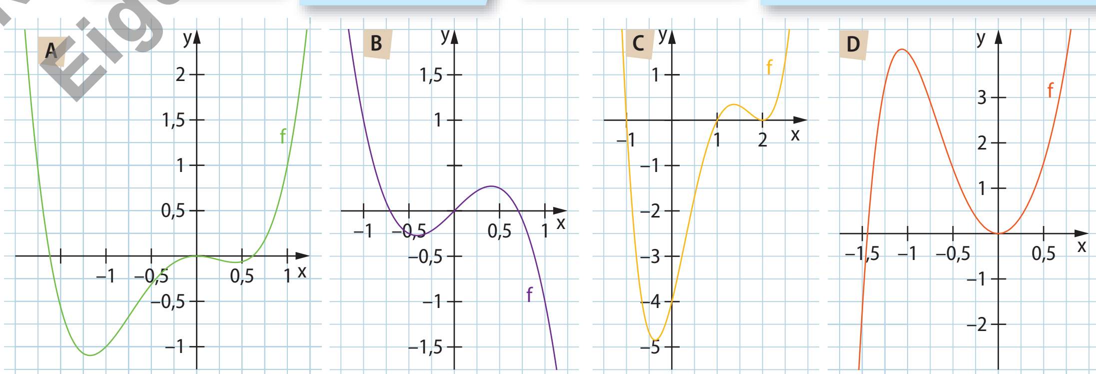
7 Ordnen Sie jedem Graphen die passende Funktionsgleichung zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung und führen Sie möglichst viele Argumente an.



1 $f(x) = x^3 - 2x$ **2** $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ **3** $f(x) = -x^5 - 2x^2$ **4** $f(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$

8 Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung den passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung und führen Sie möglichst viele Argumente an.

1 $f(x) = -2x^3 + x$ **2** $f(x) = x^5 + 3x^2$ **3** $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$ **4** $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^2$



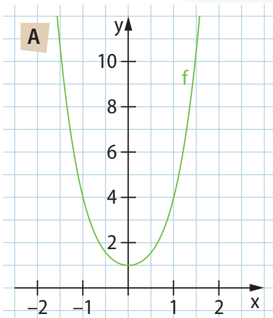
9 Gibt der gegebene Ausschnitt den Graphen einer der angegebenen Funktionen gut wieder? Argumentieren Sie.

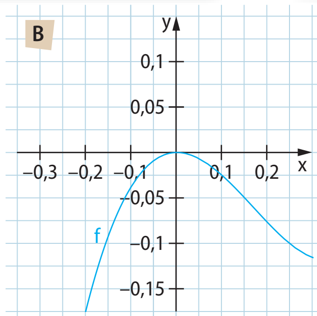
1 $f(x) = x^3 - x^2$

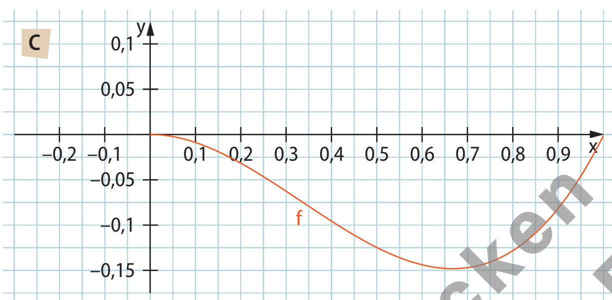
2 $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

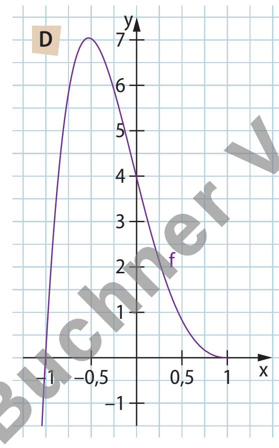
3 $f(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2$

4 $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4x + 4)$



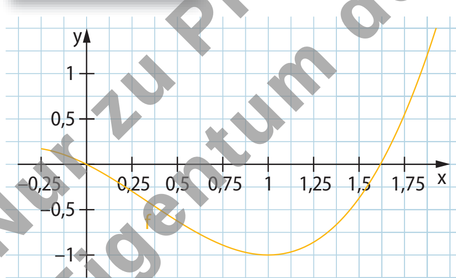




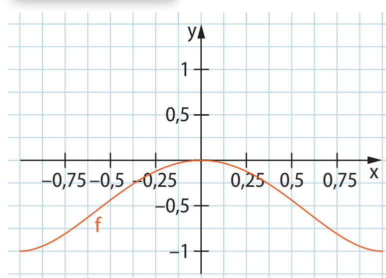


10 Abgebildet ist ein Ausschnitt des Graphen der angegebenen Funktion f. Vervollständigen Sie diesen so, dass die wesentlichen Eigenschaften des Funktionsgraphen wiedergegeben werden.

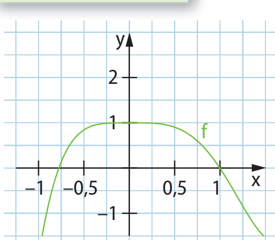
a) $f(x) = x^3 - x^2 - x$



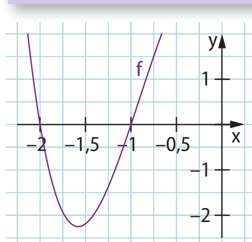
b) $f(x) = x^4 - 2x^2$



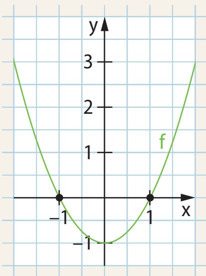
c) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 1$



d) $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$



Entdecken



f (x) = x² – 1

Nullstellen sind besondere Punkte des Graphen einer Funktion. Für quadratische Funktionen haben Sie bereits in Jahrgangsstufe 8 Verfahren und Möglichkeiten kennengelernt, um Nullstellen zu bestimmen. Nebenstehend finden Sie verschiedene Funktionsgleichungen und Verfahren zur Nullstellenbestimmung.

- Begründen Sie, welches Verfahren zur Nullstellenbestimmung Sie jeweils anwenden würden.
- Bestimmen Sie anschließend zu jedem Graphen mit dem Verfahren Ihrer Wahl die Nullstellen.
- Übertragen Sie Ihre Kenntnisse auf die Nullstellenbestimmung von $f_1(x) = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$ und $f_2(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

1 $f(x) = x^2 - 4$

Ausklammern

Ausklammern mithilfe des **Satzes von Vieta** und Anwendung des **Satzes vom Nullprodukt**

2 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3 $f(x) = x^2 - 4x + 4$

Ausklammern mithilfe der **binomischen Formeln** und Anwendung des **Satzes vom Nullprodukt**

4 $f(x) = x^2 - 4x$

5 $f(x) = x^2 - 4x + 7$

Einfaches Wurzelziehen

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

Verstehen

Zur Nullstellenbestimmung bei ganzrationalen Funktionen eines Grades größer als 2, kann man Vorgehensweisen wählen, die schon bei quadratischen Funktionen zielführend sind.

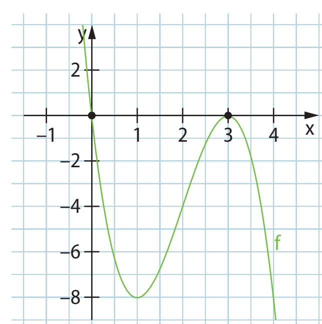
*Lässt sich eine ganzrationale Funktion in **Linearfaktordarstellung** überführen, d. h. in die Form $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot$ $\cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, kann man die Nullstellen mithilfe des Satzes vom Nullprodukt sofort ablesen.*

Um von einer Funktion f die Nullstellen zu bestimmen, löst man die Gleichung $f(x) = 0$.
Je nach Aussehen der Funktionsgleichung, bieten sich unterschiedliche Verfahren an:

Art des Funktionsterms	Verfahren, Vorgehensweise	Beispiel
Gleichungen, bei denen in jedem Summanden ein x (bzw. eine Potenz von x) auftaucht	Ausklammern erzeugt ein Produkt, von dessen Faktoren man die Nullstellen (leichter) bestimmen und auf das man den Satz vom Nullprodukt anwenden kann.	$0 = x^3 - 2x^2 - x = x \cdot (x^2 - 2x - 1)$ Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_{N1} = 0$, die anderen beiden Nullstellen erhält man aus $x^2 - 2x - 1 = 0$ mithilfe der Lösungsformel.
Gleichungen der Art $x^n - c = 0$	Umformen zu $x^n = c$ und ziehen der n-ten Wurzel	$0 = x^4 - 16 \Leftrightarrow x^4 = 16$ $\Rightarrow x_{N1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
Gleichungen, die auf binomische Formeln zurückzuführen sind	Das Distributivgesetz rückwärts anwenden und dann die Nullstelle(n) eines jeden Faktors bestimmen.	$0 = 4x^4 - 9 = (2x^2 + 3) \cdot (2x^2 - 3)$ liefert nach dem Satz vom Nullprodukt für $2x^2 - 3 = 0$ die beiden Nullstellen $x_{N1,2} = \pm\sqrt{1{,}5}$.

Beispiel

Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$ rechnerisch und graphisch.



Lösung:
$f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x \cdot (x^2 - 6x + 9) = -2x \cdot (x - 3)^2$
Nach dem Satz vom Nullprodukt erhält man als Nullstellen $x_{N1} = 0$ und $x_{N2} = 3$.

Nachgefragt

- Paul meint: „Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat genau n Nullstellen."
  Was meinen Sie dazu? Überprüfen Sie an konkreten Beispielen.
- Pauline meint: „Eine ganzrationale Funktion, deren höchste Potenz gerade ist, muss keine Nullstelle haben. Jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades muss mindestens eine Nullstelle haben." Was meinen Sie? Überprüfen Sie an konkreten Beispielen.
- Paulina meint: „Zur Nullstellenbestimmung ist mir die Darstellung $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)=0$ lieber als die Darstellung $x^3-2x^2-5x+6=0$."
  Erläutern Sie.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen der Funktion f. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

a) $f(x)=x\cdot(x^2-1)$ **b)** $f(x)=x^2+4x$ **c)** $f(x)=(x-1)\cdot(x+3)$
d) $f(x)=(x+2)^2$ **e)** $f(x)=x\cdot(x+2)^2$ **f)** $f(x)=x^2\cdot(x^2-6x+9)$

2 Bestimmen Sie jeweils die Nullstellen der ganzrationalen Funktion f.

a) $f(x)=-x^3-x^2$ **b)** $f(x)=x^2+4x+4$ **c)** $f(x)=(x^2-1)\cdot(x+3)$
d) $f(x)=(x+2)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$ **e)** $f(x)=(x^2-4)\cdot(x^2-1)$ **f)** $f(x)=x^2\cdot(x^3-6x)$

3 Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse.

a) $f(x)=3x^2-3x-2$ **b)** $f(x)=x^3-6x$ **c)** $f(x)=x^3+3x^2-2x$
d) $f(x)=x^2\cdot(x^2-4)$ **e)** $f(x)=x^3\cdot(x-1)$ **f)** $f(x)=(x^2+2x+1)\cdot(x^2-2x+1)$

4 Geben Sie zwei Funktionsgleichungen an, sodass die jeweilige Funktion die angegebenen Nullstellen hat.

a) $x_{N1}=2$; $x_{N2}=-3$ **b)** $x_{N1}=1$; $x_{N2}=2$; $x_{N3}=3$ **c)** $x_{N1}=0$; $x_{N2}=1$
d) $x_{N1}=\frac{2}{3}$; $x_{N2}=-\frac{3}{2}$ **e)** $x_{N1}=-0{,}\overline{1}$; $x_{N2}=-0{,}\overline{2}$; $x_{N3}=-0{,}\overline{3}$ **f)** $x_{N1}=\sqrt{2}$; $x_{N2}=\sqrt[3]{2}$

5 Lösen Sie folgende Gleichungen graphisch und rechnerisch. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

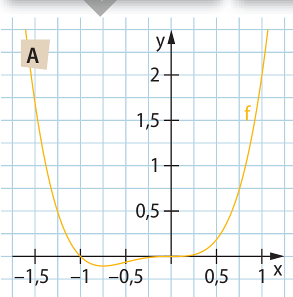
a) $3x^2=3x-2$ **b)** $x^3=x^2-4x$ **c)** $x^4+2=-4x^2-2$

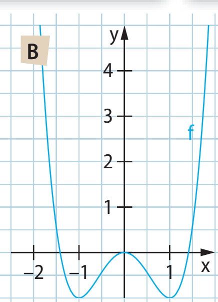
6 Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g graphisch und rechnerisch.

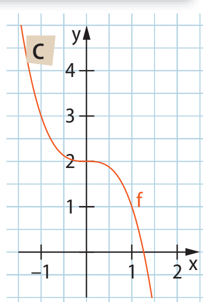
a) $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=-x^3$ **b)** $f(x)=x^3-1$, $g(x)=-x^3+1$ **c)** $f(x)=x^4-4x^2$, $g(x)=-4x^2+1$

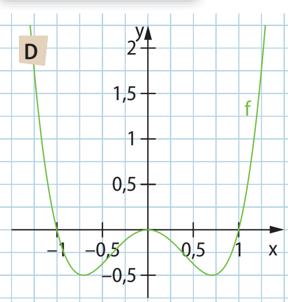
7 Ordnen Sie mithilfe der Nullstellen den Graphen die passende Funktionsgleichung zu.

1 $f(x)=2x^4-2x^2$ **2** $f(x)=(x^3+x^2)\cdot x$ **3** $f(x)=(x^2-1)^2-1$ **4** $f(x)=-x^3+2$

A


B


C


D


8 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f. Skizzieren Sie anschließend den Graphen von f.

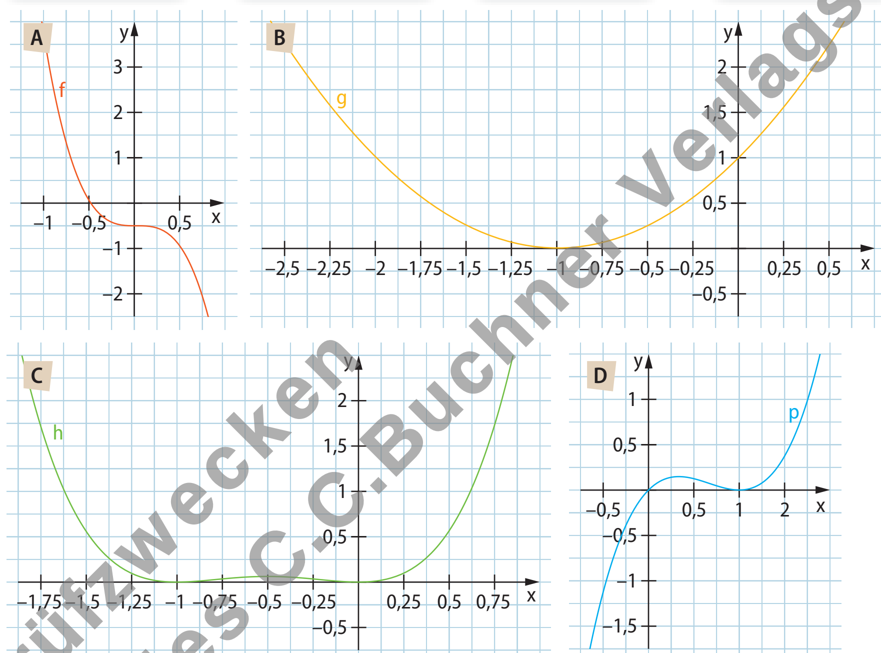
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ **b)** $f(x) = x^4 - 16$ **c)** $f(x) = x^3 - 2x$

d) $f(x) = (x-3) \cdot (x-2)$ **e)** $f(x) = x^3 \cdot (x-1)$ **f)** $f(x) = x^5 - 8x^2$

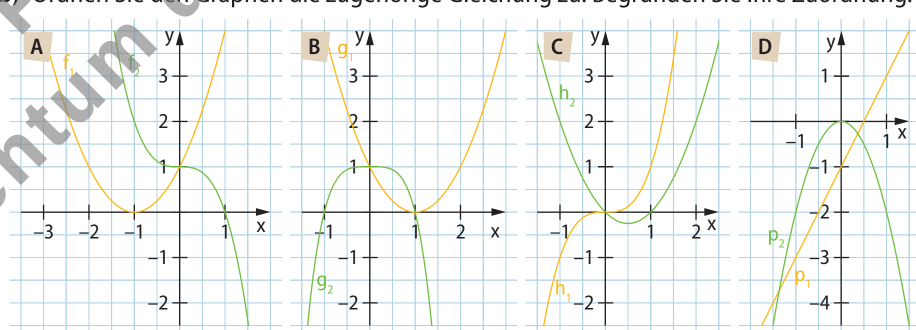
9 Die Lösung von Gleichungen kann graphisch mithilfe von Funktionsgraphen bestimmt werden.

a) Ordnen Sie den Gleichungen den zugehörigen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

1 $x^3 + x = 2x^2$ **2** $x^4 + x^2 = -2x^3$ **3** $-1 = x^2 + 2x$ **4** $-1 = -x^3 - 2$



b) Ordnen Sie den Graphen die zugehörige Gleichung zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.



1 $2x - 2 = -x^2$ **2** $x^3 = x^2 - x$ **3** $(x-1)^2 = -x^4 + 1$ **4** $x^2 + 2x + 1 = -x^3 + 1$

10 Für welchen Wert des Parameters $t \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f …

1 keine Nullstellen. **2** genau eine Nullstelle. **3** zwei Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 + 6x + t$ **b)** $f(x) = -x^2 - 4x + t$ **c)** $f(x) = (x-t)^2 - 1$

d) $f(x) = (x-t)^2$ **e)** $f(x) = x^3 - 2x + t$ **f)** $f(x) = x^4 + 2tx^2$

11 Manche Gleichungsarten können mithilfe des Verfahrens der sogenannten Substitution gelöst werden.

Gleichungen wie $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ lassen sich mithilfe der **Substitution** lösen. Hierzu *substituiert*, d. h. *ersetzt* man x^2 durch z, wodurch aus der ursprünglichen Gleichung die Gleichung $z^2 + 3z - 4 = 0$ wird.

Aus einer Gleichung vierten Grades, für welche wir kein Lösungsverfahren kennen, wurde so eine Gleichung zweiten Grades, d. h. eine quadratische Gleichung. Diese kann man nun mit einem bekannten Verfahren lösen.
Abschließend muss man wieder resubstituieren, d. h. die Ersetzung rückgängig machen.

Substitution: $x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \xrightarrow[z = x^2]{\text{Substitution}} z^2 + 3z - 4 = 0$

$\Rightarrow z_1 = 1;\ z_2 = -4$ (Lösungsformel)

Resubstitution: $x^2 = z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = -1$

$x^2 = z_2 = -4 \Rightarrow$ keine Lösung

Die Lösungen der Gleichung $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

Weiterdenken

substituere (lat.): ersetzen

a) Lösen Sie mithilfe der angegebenen Substitution.

1 $0 = x^4 - 6x^2 + 9$ mit $z = x^2$ **2** $0 = x^6 + 2x^3 + 1$ mit $z = x^3$

3 $0 = x^8 - 5x^4 + 6$ mit $z = x^4$ **4** $0 = 2x^{10} + 2x^5 - 24$ mit $z = x^5$

b) Lösen Sie mithilfe einer Substitution.

1 $0 = 9x^4 + 5x^2 - 4$ **2** $0 = x^4 + 11x^2 + 10$

3 $0 = x^4 - 13x^2 + 36$ **4** $0 = x^6 + 3x^4 + 2x^2$

c) Manchmal geht es auch ohne Substitution. Lösen Sie die Gleichungen durch Anwenden der binomischen Formeln oder durch Ausklammern.

1 $x^4 - 3x^2 = 0$ **2** $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ **3** $4x^4 - 16x^2 = 0$

d) Beschreiben Sie, wie Gleichungen aufgebaut sein müssen, damit Sie eine Substitution anwenden können.

12 Unter den bisher behandelten Gleichungen waren auch einige **biquadratische Gleichungen**. Die Vorsilbe „bi-“ bedeutet „doppelt“. Biquadratisch heißt also „doppelt quadratisch“. Das Doppelte bezieht sich auf die Potenzen der Variablen. Insbesondere ist bei quadratischen Gleichungen die höchste Potenz der Variablen 2, bei biquadratischen Gleichungen demnach 4. Biquadratische Gleichungen löst man in der Regel mithilfe einer Substitution.
Lösen Sie die angegebenen biquadratische Gleichungen.

a) $x^4 + 3x^2 - 40 = 0$ **b)** $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ **c)** $x^4 = 0{,}25 \cdot (x^2 - 25)$

d) $x^4 = 3x^2$ **e)** $x^4 - 24x^2 + 100 = 0$ **f)** $(x^2 + 8)^2 = 5 \cdot (3x^2 + 13)$

13 Manchmal können Bruchgleichungen auf Gleichungen zurückgeführt werden, die man mittels Substitution lösen kann. Lösen Sie so die folgenden Gleichungen.
Hinweis: Beachten Sie bei Bruchgleichungen die gültige Definitionsmenge.

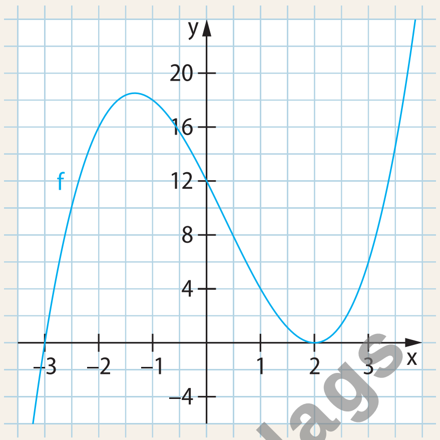
a) $x^3 - \frac{1}{x} = \frac{99}{10}x$ **b)** $\frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 1}{2}$ **c)** $\frac{7 - x}{x^3} - \frac{x}{x + 7} = 0$

d) $\frac{1}{3x^2} - 1 = \frac{x^2}{3}$ **e)** $x^2 + \frac{4}{x^2} = 4$ **f)** $(x - 4)^2 - \frac{1}{(x + 4)^2} = 0$

Entdecken

Nutzen Sie, wenn möglich, ein Computerprogramm.

Was passiert, wenn Sie einen Linearfaktor einer gegebenen Funktion mit 2 potenzieren (d. h. quadrieren) oder mit einer anderen Potenz versehen? Das sollen Sie nun untersuchen.



- Skizzieren Sie in einem ersten Schritt den Graphen der Funktion f_1 mit $f_1(x) = (x-2)\cdot(x+3)$.
- Skizzieren Sie nun die Graphen der Funktionen f_2 mit $f_2(x) = (x-2)^2\cdot(x+3)$ und f_3 mit $f_3(x) = (x-2)\cdot(x+3)^2$.
  Vergleichen Sie mit dem Graphen von f_1.
- Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_4 mit $f_4(x) = (x-2)^3\cdot(x+3)$ und f_5 mit $f_5(x) = (x-2)\cdot(x+3)^3$.
  Vergleichen Sie mit den anderen Graphen.
- Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f_6 mit $f_6(x) = (x-2)^4\cdot(x+3)$ und f_7 mit $f_7(x) = (x-2)\cdot(x+3)^4$. Vergleichen Sie mit den anderen Graphen.
- Beschreiben Sie Zusammenhänge. Überprüfen Sie die Zusammenhänge an weiteren Beispielen.

Verstehen

Ist eine ganzrationale Funktion in Linearfaktordarstellung gegeben, bewirkt das Potenzieren eines Linearfaktors mitunter (je nach Aussehen der Potenz), dass der Graph der Funktion die x-Achse berührt oder schneidet.

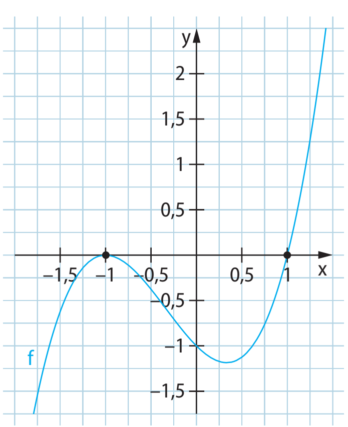
Ganzrationale Funktionen f kann man zuweilen in der Form $f(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ schreiben ($x_i \in \mathbb{R}$). Dann sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Nullstellen von f. Wird der Linearfaktor $(x-x_i)$ mit k ($k \in \mathbb{N}$) potenziert, nennt man x_i eine **k-fache Nullstelle**. Es gilt:
- Ist die Potenz k **gerade** (also $k = 2, 4, \ldots$), so **wechselt** f an der Stelle $x = x_i$ das Vorzeichen **nicht**, d. h. der Graph von f **berührt** die x-Achse an der Stelle x_i.
- Ist die Potenz k **ungerade** (also $k = 1, 3, \ldots$), so **wechselt** f an der Stelle $x = x_i$ das Vorzeichen, d. h. der Graph von f **schneidet** die x-Achse an der Stelle x_i.

Beispiel

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x+1)\cdot(x^2-1)$ mithilfe der Nullstellen.

Lösung:

Der Graph hat drei Nullstellen, die man aus den Linearfaktoren ablesen kann. Der Faktor (x^2-1) ist ein Binom und lässt sich als $(x+1)\cdot(x-1)$ schreiben. Man erhält also $f(x) = (x+1)^2\cdot(x-1)$. $x_{N1,2} = -1$ ist also eine doppelte Nullstelle, $x_{N3} = 1$ eine einfache. Insgesamt handelt es sich um eine Funktion dritten Grades mit positivem Vorzeichen vor der höchsten Potenz. Sie verläuft demnach von links unten nach rechts oben.



Nachgefragt

- „Eine ganzrationale Funktion kann $x_0 = 0$ nicht als doppelte Nullstelle haben." Nehmen Sie Stellung zu dieser Aussage.
- Wie groß muss der Grad einer ganzrationalen Funktion mindestens sein, damit garantiert eine Nullstelle existiert. Wie groß muss er sein, dass eine doppelte Nullstelle existiert? Untersuchen Sie.
- Wie viele verschiedene Nullstellen kann eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 haben? Untersuchen Sie.

Aufgaben

1 Geben Sie einfache und mehrfache Nullstellen der Funktionen an.

a) $f(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2$ **b)** $f(x) = (x-1)^2\cdot(x+2)^3$
c) $f(x) = (x-1)^3\cdot(x+2)^4$ **d)** $f(x) = (x^2-2x+1)\cdot(x^2+2x+1)$
e) $f(x) = (x^2-4)\cdot x$ **f)** $f(x) = (x^2-4)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$

2 Geben Sie jeweils zwei Funktionsgleichungen an, die die angegebenen einfachen und doppelten Nullstellen haben.

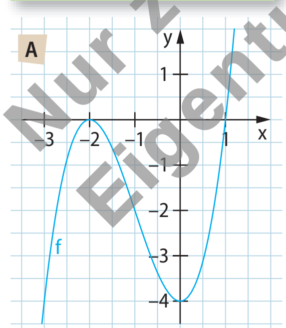
	a)	b)	c)	d)
Einfache Nullstelle(n)	$x_{N1} = 0$	$x_{N1} = 1$	$x_{N1} = 0{,}5$ $x_{N2} = -\frac{1}{2}$	$x_{N1} = \sqrt{2}$
Doppelte Nullstelle(n)		$x_{N2,3} = 2$	$x_{N3,4} = -1$	$x_{N2,3} = \sqrt{3}$ $x_{N4,5} = -\sqrt{3}$

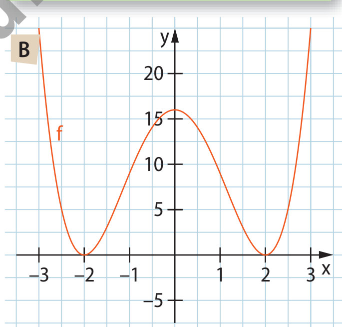
3 Entscheiden Sie, ob die Graphen der angegebenen Funktionen einfache und/oder mehrfache Nullstellen haben. Geben Sie diese jeweils an.

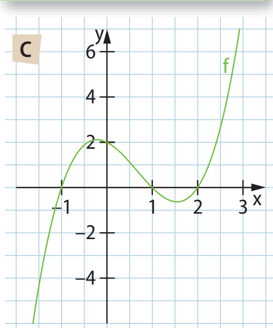
a) $f(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x+2)^2$ **b)** $f(x) = 0{,}5\cdot(x-1)^2\cdot x$ **c)** $f(x) = (x^2-9)\cdot(x+2)$
d) $f(x) = (x^2-2x+1)\cdot(x+2)^2$ **e)** $f(x) = (x-1)^3\cdot(x-1)^2$ **f)** $f(x) = (x-1)^3\cdot(x-1)^3$

4 Ordnen Sie den Funktionsgleichungen ihren entsprechenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

1 $f(x) = (x^2-1)\cdot(x+2)$ **2** $f(x) = (x-2)^2\cdot(x^2+4x+4)$ **3** $f(x) = (x-1)\cdot(x+2)^2$







5 Skizzieren Sie zu den gegebenen Funktionsgleichungen jeweils einen passenden Graphen.

$f_1(x) = -(x+3)^2\cdot(x-1)$ $f_3(x) = (x+1)^3\cdot(x-2)^2$
$f_2(x) = -x\cdot(x^2-1)\cdot(x^2-4)$ $f_4(x) = -x\cdot(x-2)^3$

Entdecken

Wählen Sie zwei, drei oder noch mehr Termbausteine des Kastens aus, verknüpfen Sie diese durch Addition miteinander und interpretieren Sie das Ergebnis als Funktionsterm. Zum Beispiel erhalten Sie so die Funktionsgleichung $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

x	x^2	x^3	x^4
$2x$	$2x^2$	$2x^3$	$2x^4$
$3x$	$3x^2$	$3x^3$	$3x^4$
1	2	3	4

- Skizzieren Sie die Graphen der so ermittelten Funktionen. Sie können dazu eine Wertetabelle oder ein Computerprogramm nutzen.
- Vergleichen Sie die Graphen bzgl. ihrer Symmetrie und ordnen Sie sie entsprechend.
- Finden Sie einen Zusammenhang zwischen dem Aussehen des Funktionsterms und der möglichen Symmetrie des Graphen.

Verstehen

Untersucht man die Graphen von ganzrationalen Funktionen auf Symmetrie, stellt man fest, dass diese von den auftretenden Exponenten abhängig ist.

Beachten Sie: Der Exponent in $a_0 = a_0 \cdot x^0$ gilt als gerader Exponent, denn dieser Summand bewirkt eine Verschiebung des Graphen in y-Richtung. Folglich verändert er eine vorhandene Achsensymmetrie nicht, wohl aber eine Punktsymmetrie zum Ursprung.

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ ist genau dann …
- **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn alle Exponenten gerade sind.
- **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn alle Exponenten ungerade sind.

Beispiele

I. Untersuchen Sie die Funktionen f und g auf Symmetrie.

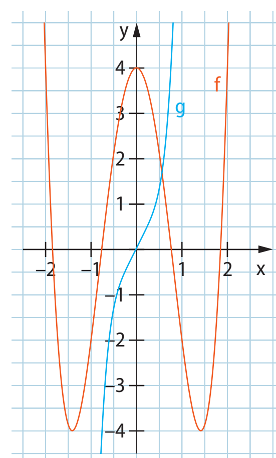
a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 4$

b) $g(x) = 10x^5 + 2x$

Lösung:

a) Da der Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f nur gerade Exponenten aufweist, ist f achsensymmetrisch zur y-Achse.

b) Da der Funktionsterm der ganzrationalen Funktion g nur ungerade Exponenten aufweist, ist g punktsymmetrisch zum Ursprung.



II. Wie können Sie die Termbausteine x^3, x^2, x und 1 so miteinander kombinieren, dass daraus …

a) eine achsensymmetrische

b) eine punktsymmetrische

Funktion entsteht?

Lösung:

Die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ besitzt aufgrund der geraden und ungeraden Exponenten weder einen achsen- noch einen punktsymmetrischen Graphen.

a) Die Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot x^2 \cdot x + 1 = x^6 + 1$ hat nur gerade Exponenten. Damit ist ihr Graph achsensymmetrisch (zur y-Achse).

b) Die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 \cdot x \cdot 1 = 2x^3$ hat nur ungerade Exponenten. Damit ist ihr Graph punktsymmetrisch (zum Ursprung).

Nachgefragt

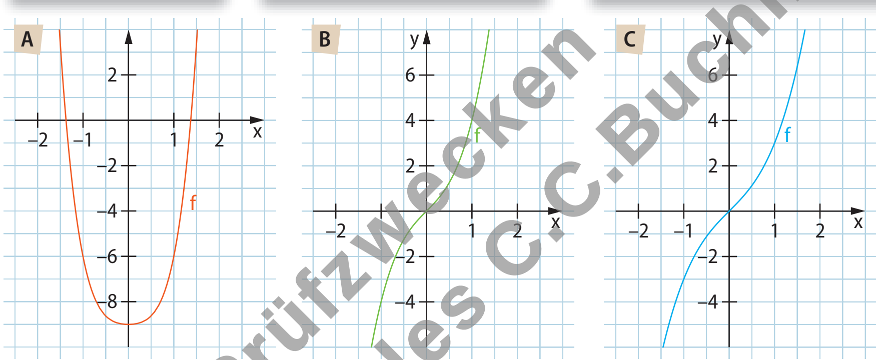
- Überprüfen Sie, ob es Graphen ganzrationaler Funktionen gibt, die sowohl punkt- als auch achsensymmetrisch sind.
- Doreen meint: „Wenn in einem Funktionsterm nur ungerade Hochzahlen vorkommen, ist der zugehörige Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.“ Nehmen Sie Stellung zur Aussage.
- Die Funktion f wird durch $f(x) = \frac{x^5 - x^3}{x^2}$ beschrieben. Albina schließt aus der Existenz von sowohl geraden als auch ungeraden Hochzahlen, dass der Graph von f weder achsen- noch punktsymmetrisch ist. Nehmen Sie Stellung hierzu.

Aufgaben

1 Untersuchen Sie auf Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung.
a) $f(x) = x^3 - 3x$ **b)** $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ **c)** $f(x) = -x^3 - 3x^2$
d) $f(x) = (x-2)^2$ **e)** $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x+1)$ **f)** $f(x) = x \cdot (x-2) + 2x - 2$

2 Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung einen passenden Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Nutzen Sie dabei – wenn möglich – vor allem Symmetrieüberlegungen.

1 $f(x) = x \cdot (x^2 + 2)$ **2** $f(x) = 2x \cdot (x-1)^2 + 4x^2$ **3** $f(x) = (x+3) \cdot (x-3) + 2x^4$



3 Setzen Sie in das Kästchen ☐ einen Ausdruck so ein, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
a) $f(x) = x^5 + \square$ **b)** $f(x) = x \cdot (x^2 + 2) + x^2 + \square$ **c)** $f(x) = (x+1)^2 + x^4 + \square$

4 Wie können Sie die Termbausteine x^4, $2x^3$, $3x^2$, $4x$ und 5 miteinander kombinieren (d. h. durch Rechenzeichen miteinander verknüpfen), dass daraus …
a) eine zur y-Achse achsensymmetrische
b) eine zum Ursprung punktsymmetrische
Funktion entsteht?
Verwenden Sie dabei möglichst viele der Termbausteine.

x^4 $2x^3$ $3x^2$
$4x$ 5

5 Untersuchen Sie auf Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. auf Punktsymmetrie zum Ursprung.
a) $f(x) = -x^3 - 3x$ **b)** $f(x) = x^2 \cdot (x^2 - 9)$ **c)** $f(x) = 2x^4 - 4x^2$
d) $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2 - 1)$ **e)** $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4$ **f)** $f(x) = 5x^5 - 3x^3 - x$

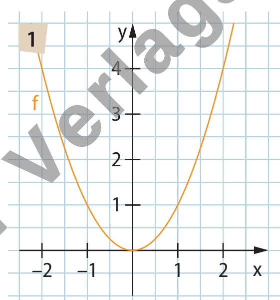
6 Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an.

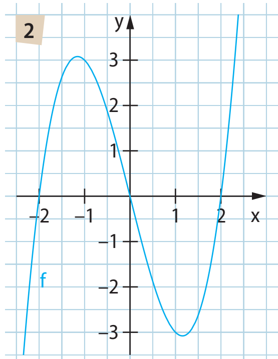
a) Eine ganzrationale Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse und hat bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ doppelte Nullstellen.

b) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat bei $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$ jeweils Nullstellen.

7 Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^2 - 3x^c$ soll punktsymmetrisch zum Ursprung sein und für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ streben. Argumentieren Sie, was infolgedessen für die Parameter a, b und c gelten muss.

8 Das **Exponentenvergleichskriterium** aus dem Verstehen-Kasten ist nur für ganzrationale Funktionen anwendbar. Will man eine beliebige Funktion auf Symmetrie untersuchen, muss man allgemeine Kriterien anwenden. Diese gelten insbesondere auch für ganzrationale Funktionen und können anhand von Graphen plausibilisiert werden.





a) Betrachten Sie nebenstehenden zur y-Achse achsensymmetrischen Graphen in Abbildung **1**. Die Funktionswerte von x-Werten, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden (also f(x) und f(−x)), sind offensichtlich gleich. Entwickeln Sie hieraus ein formales Kriterium der Form „Eine Funktion f ist genau dann achsensymmetrisch, wenn f(−x) = …"

b) Betrachten Sie nebenstehenden zum Ursprung punktsymmetrischen Graphen in Abbildung **2**. Die Funktionswerte von x-Werten, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden (also f(x) und f(−x)), unterscheiden sich offensichtlich ebenfalls durch ihr Vorzeichen. Entwickeln Sie hieraus ein formales Kriterium der Form „Eine Funktion f ist genau dann punktsymmetrisch, wenn f(−x) = …"

c) Wenden Sie die allgemeinen Kriterien auf folgende Funktionen an.

1 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ **2** $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ **3** $f(x) = \frac{3x}{x^3 - 3}$

Verwenden Sie die allgemeinen Kriterien aus Aufgabe 8.

9 Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Untersuchen Sie, ob auch der Graph von h_i achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

a) **1** $h_1(x) = -f(x) - 2$ **2** $h_2(x) = (f(x))^2$ **3** $h_3(x) = f(x) \cdot x$

4 $h_4(x) = -2 \cdot f(x) + 2x$ **5** $h_5(x) = \frac{f(x)}{x}$ **6** $h_6(x) = f(x) \cdot x^2$

b) Überprüfen Sie die Aussage.

> f_1 ist eine ganzrationale, zur y-Achse achsensymmetrische Funktion und f_2 ist eine ganzrationale, zum Ursprung punktsymmetrische Funktion. Dann gilt: $f_1 \cdot f_2$ und $\frac{f_1}{f_2}$ sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

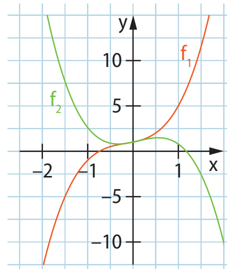
10 Der Graph einer Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ ist symmetrisch zur y-Achse. Untersuchen Sie, was das Potenzieren des Terms $(x^2 + 1)$ in Bezug auf die Symmetrie bewirkt, d. h. untersuchen Sie die Graphen der Funktionen g_n mit $g_n(x) = (x^2 + 1)^n$, n = 2, 3, 4, … auf Symmetrie.

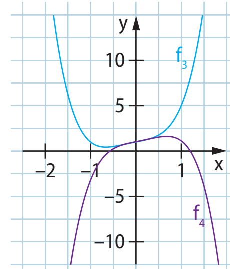
Seite 16

Ganzrationale Funktionen und ihr Verhalten im Unendlichen

Das Verhalten des Graphen einer **ganzrationalen Funktion f** mit
$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$
für $x \longrightarrow \pm\infty$ bestimmt der Summand $a_n x^n$:

- n ungerade, $a_n > 0$: Graph verläuft von links unten nach rechts oben
- n ungerade, $a_n < 0$: Graph verläuft von links oben nach rechts unten
- n gerade, $a_n > 0$: Graph verläuft von links oben nach rechts oben
- n gerade, $a_n < 0$: Graph verläuft von links unten nach rechts unten





$f_1(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad f_3(x) = 2x^4 + x^3 + x + 1$
$f_2(x) = -2x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad f_4(x) = -2x^4 + x^3 + x + 1$

Seite 20

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

- Gleichungen, bei denen in jedem Summanden eine Potenz von x auftaucht: **Ausklammern**, dann die Nullstelle(n) eines jeden Faktors bestimmen.
- Gleichungen der Art $x^n - c = 0$: **Umformen** zu $x^n = c$ und **Ziehen der n-ten Wurzel**
- Gleichungen, die auf binomische Formeln zurückzuführen sind: **Distributivgesetz rückwärts**, dann die Nullstelle(n) eines jeden Faktors bestimmen

- $0 = x^3 - 2x^2 - x = x \cdot (x^2 - 2x - 1)$
  Satz vom Nullprodukt: $x_{N1} = 0$
  x_{N2} und x_{N3} erhält man aus $x^2 - 2x - 1 = 0$
  (Lösungsformel für quadratische Gleichungen)
- $0 = x^4 - 16$, d. h. $x^4 = 16$
  $\Rightarrow x_{N1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$
- $0 = 4x^4 - 9 = (2x^2 + 3) \cdot (2x^2 - 3)$
  Satz vom Nullprodukt für $2x^2 - 3 = 0$:
  $x_{N1,2} = \pm\sqrt{1{,}5}$

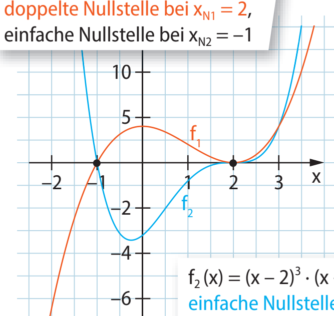
Seite 24

Mehrfache Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Ganzrationale Funktionen kann man zuweilen in der **Linearfaktordarstellung**
$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$
schreiben ($x_i \in \mathbb{R}$). Dann sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Nullstellen von f. Wird der Linearfaktor $(x - x_i)$ mit k ($k \in \mathbb{N}$) potenziert, nennt man x_i eine **k-fache Nullstelle**.

Ist die Potenz gerade (ungerade), so berührt (schneidet) der Graph die x-Achse in x_i.

$f_1(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 1)$;
doppelte Nullstelle bei $x_{N1} = 2$,
einfache Nullstelle bei $x_{N2} = -1$



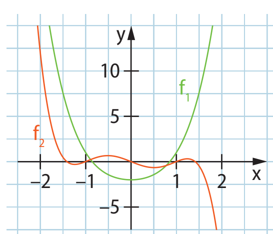
$f_2(x) = (x - 2)^3 \cdot (x + 1)$;
einfache Nullstelle bei $x_{N1} = 2$
und bei $x_{N2} = -1$

Seite 26

Symmetrie ganzrationaler Funktionen

Der Graph einer ganzrationale Funktion f ist genau dann …

- **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn alle Exponenten gerade sind.
- **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn alle Exponenten ungerade sind.



$f_1(x) = x^4 + 2x^2 - 2$
$f_2(x) = -x^5 - 3x^3 - 2x^1$

1 Auf unterschiedlichen Wegen

1 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf sein Verhalten im Unendlichen.

a) $f(x) = x^5 - 2x^2$
b) $f(x) = -x^3 + 3x$
c) $f(x) = x^2 \cdot (-x - 1)$

a) $f(x) = -(x^2 - 1) \cdot x^2$
b) $f(x) = (x + 2)^2 + 3x^3$
c) $f(x) = -x^3 \cdot (x - 1)^2 - x^5$

2 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. auf Punktsymmetrie zum Ursprung.

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$
c) $f(x) = (x - 2)^2 - 4x$

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
b) $f(x) = x^3 - 2x + 1$
c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$

3 Hier haben sich Fehler eingeschlichen. Finden und korrigieren Sie diese.

$f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{x^2}$ strebt für $x \to +\infty$ gegen 1, weil sowohl x^3 als auch x^2 gegen unendlich streben. Das ergibt gekürzt insgesamt 1.

$(x^2 + 2x + 1) \cdot (x + 2) = 0 \quad | \cdot (x+2)$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
Die Gleichung hat keine Lösung, denn wenn ich für x die Zahlen 1, 2, 3 usw. einsetze, entfernt sich das Ergebnis immer weiter von 0.

$f(x) = 2 + \frac{x^3 - x^2}{x^4}$ strebt für $x \to +\infty$ gegen 0, weil der Nenner schneller gegen unendlich strebt als der Zähler.

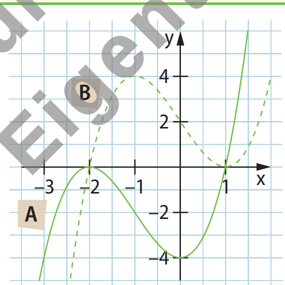
$x^3 + x^2 - x + 2 = x + 2$
$(x^2 - x + 1) \cdot (x + 2) = x + 2 \quad | : (x + 2)$
$x^2 - x + 1 = 0$
$x^2 = x - 1$
Die Gleichung hat keine Lösung, denn die Graphen von x^2 und von $x - 1$ schneiden sich nicht.

4 Geben Sie möglichst viele Eigenschaften des Graphen der Funktion f an.

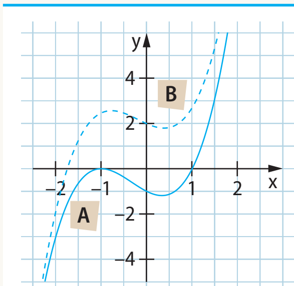
a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = x^3 + 3x$
c) $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)$

a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
c) $f(x) = -x^3 + x^4 - 2x$

5 Ordnen Sie jedem Graphen die passende Funktionsgleichung zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung und führen Sie möglichst viele Argumente an. Skizzieren Sie weiter den Graphen zu derjenigen Funktionsgleichung, die keinen Partner gefunden hat.



1 $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)^2$
2 $f(x) = -(x + 1) \cdot (x - 2)^2$
3 $f(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$



1 $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x + 1$
2 $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x + 1)$
3 $f(x) = -(x - 1) \cdot (x + 1)^2$

6 Untersuchen Sie die Funktion f auf einfache und mehrfache Nullstellen.

a) $f(x) = x^2 + 8x + 16$
b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$
c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x$
d) $f(x) = 4x^3 - 9x$

a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$
b) $f(x) = x^2 + 2x + 4$
c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (-x - 1)$
d) $f(x) = 2x^5 - 8x^3 + 8x^2$

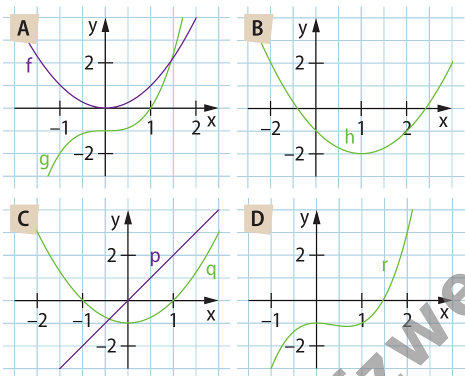
7 Lösen Sie folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen graphisch und rechnerisch.

a) $x^2 = x + 2$ b) $x + x^2 = -3$
c) $0 = (x + 1)^3$ d) $x^3 > x^2 - 2$

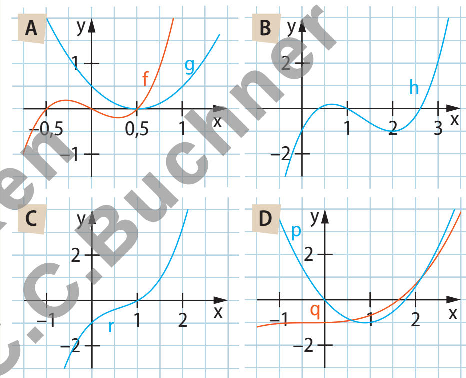
a) $-x^2 = -2x^2 + x - 1$ b) $x^3 - x^2 = -2$
c) $x \cdot (x - 1)^2 = 2x$ d) $x^3 + x^2 < x \cdot (x^2 - 1)$

8 Die Lösung einer Gleichungen kann graphisch mithilfe von Funktionsgraphen bestimmt werden. Ordnen Sie jeder Gleichung jeweils begründet die zugehörige Abbildung zu.

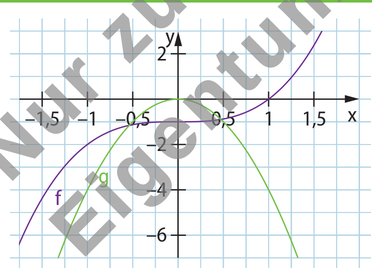
a) $x^2 = x^3 - 1$ b) $2x = x^2 - 1$

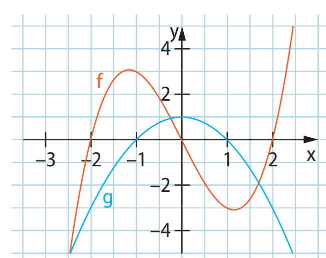


a) $(x - 1)^2 = x^3 - x$ b) $x^3 - 4x^2 + 4x = 1$



9 Die Abbildung zeigt die graphische Lösung einer Gleichung. Lesen Sie die graphische Lösung ab und bestimmen Sie anschließend eine zugehörige Gleichung. Überprüfen Sie Ihre Gleichung, indem Sie die Lösung rechnerisch bestimmen.





10 Setzen Sie in das Kästchen ☐ einen Ausdruck so ein, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

a) $f(x) = -x^3 + ☐$
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + ☐$
c) $f(x) = (x+3)^2 + ☐$
d) $f(x) = x^3 + (2x)^2 + x + ☐$

a) $f(x) = x \cdot (x^2 - 1) + 2x^2 + ☐$
b) $f(x) = (x^2 - x)^2 + ☐$
c) $f(x) = (x + 2)^2 + 2x^4 + ☐$
d) $f(x) = x^3 + (2x + 1)^2 + ☐$

1 Kreuz und quer

1 Überprüfen Sie den Graphen der Funktion f auf Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung des Koordinatensystems.

a) $f(x) = 4x^5 + 2x$ **b)** $f(x) = x^3 - 3x$ **c)** $f(x) = x^3 - 3x^2$
d) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x$ **e)** $f(x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 + 1$ **f)** $f(x) = (x + 1)^3 - 3x^2 - 1$

2 Untersuchen Sie das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und skizzieren Sie damit den Graphen von f.

a) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 5$ **b)** $f(x) = x^5 - 5x^4 - 3x^2$ **c)** $f(x) = -(x-1)^2 - 3x^3 - 4x^4$
d) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$ **e)** $f(x) = (x-1)^3 - x^3$ **f)** $f(x) = (x^2 - 2)^2 - 2x^4$

3 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f, wenn möglich unter Benutzung algebraischer Umformungen.

a) $f(x) = 4x^4 + 2x^2$ **b)** $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ **c)** $f(x) = 2x^6 - 4x^4$
d) $f(x) = 3x^2 - 9x$ **e)** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$ **f)** $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$

4 Untersuchen Sie die Funktion f auf mehrfache Nullstellen.

a) $f(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)$ **b)** $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (4 - x^2)$ **c)** $f(x) = (x^2 + 6x + 9) \cdot x^2$
d) $f(x) = (x^2 - 9) \cdot (x + 3)$ **e)** $f(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2$ **f)** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Denken Sie auch an den Satz von Vieta.

5 Zerlegen Sie die Funktionsgleichung in möglichst viele Faktoren.

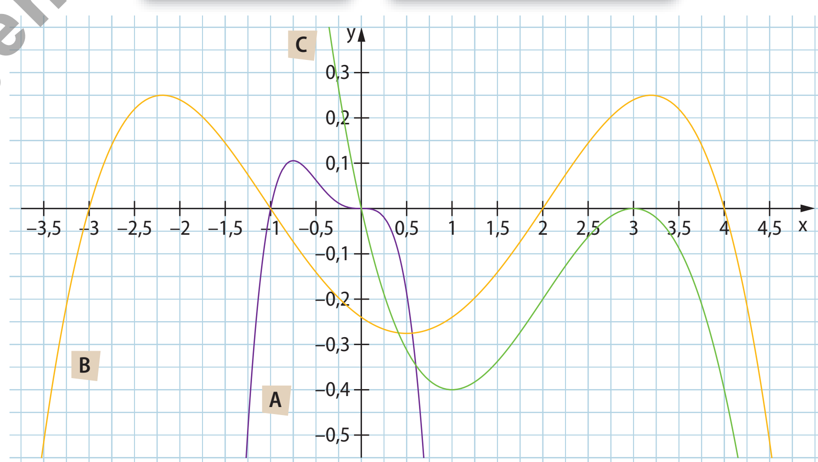
a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ **b)** $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **c)** $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$
d) $f(x) = x^5 - 9x^3$ **e)** $f(x) = 4x^4 - 16x^2$ **f)** $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f. Nutzen Sie hierfür die Eigenschaften des Graphen, die sich aus der Funktionsgleichung ergeben.

a) $f(x) = 4x^3 - 16x$ **b)** $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ **c)** $f(x) = -(x-2) \cdot (2x+3) \cdot x$
d) $f(x) = x \cdot (2x-2)^2 \cdot x$ **e)** $f(x) = -(9x^3 - 4x) \cdot (x+1)^2$ **f)** $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 3$

7 Ordnen Sie jeder Funktionsgleichung einen Graphen zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Skizzieren Sie den Graphen derjenigen Funktionsgleichung, die keinen Partner gefunden hat.

1 $f(x) = -0{,}1 \cdot x^3 + 0{,}6x^2 - 0{,}9x$
2 $f(x) = -0{,}01 \cdot (x-4) \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x+3)$
3 $f(x) = -x^4 - x^3$
4 $f(x) = -(x^2 - 4) \cdot (x + 2)$



8 Lösen Sie die angegebenen Gleichungen graphisch auf mindestens zwei Arten. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

a) $x^3 + x^2 - 2 = 0$ **b)** $(x + 1)^2 = -(x - 1)^2$ **c)** $2 = x^3 - x$
d) $(x - 2)^2 + 1 = -x^3$ **e)** $x^3 - x^2 = x - 1$ **f)** $x \cdot (x + 1)^2 = -x^2 + 4$

Die Gleichung $x^2 + 2x = 1$ kann man zum Beispiel umstellen zu $x^2 = -2x + 1$ und die linke Seite als Parabel, die rechte Seite als Gerade interpretieren. Die Gleichung lösen meint also, die x-Koordinate der Schnittpunkte der beiden Graphen zu bestimmen.

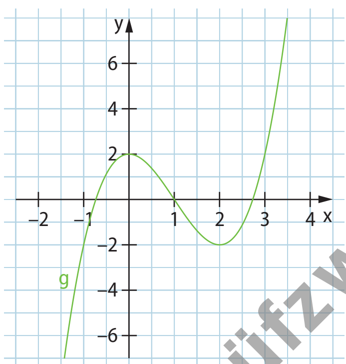
9 Überprüfen Sie folgende Aussagen für den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

a) Der Graph von f hat in $(-2\,|\,0)$ eine Nullstelle.
b) Der Graph von f hat nur eine Nullstelle.
c) Der Graph von f ist achsensymmetrisch.
d) Der Graph von f ist punktsymmetrisch.

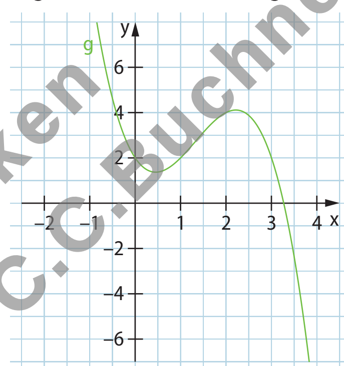
10 Begründen Sie, dass die Graphen der Funktionen f_k mit $f_k(x) = x^3 + k \cdot x + 1$ $(k > 0)$ nicht mehr als eine Nullstelle haben können.

11 Der Graph der Funktion g ist aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$ entstanden. Bestimmen Sie jeweils eine Funktionsgleichung für g. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

a)

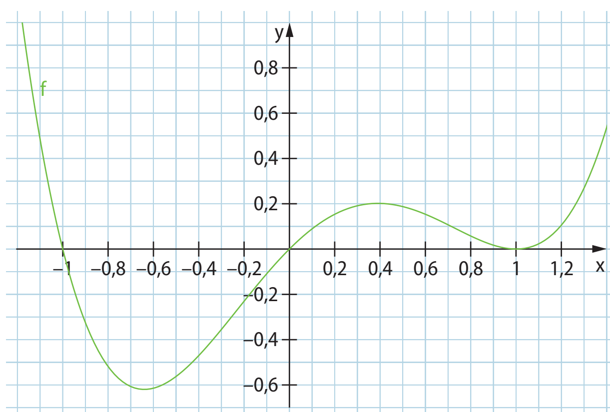


b)



12 **a)** Erläutern Sie anhand der Stichpunkte **1** bis **4**, wie man den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + x)$ sukzessive nach folgender Vorgehensweise „entstehen" lassen kann:

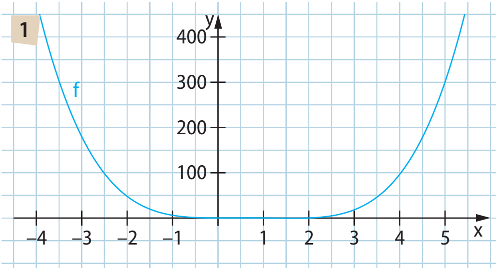
1 Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$
2 Ermittlung mehrfacher Nullstellen
3 Ermittlung des Verhaltens der Funktion um die k-fache Nullstelle herum, wobei k ungerade ist.
4 Ermittlung des Verhaltens der Funktion um die k-fache Nullstelle herum, wobei k gerade ist.

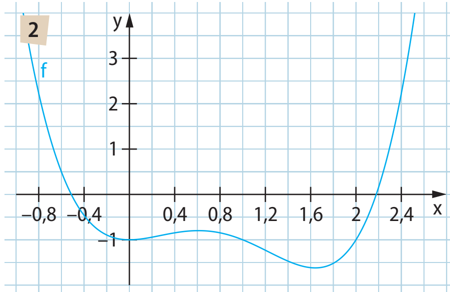


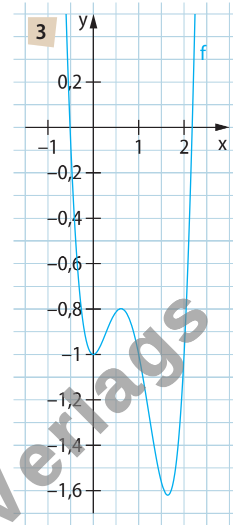
b) Übertragen Sie diese Vorgehensweise auf folgende Funktionen und skizzieren Sie so deren Graphen.

$f_1(x) = (x^2 - 1) \cdot (x - 2)$ $f_2(x) = -(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1)$ $f_3(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x$

13 Die folgenden Graphen gehören allesamt zur selben Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Begründen Sie, welche Abbildung die Funktion am besten widergibt. Beachten Sie auch die Skalierung.

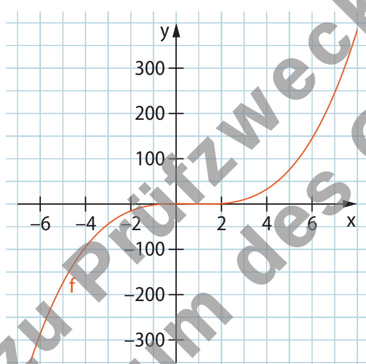


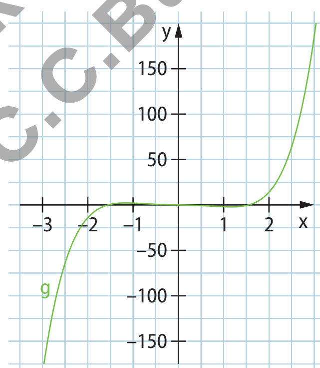


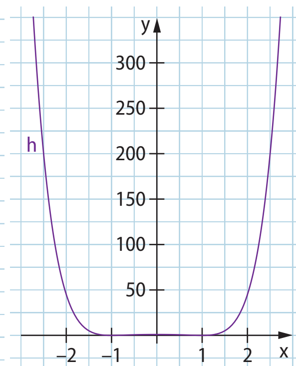


14 Beschreiben Sie, inwiefern die Abbildungen den Verlauf des Graphen der jeweiligen Funktion nur annähernd widergeben bzw. irreführend sind. Beschreiben Sie, wie Ihrer Meinung nach bessere Darstellungen des Graphen aussehen und fertigen Sie eine entsprechende Skizze an. Sie können dazu auch ein Computerprogramm nutzen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ **b)** $g(x) = x^5 - 2x^3 - x$ **c)** $h(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$







15 Untersuchen Sie, wie sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x-3)^n$ verändert, wenn Sie für n die Zahlen 2, 3, 4 … einsetzen.

a) Zeichnen Sie die jeweiligen Graphen bis n = 7. Sie können dazu ein Computerprogramm nutzen.

b) Beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen unter Verwendung von Fachbegriffen wie Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Hoch- und Tiefpunkten…

c) Begründen Sie Ihre Befunde aus Teilaufgabe b).

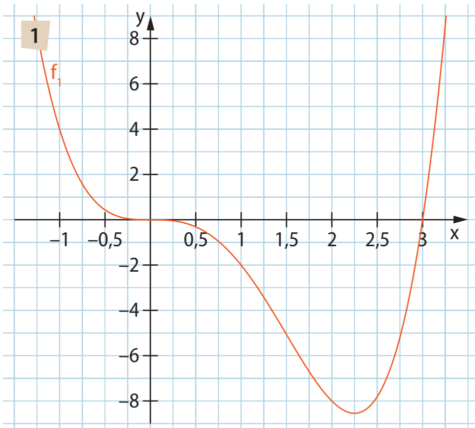
d) Gelten ähnliche Beobachtungen und Gesetzmäßigkeiten auch für die Funktion g mit $g(x) = x^2 \cdot (x-3)^n$? Untersuchen Sie hierzu wieder die jeweiligen Graphen bis n = 7.

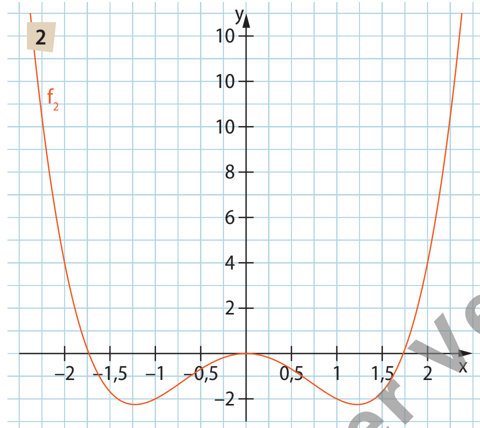
e) Begründen Sie, weshalb nur natürliche Zahlen größer als 2 betrachtet werden.

f) Setzen Sie nun negative ganze Zahlen für n ein.
Beschreiben Sie wieder wesentliche Änderungen an den Graphen. Vergleichen Sie mit Ihren Ergebnissen für natürliche Exponenten n größer als 2.

Der Graph einer Funktion f hat in $P(x_0|f(x_0))$ einen Hoch- bzw. einen Tiefpunkt, wenn es eine Umgebung um P gibt, sodass P in dieser Umgebung der höchste bzw. tiefste Punkt des Graphen von f ist.

16 Eine allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Mit $a = 1$ und $b = c = d = e = 0$ erhält man $f_0(x) = x^4$.
Je nach Aussehen der Parameter a, b, c, d und e entstehen aus der allgemeinen Form verschiedene typische Graphen. Im Folgenden sind zwei Typen dargestellt.

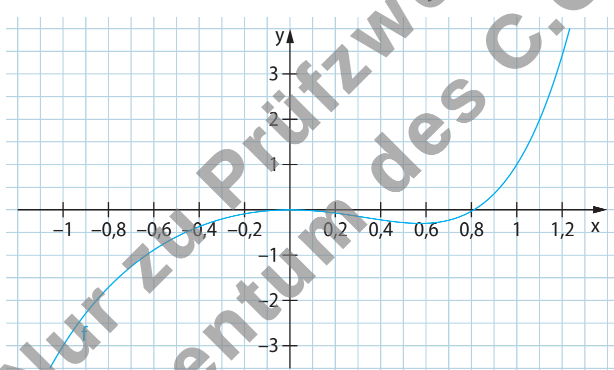


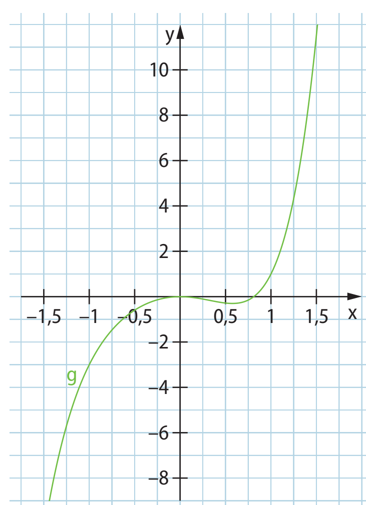


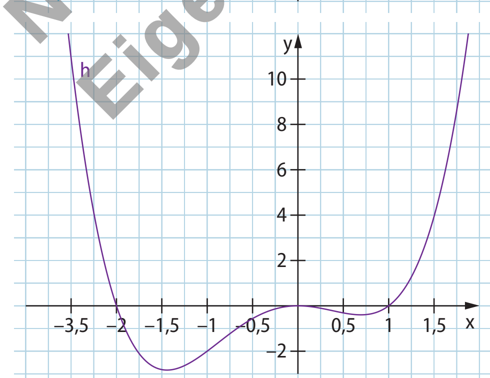
a) Geben Sie für die abgebildeten Graphen an, was Sie über die Parameter aussagen können.

b) Welche weiteren Typen gibt es und wie hängen Sie jeweils von den Parametern ab? Berücksichtigen Sie dabei die Anzahl der Nullstellen, der Hoch- und Tiefpunkte, das Verhalten im Unendlichen und mögliche Symmetrien.

17 Die folgenden Graphen gehören zu Funktionen, bei denen durch schrittweise Hinzunahme einer Nullstelle der Grad der Funktion jeweils um 1 erhöht wurde.







a) Geben Sie die zugehörigen Funktionsterme an.

b) Beschreiben Sie zunächst jeden Graphen für sich. Beschreiben Sie anschließend jeden Graphen im Vergleich zu seinem Vorgänger.

Bei vielen Aufgaben der vorangegangenen Seiten hat es sich als praktisch und informationsreich herausgestellt, den Term einer ganzrationalen Funktion in Linearfaktordarstellung zu schreiben. Betrachtet man zum Beispiel den Term $x^3 + x^2 - 17x + 15$, kann man durch Probieren eine Nullstelle ermitteln, und zwar $x_{N1} = 1$. Der zugehörige Linearfaktor ist $(x - 1)$.
Ziel ist es, den Term $x^3 + x^2 - 17x + 15$ in der Form $(x - 1) \cdot (\ldots)$ zu schreiben, um im Anschluss daran die weiteren Nullstellen zu bestimmen. Hierzu muss man $(x^3 + x^2 - 17x + 15)$ durch $(x - 1)$ dividieren.

Wir schauen uns hierzu zunächst das schriftliche Dividieren zweier Zahlen an.

Schritt 1: Als erstes betrachten wir das **Dividieren durch einen einstelligen Divisor:**

$$
\begin{array}{rcccccc}
12705 & : & 5 & = & 2 & 5 & 4\;1 \\
 & & 5 & \cdot & 2 & & \\
-\;10 & & & & & & \\
\hline
027 & : & 5 & & & 5 & \\
 & & 5 & \cdot & & 5 & \\
-\;25 & & & & & & \\
\hline
020 & : & 5 & & & & 4 \\
 & & 5 & \cdot & & & 4 \\
-\;20 & & & & & & \\
\hline
05 & : & 5 & & & & 1 \\
 & & 5 & \cdot & & & 1 \\
-\;5 & & & & & & \\
\hline
0 & & & & & &
\end{array}
$$

Schritt 2: Sehr ähnlich geht das **Dividieren durch einen zweistelligen Divisor:**

$$
\begin{array}{lcll}
6552 & : & 21 & = 3 \quad 1 \quad 2 \\
(6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2) & : & (2 \cdot 10 + 1) & = 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \\
-\;(6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2) & & (2 \cdot 10 + 1) \cdot 3 \cdot 10^2 & \\
\hline
0 \quad + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 & : & 2 \cdot 10 & \\
\quad -\;(2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1) & & (2 \cdot 10 + 1) \cdot 1 \cdot 10^1 & \\
\hline
\quad 0 \quad + 4 \cdot 10^1 + 2 & : & 2 \cdot 10 & \\
\quad\quad -\;(4 \cdot 10^1 + 2) & & (2 \cdot 10 + 1) \cdot 2 & \\
\hline
\quad\quad 0 & & &
\end{array}
$$

Die Frage, die man sich gleich zu Beginn stellt, lautet:

„Wie oft passt die **2** $(\cdot\, 10)$ in die **6** $(\cdot\, 10^3)$?“ → Antwort: **3** $(\cdot\, 10^2)$

1 Führen Sie zur Auffrischung Ihrer Kompetenzen die folgenden Divisionen durch.

a) 1261 : 13 **b)** 6048 : 54 **c)** 13 801 : 37 **d)** 24 642 : 111

Im Folgenden wird die Vorgehensweise beim Dividieren des Terms einer ganzrationalen Funktion durch einen Linearfaktor gezeigt. Wie leicht zu erkennen ist, geht das ganz analog zum schriftlichen Dividieren. So stellt man sich bei der Division $(x^3 + x^2 - 17x + 15) : (x - 1)$ die Frage:

„Wie oft passt x in x^3?" → Antwort: x^2 -mal

Schritt 3: Dividieren eines Terms einer ganzrationalen Funktion durch einen Linearfaktor:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & (x^3 & + & x^2 & - & 17x & + & 15) & : (x-1) = x^2 + 2x - 15 \\
- & (x^3 & - & x^2) & & & & & \leftarrow (x-1)\cdot x^2 \\
\hline
 & 0 & + & 2x^2 & - & 17x & & & : x \\
 & & - & (2x^2 & - & 2x) & & & \leftarrow (x-1)\cdot 2x \\
\hline
 & & & 0 & - & 15x & + & 15 & : x \\
 & & & & - & (15x & - & 15) & \leftarrow (x-1)\cdot(-15) \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Man erhält also: $(x^3 + x^2 - 17x + 15) : (x - 1) = (x^2 + 2x - 15)$ bzw. $(x^3 + x^2 - 17x + 15) = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 15)$.
Man könnte dieses Verfahren in Form von Fragen beschreiben:

„Womit muss man x multiplizieren, um x^3 zu erhalten?" → x^2 -mal
-1 mal x^2 ergibt $-x^2$

„Womit muss man x multiplizieren, um $2x^2$ zu erhalten?" → …

Von $(x^2 + 2x - 15)$ kann man mithilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen die Nullstellen bestimmen und erhält so $x_{N2} = 3$ und $x_{N3} = -5$. Der Term $x^3 + x^2 - 17x + 15$ lässt sich also auch in der Form $(x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 5)$ schreiben. Diese Darstellung ist wesentlich informationsreicher als die ausmultiplizierte Form.

Dieses Verfahren nennt man **Polynomdivision** (ein Polynom summiert die Vielfachen der Potenzen einer Variablen). Die Polynomdivision ist das zentrale **Werkzeug zur Ermittlung der Nullstellen** von ganzrationalen Funktionen mindestens dritten Grades.

2 Dividieren Sie $(x^3 + 3x^2 - x - 3)$ durch $(x + 3)$, $(x + 1)$ und $(x - 1)$.

3 Dividieren Sie $(x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 54x - 45)$ durch $(x + 5)$, $(x + 3)$, $(x - 3)$ und $(x + 1)$.

4 Mit welchem Faktor muss man $(x - 1)$ multiplizieren, um $(x^7 - 1)$ zu erhalten?

5 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $f(x) = 3x^3 - 10x^2 + 7x - 12$
c) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 8x - 2$
d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

Die erste Nullstelle x_{N1} müssen Sie durch Ausprobieren herausbekommen und daraus den Linearfaktor $(x - x_{N1})$ generieren.

6 Kann es sein, dass bei der Polynomdivision ein Rest auftritt, d. h. die Division nicht aufgeht? Untersuchen Sie.

Aufgaben zur Einzelarbeit

Überprüfen Sie Ihre Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben und bewerten Sie anschließend Ihre Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich **wirklich gut!**	Das kann ich **fast!**	Das muss ich **noch üben!**

1 Leiten Sie aus der Funktionsgleichung wesentliche Eigenschaften des zugehörigen Graphen ab. Skizzieren Sie anschließend den Graphen.
a) $f(x) = (x^2 + 8x + 12) \cdot x$
b) $f(x) = -(x + 1) \cdot (-x - 1)$
c) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 1)^2$

2 Geben Sie möglichst viele Eigenschaften des Graphen der Funktion f an.
a) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
b) $f(x) = x \cdot (2x^2 + 8x + 8)$
c) $f(x) = -(x - 1) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x + 1)$

3 Skizzieren Sie nach Bestimmung der Nullstellen die Graphen der Funktionen.
a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$
b) $f(x) = x^6 - 9$
c) $f(x) = (2x^3 - 2x) \cdot x$

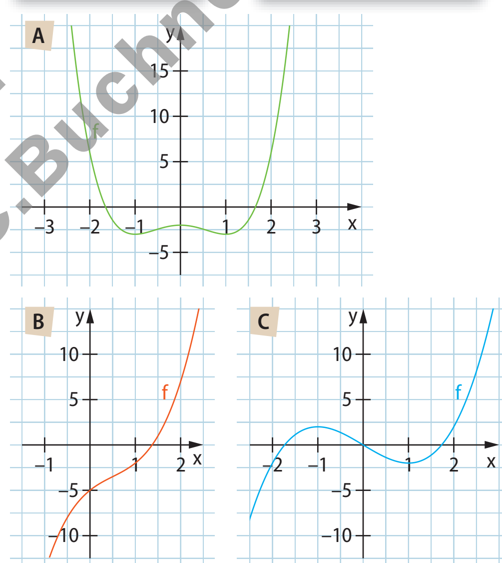
4 Entscheiden Sie, ob die Graphen der angegebenen Funktionen einfache und/oder mehrfache Nullstellen haben. Geben Sie diese jeweils an.
a) $f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)^2$
b) $f(x) = 0{,}5x \cdot (x + 2)^2$
c) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x + 2)$

5 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Achsensymmetrie zur y-Achse bzw. Punktsymmetrie zum Ursprung.
a) $f(x) = x^6 + 2x^2 - 1$
b) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)$
c) $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

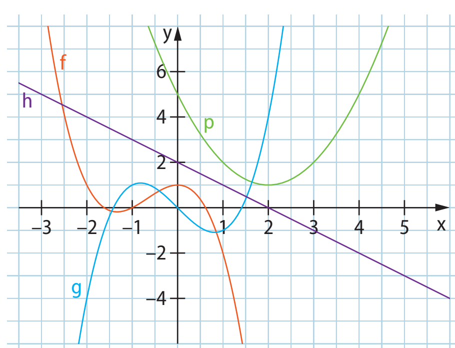
6 Untersuchen Sie die Funktion f auf ihr Verhalten im Unendlichen.
a) $f(x) = -3x^5 + x^2 - 2$
b) $f(x) = 4x^4 + 8x^2 + 4$
c) $f(x) = x^7 - 2x^2 + 1$
d) $f(x) = -x^2 + 5x^5 - 3x^4$
e) $f(x) = (x + 4) \cdot (x - 5) \cdot (x + 6) \cdot (x - 7)$

7 Lösen Sie folgende Gleichungen graphisch und rechnerisch. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.
a) $x^3 + x = -x^2$ **b)** $x^2 + 3 = 4 - 2x$
c) $x^4 + 4 = -x^2 + 6$

8 Ordnen Sie der Funktionsgleichung einen Graphen zu. Begründen Sie.
1 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$
2 $f(x) = x^3 - 3x$
3 $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$



9 Geben Sie jeweils eine mögliche Funktionsgleichung an, die zum abgebildeten Graphen passt.



Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zuerst allein.
2. Suchen Sie sich einen Partner oder eine Partnerin und arbeiten Sie zusammen weiter: Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen. Korrigieren Sie fehlerhafte Antworten.

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie.

A Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat genau drei Nullstellen.

B Die Symmetrie ganzrationaler Funktionen kann man allein an den Exponenten ablesen.

C Das Kriterium $f(x) = f(-x)$ für Achsensymmetrie benötigt man im Grunde genommen gar nicht, weil man die Symmetrie an den Exponenten ablesen kann.

D Nullstellen ganzrationaler Funktionen zweiten Grades bestimmt man stets mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen.

E Die Funktion f mit $f(x) = (x^2 + 2x + 1)^2$ hat keine mehrfache Nullstelle, da der Klammerausdruck kein Linearfaktor ist.

F Nullstelle ist Nullstelle – da gibt es keinen Unterschied zwischen mehrfachen Nullstellen, da schneidet der Graph die x-Achse.

G Um die Gleichung $x^2 + 4x + 4 = 0$ zu lösen, muss man die Lösungsformel für quadratische Gleichungen anwenden.

H Graphische Lösungsverfahren für Gleichungen sind stets ungenau und deshalb mathematisch fragwürdig.

I Das graphische Lösen der Gleichung $x^2 + 9 = 6x$ läuft auf die Schnittpunktbestimmung einer Geraden mit einer Parabel hinaus.

J Die Gleichung $2x^4 + 16x^3 + 32x^2 = 0$ ist eine Gleichung vierten Grades. Dafür haben wir kein Lösungsverfahren, also können wir sie nicht lösen.

K Die Funktion f mit $f(x) = x^3 \cdot (x^3 - x)$ ist eine Funktion dritten Grades, deshalb verläuft sie von links unten nach rechts oben.

L Funktionen vierten Grades verlaufen stets von links oben nach rechts oben.

M Die Gleichung $x^3 = -1$ hat keine Lösung, da man nicht die dritte Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen kann.

N Jede Potenzfunktion mit natürlichem Exponenten ist eine ganzrationale Funktion (aber nicht umgekehrt).

Ich kann …	„Am Ziel!"-Aufgaben	Hilfe
… ganzrationale Funktionen auf ihr Verhalten im Unendlichen überprüfen.	6	S. 16
… den Unterschied zwischen mehrfachen Nullstellen benennen und ganzrationale Funktionen auf die beiden verschiedenen Nullstellenarten untersuchen.	3, 4, A, D, E, F	S. 20
… ganzrationale Funktionen auf Achsen- und auf Punktsymmetrie untersuchen.	5, B, C	S. 26
… die Nullstellen ganzrationaler Funktionen (und damit Gleichungen) graphisch durch Schnittpunktbestimmung lösen.	7, G, H, I, J	S. 24
… die Linearfaktordarstellung bei ganzrationalen Funktionen nutzen, um wesentliche Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen einem Graphen zuzuordnen und umgekehrt.	1, 2, K, L	S. 20, 24
… Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen einem Graphen zuordnen und umgekehrt.	8, 9, M, N	S. 16, 20, 24, 26

2 Startklar!

Aufgabe	Ich kann schon …	Grundwissen
1, 2	… Steigungen von Geraden auf verschiedene Arten bestimmen.	S. 208
3, 4, 5	… die gegenseitige Lage von Punkten und Funktionsgraphen untersuchen.	S. 208
6	… Nullstellen linearer Funktionen bestimmen.	S. 208

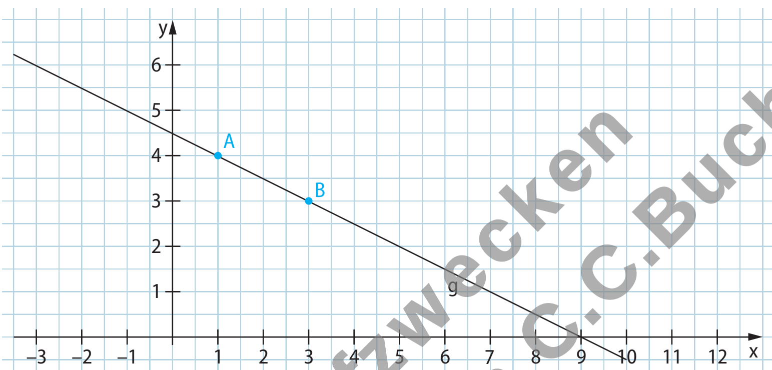
1 Gegeben sind die Punkte A (1 | 3), B (–3 | –5), C (0 | 6) und D (5 | 7). Je zwei der angegebenen Punkte liegen jeweils auf einer Geraden.

a) Zeichnen Sie alle möglichen Geraden in ein Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung von jeder Geraden.

c) Erläutern Sie, wie man allgemein die Steigung einer Geraden durch zwei vorgegebene Punkte berechnet.

2



a) Ermitteln Sie anhand der Abbildung die Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel, den die Gerade g mit der x- bzw. y-Achse einschließt.

3 Überprüfen Sie, ob die Punkte A (1 | 4), B (2 | 0), C (3 | –2), D (–1 | –5) und E (0 | 4) auf, ober- oder unterhalb des Graphen der Funktion f liegen. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$ **b)** $f(x) = 4 \cdot 2^x$ **c)** $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

d) $f(x) = 5x - \frac{3}{x}$ **e)** $f(x) = -3x - 8$ **f)** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

4 Ermitteln Sie die fehlende Koordinate des Punktes A so, dass A auf dem Graphen der Funktion g liegt.

a) $g(x) = 4x + 8$; $A(x_A | 0)$ **b)** $g(x) = 7x + 14$; $A(-2 | y_A)$ **c)** $g(x) = 16x - 3$; $A(0 | y_A)$

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 5x^2$. Ergänzen Sie die fehlenden Koordinaten so, dass die Punkte auf dem Graphen von f liegen.

a) $A(2 | y_A)$ **b)** $B\left(\frac{1}{2} | y_B\right)$ **c)** $C(x_c | 0)$ **d)** $D(x_d | 25)$

6 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion g.

a) $g(x) = 2x$ **b)** $g(x) = -3x + 6$ **c)** $g(x) = 0{,}5x - 7$

2 Einführung in die Differentialrechnung

Einstieg

Einer der größten Wasserparks der Welt ist Yas Waterworld in Abu Dhabi. Eine große Attraktion ist ein Becken, in dem Wellen unterschiedlicher Höhen erreicht werden, auf denen man auf einem Wasserboard surft.
Das Höhenprofil eines Streckenabschnitts der Wellen kann im Intervall [–3; 3] modellhaft durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{16}x^2 + 1$ beschrieben werden (1 Längeneinheit $\cong$ 1 m).
Die x-Achse stellt den Boden des Beckens dar.

- Skizzieren Sie den Graphen der Welle auf dem angegebenen Streckenabschnitt.
- Ermitteln Sie mithilfe einer Wertetabelle, an welchen Stellen sich der höchste bzw. der tiefste Punkt der Welle befindet.
- Bestimmen Sie die Steigung der Welle im Intervall [–3; 2].
- Ermitteln Sie näherungsweise, an welchen Stellen die Welle den steilsten Anstieg hat.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels haben Sie gelernt, …

- … was unter der mittleren und momentanen Änderungsrate zu verstehen ist, und wie man diese bestimmt.
- … wie die Steigung eines Graphen in einem Punkt ermittelt werden kann.
- … den Zusammenhang zwischen der Steigung der Tangente und der Ableitung in einem Punkt des Graphen einer Funktion zu erkennen.
- … die Ableitungsfunktion einfacher Funktionen zu bestimmen.

Kap. 2.1 und 2.2

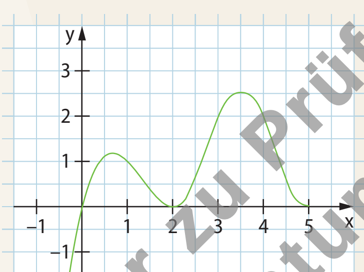
Schnelle Fahrt

Für die Messung von Geschwindigkeiten wird durch die Polizei die Momentangeschwindigkeit eines Fahrzeuges an einer bestimmten Stelle gemessen. Ein weiteres Verfahren besteht darin, dass auf einem bestimmten Streckenabschnitt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs ermittelt wird.

- Informieren Sie sich über die beiden Verfahren und erklären Sie, wie sie technisch umgesetzt werden.
- Vergleichen Sie die beiden Verfahren miteinander. Erläutern Sie Vor- und Nachteile an einem selbst gewählten Beispiel.

Kap. 2.3

Auf der Rennstrecke unterwegs



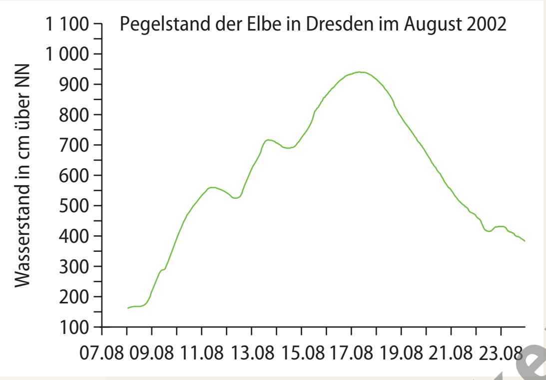
Ein Testauto fährt auf einer Rennstrecke. Für $0 < x < 5$ zeigt das Diagramm die Entfernung des Testautos vom Startpunkt.

- Skizzieren Sie eine mögliche Rennstrecke. Begründen Sie den Verlauf in Ihrer Skizze.
- Ermitteln Sie für signifikante Punkte graphisch den Wert der momentanen Änderung. Erklären Sie die Bedeutung dieses Werts.

Kap. 2.3

Nasse Wege

Im Sommer 2002 waren große Teile Tschechiens, Polens und Deutschlands von einem Hochwasser betroffen. Überschwemmungen an den Flussläufen der Elbe verursachten schwere Schäden und forderten zahlreiche Opfer.
Große Teile der Dresdner Altstadt standen bei der Jahrhundertflut unter Wasser. Die graphische Darstellung zeigt den Pegelstand (Wasserstand in cm über NN) der Elbe in Dresden in der Zeit vom 07.08. bis zum 23.08.2002.

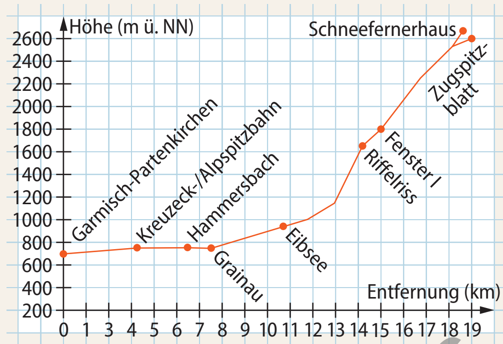


- Bestimmen Sie so genau wie möglich die Änderungsraten des Pegels an folgenden Tagen: 09.08., 15.08. und 17.08.2002. Geben Sie die Änderung in cm pro Stunde an.
- Ermitteln Sie den Tag an dem der Pegel die größte Änderung hatte. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
- Ermitteln Sie die durchschnittliche Änderung des Pegels für die Zeit vom 09.08. bis zum 17.08.2002. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Entdecken

Rechts abgebildet ist das Höhenprofil der neuen Zugspitzbahn.

- Berechnen Sie den Anstieg der Bahnstrecke in den einzelnen Teilstücken.
- Bestimmen Sie den steilsten Anstieg der Bahnstrecke.

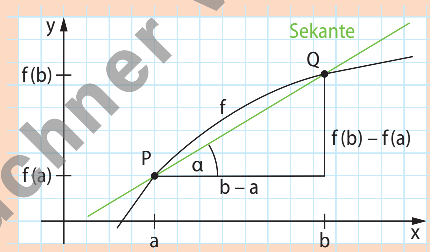


Verstehen

Liegen zwei Punkte P und Q auf dem Graphen einer Funktion f, dann gibt die Steigung der Geraden PQ den „durchschnittlichen" Anstieg des Graphen zwischen P und Q an.

Sind P (a | f(a)) und Q (b | f(b)) zwei Punkte des Graphen der Funktion f, so nennt man die Gerade PQ Sekante des Graphen von f durch P und Q.

Die **Steigung m_{PQ}** dieser Sekante bezeichnet man auch als **mittlere Änderungsrate** der Funktion f zwischen P und Q.



Allgemein ergibt sich die mittlere Änderungsrate einer Funktion f im Intervall [a; b] als Quotient der Differenz der Funktionswerte an den Intervallgrenzen und der Differenz der Intervallgrenzen: $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
Man bezeichnet diesen Quotienten auch als **Differenzenquotienten**.

Beachten Sie: Die Definitionsmenge von f muss das Intervall [a; b] enthalten.

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5x^3 - 3x^2 + 2$; $D = \mathbb{R}$. Die Punkte A (–1 | f(–1)), B (0 | f(0)) und C (2 | f(2)) liegen auf dem Graphen von f.

a) Bestimmen Sie den Differenzenquotienten für die Intervalle $I_1 = [-1; 0]$ und $I_2 = [0; 2]$. Ermitteln Sie die Gleichungen der Sekanten AB und BC.

b) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen und die beiden Sekanten aus Teilaufgabe a).

Lösung:

a) $f(-1) = -2{,}5$; $f(0) = 2$; $f(2) = 2$

Differenzenquotient im Intervall I_1:

$$m_{AB} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{2 - (-2{,}5)}{1} = 4{,}5$$

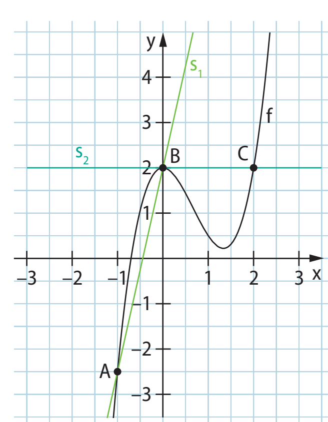
Sekantengleichung: $s_1(x) = 4{,}5 \cdot x + 2$

Differenzenquotient im Intervall I_2:

$$m_{BC} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

Sekantengleichung: $s_2(x) = 0 \cdot x + 2 = 2$

b)



■ Beschreiben Sie die Bedeutung der Sekantensteigung mit eigenen Worten.
■ Begründen Sie, dass sich der Differenzenquotient auch für b < a bestimmen lässt.
■ Beurteilen Sie die Aussage: „Eine mittlere Änderungsrate von 0 bedeutet, dass die Funktion im betrachteten Bereich konstant ist."

Nachgefragt

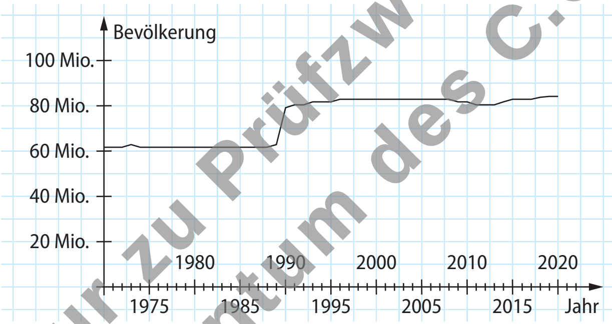
Aufgaben

1 Berechnen Sie für die Funktion f in den angegebenen Intervallen den Differenzenquotienten.

	[–3; –2]	[–0,5; 1]	[0; 1]	[1; 4]	[2; 3,5]
a) $f(x) = 3$					
b) $f(x) = -4x - 7$					
c) $f(x) = x^2$					
d) $f(x) = -2x^3 + x$					
e) $f(x) = 3^x$					
f) $f(x) = \sqrt{x + 5}$					

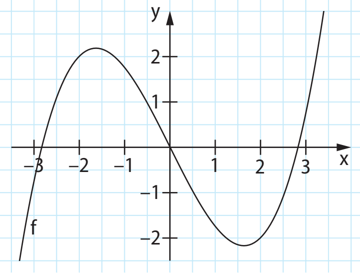
2 Skizzieren Sie den Graphen einer nichtlinearen Funktion f im Intervall [a; b], deren Differenzenquotient in diesem Intervall ...
a) positiv ist. **b)** negativ ist. **c)** gleich null ist.

3 Anfang 1970 lebten 61,00 Mio. Menschen in Deutschland, Anfang 2020 waren es 83,02 Mio. Menschen.



a) Beschreiben Sie die Bevölkerungsentwicklung mit eigenen Worten. Geben Sie anhand der Grafik Intervalle an, in denen die Bevölkerungszahl wuchs bzw. zurückging.
b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate zwischen 1970 und 2020 sowie die mittlere Änderungsrate in 5-Jahres-Blöcken. Vergleichen Sie die Ergebnisse miteinander.

4 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^3 - 2x$.



a) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate von f in den Intervallen [0; 1], [–3; –2] und [2; 3].
b) Geben Sie Intervalle an, in denen der Graph die gleiche mittlere Änderungsrate besitzt wie im Intervall [0; 2]. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

5 Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen mittlerer Änderungsrate und Sekante.

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4$; $D = \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit der y-Achse, die Nullstellen und das Symmetrieverhalten des Graphen von f. Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-3\,;\,3]$.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Sekante im Intervall $[-3;\,2]$ und tragen Sie die Sekante in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) ein.

7 Geben Sie jeweils zwei verschiedene Funktionen an, die im Intervall $[0;\,4]$ beide die mittlere Änderungsrate m haben.

a) $m = 0$ **b)** $m = 0{,}5$ **c)** $m = -2$

Beschreiben Sie, wie Sie die Funktionen bestimmt haben.

8 Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f in Abhängigkeit von h im angegebenen Intervall I (mit $h \in \mathbb{R}$). Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und beurteilen Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate im angegebenen Intervall.

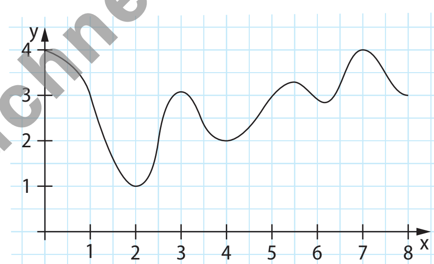
a) $f(x) = 3x^2$; $I = [-h;\,h]$ **b)** $f(x) = 2^{x+1}$; $I = [0{,}5;\,0{,}5 + h]$ **c)** $f(x) = \frac{2}{x}$; $I = [0{,}5;\,0{,}5 + h]$

9 Erläutern Sie, in welchem der Intervalle $[0;\,2]$, $[2;\,5]$ bzw. $[5;\,8]$ der Differenzenquotient einer Funktion mit dem abgebildeten Graphen …

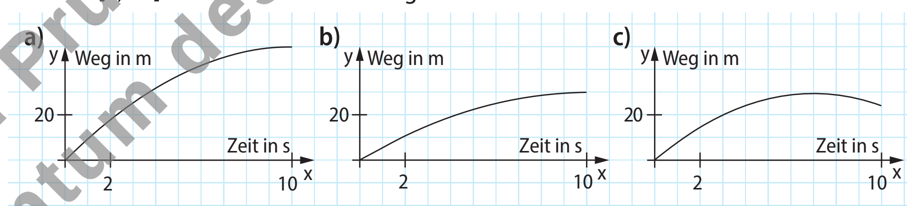
a) positiv ist.

b) gleich null ist.

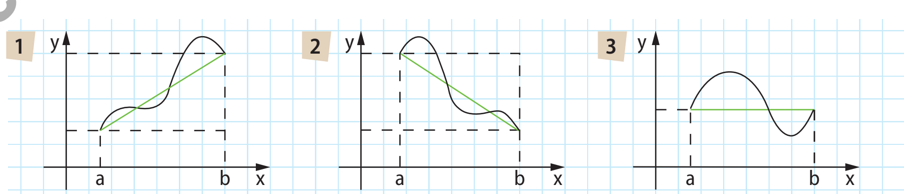
c) negativ ist.



10 Ermitteln Sie aus den abgebildeten Diagrammen die jeweilige mittlere Änderungsrate im Intervall $[2;\,10]$. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



11



a) Die Abbildungen zeigen drei Funktionsgraphen im Intervall $[a;\,b]$. Vergleichen Sie die mittleren Änderungsraten dieser Funktionen im Intervall $[a;\,b]$.

b) Skizzieren Sie die Abbildungen in Ihr Heft, wählen Sie jeweils $a < c < b$ und beschreiben Sie die mittleren Änderungsraten im Intervall $[a;\,c]$.

c) Beschreiben Sie anhand der Abbildungen, welche Bedeutung die mittlere Änderungsrate einer Funktion f hat, wenn f(x) der in der Zeit x zurückgelegte Weg ist.

12 Interpretieren Sie die mittlere Änderungsrate im Sachzusammenhang. Übertragen Sie hierzu die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie sie.

x	y	mittlere Änderungsrate
Zeit	Weg	
Zeit		Durchschnittsbeschleunigung
	Flughöhe	durchschnittliche Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit
Zeit	Wassermenge	
	Benzinvolumen	durchschnittlicher Benzinverbrauch
	Luftdruck	durchschnittliche Luftdruckänderung

13 Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = 2x^2$; $D = \mathbb{R}$. Geben Sie an, in welchem Verhältnis die Änderung des Funktionswerts f (x) zur Änderung des Arguments x im Intervall I steht.

a) $I = [1; 2]$ **b)** $I = [0; 10]$ **c)** $I = [10; 20]$ **d)** $I = [50; 100]$

14 Geben Sie den Differenzenquotienten der Funktion f mit $f(x) = mx + t$; $D = \mathbb{R}$; $m, t \in \mathbb{R}$, im Intervall [a; b] an. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

15 Elena hat bei einer Autobahnfahrt mit dem Navigationssystem folgende Werte notiert:

verstrichene Zeit in h	0	1,5	4	4,7
zurückgelegter Weg in km	0	150	400	530

Berechnen Sie, in welchem Abschnitt der Fahrt die Durchschnittsgeschwindigkeit am größten war.

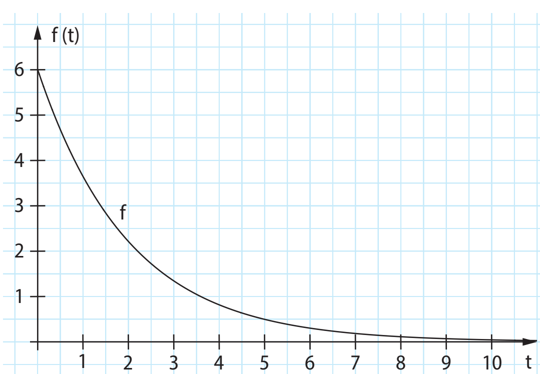
16 Ein kugelförmiger Luftballon (Radiuslänge 10 cm) wird auf Radiuslänge 15 cm aufgeblasen. Ermitteln Sie, in welchem Verhältnis…

a) die Zunahme seines Volumens

b) die Zunahme seines Oberflächeninhalts

zur Zunahme seiner Radiuslänge steht.

17 Eine Glasglocke wird von einer Vakuumpumpe leergepumpt. Der abgebildete Graph der Funktion f zeigt die Restmenge an Luft, die unterhalb der Glasglocke verbleibt (in g), in Abhängigkeit der abgelaufenen Zeit t (in min) an.

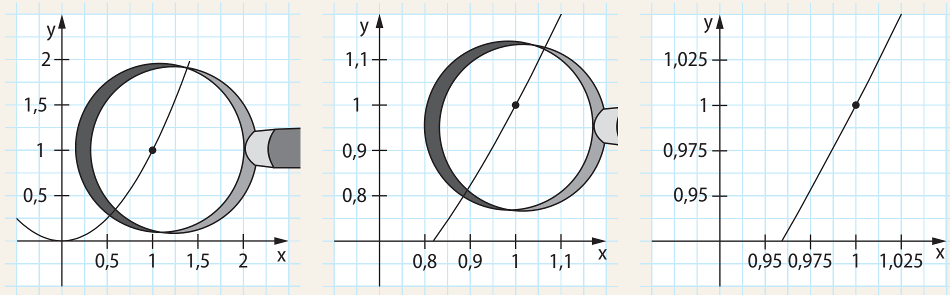


a) Geben Sie an, wie viel Luft zu Beginn unter der Glasglocke war.

b) Zeigen Sie, dass es sich näherungsweise um eine exponentielle Abnahme handelt.

c) Ermitteln Sie graphisch die mittlere Änderungsrate in den ersten vier Minuten. Interpretieren Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate in diesem Sachkontext.

Entdecken



Die drei Bilder zeigen in immer stärkerer Vergrößerung den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, in der Umgebung des Punktes P (1 | 1). Beschreiben Sie Auffälligkeiten, indem Sie den Verlauf der Graphen in den jeweiligen Abschnitten miteinander vergleichen.

Verstehen

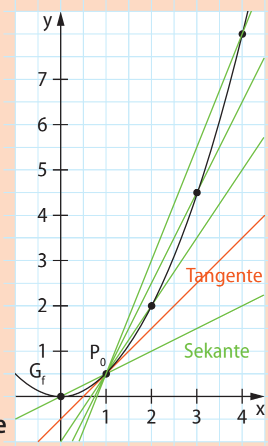
Betrachtet man den Graphen einer Funktion f in einem immer kleiner werdenden Abschnitt, dann scheint sich der Graph in dem Ausschnitt immer mehr einer Gerade anzunähern.

limes (lat.): Grenze

Strebt der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ einer Funktion f, die auf dem Intervall I definiert ist, für $x \to x_0$ ($x_0 \in I$) gegen einen **Grenzwert**, so heißt dieser Grenzwert **Differentialquotient von f an der Stelle x_0**. Man bezeichnet diesen Grenzwert als **Ableitung von f an der Stelle x_0** und schreibt:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ($\lim\limits_{x \to x_0}$: „Limes für x gegen x_0").

Falls dieser Grenzwert existiert, gilt: Bewegt sich der Punkt P (x | f (x)) entlang des Graphen von f auf den Punkt P_0 (x_0 | f (x_0)) zu, so strebt die Sekante durch P und P_0 einer Grenzgeraden durch P_0 zu, der Tangente im Punkt P_0.



Der Differentialquotient wird auch als **momentane** oder **lokale Änderungsrate** bezeichnet, da $f'(x_0)$ die **Steigung der Tangente** von f an der Stelle x_0 angibt: $m(x_0) = f'(x_0)$. f heißt **an der Stelle x_0 differenzierbar**, wenn der Differentialquotient von f an der Stelle x_0 existiert.

Als Tangente des Graphen von f in P_0 wird diejenige Gerade durch P_0 bezeichnet, deren Steigung gleich dem Grenzwert $m(x_0) = f'(x_0)$ der Sekantensteigung ist.

Beispiel

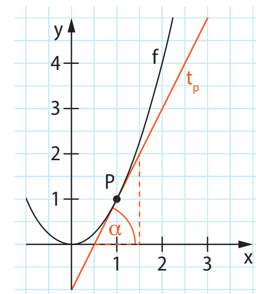
a) Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = x^2$; $D = \mathbb{R}$, in $x_0 = 1$.

b) Geben Sie eine Gleichung der Tangente t_P des Graphen von f im Punkt P an. Ermitteln Sie weiter die Größe des Winkels α, den die Tangente t_P mit der positiven x-Achse bildet.

Lösung:

a) $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x + 1) \cdot (x - 1)}{x - 1}$
$= \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

b) Tangentengleichung: $y = m \cdot x + n$
$m = 2$ an der Stelle $x_0 = 1$ (siehe Teilaufgabe a)), d. h. $y = 2 \cdot x + n$
Für die Tangente im Punkt P (1 | 1) gilt: $1 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1$;
Tangentengleichung: t_P: $y = 2 \cdot x - 1$
$m = \tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63{,}4°$



- Beschreiben Sie mit eigenen Worten den Zusammenhang zwischen mittlerer und momentaner Änderungsrate.
- Begründen Sie, ob es Funktionen gibt, bei denen die momentane Änderungsrate stets gleich null ist.
- Erklären Sie, welche momentane Änderungsrate eine lineare Funktion f mit $f(x) = mx + t$; $D = \mathbb{R}$; $m, t \in \mathbb{R}$, an einer Stelle $x_0 \in D$ besitzt.

Nachgefragt

Aufgaben

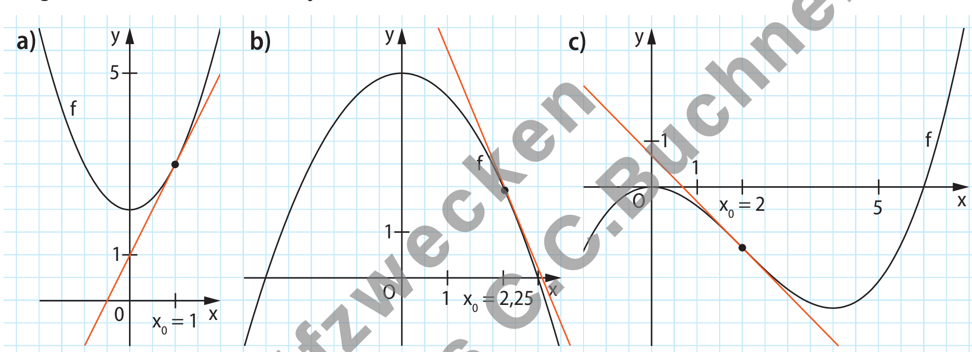
1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2 - x - 0{,}5$; $D = \mathbb{R}$.

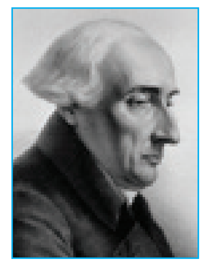
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion in einem Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate in $x_0 = 2$ mithilfe des Differentialquotienten.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P\,(2\,|\,f(2))$.

2 Bestimmen Sie anhand der Abbildung näherungsweise den Wert der momentanen Änderungsrate von f an der Stelle x_0.





Die Schreibweise f'(x) geht auf den Mathematiker Joseph Louis Lagrange (1736 bis 1813) zurück.

3

1 $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 1$	2 $f(x) = (x-3)^2$	3 $f(x) = \frac{1}{2x}$	4 $f(x) = x^2 - x$

a) Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P\,(3\,|\,f(3))$. Bestimmen Sie auch die Definitionsmenge von f in $\mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie jeweils die Größe des Winkels, den die Tangente aus Teilaufgabe a) mit der x-Achse einschließt. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

4 Berechnen Sie die Ableitung von f an der Stelle x_0 mithilfe des Differentialquotienten.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$; $x_0 = 2$	**b)** $f(x) = (x-2)^2 + 1$; $x_0 = -1$	**c)** $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 9$
d) $f(x) = x^2 - (4 + x^2)$; $x_0 = 7$	**e)** $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$; $x_0 = -2$	**f)** $f(x) = (x-2)^2 + x - 7$; $x_0 = 1$

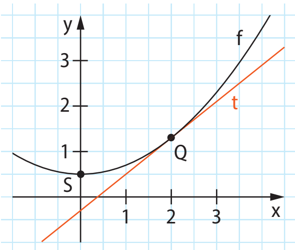
5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; $D = \mathbb{R}$, und $P\,(2\,|\,f(2))$.

a) Zeichnen Sie zunächst den Graphen von f im Intervall $[-2; 5]$.

b) Berechnen Sie anschließend folgende Werte und veranschaulichen Sie diese geometrisch am Graphen aus Teilaufgabe a).

1 $f'(1)$ **2** $f'(-1)$ **3** $f'(0)$ **4** $f'(2)$ **5** $f'(4)$ **6** $f'(3)$

6 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x$; $D = \mathbb{R}$.
Die Tangente im Punkt $Q(-2 \mid f(-2))$ bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente und den Flächeninhalt dieses Dreiecks.



7 **a)** Ermitteln Sie mithilfe der nebenstehenden Abbildung näherungsweise die Steigung der Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $Q(2 \mid 1{,}3)$.

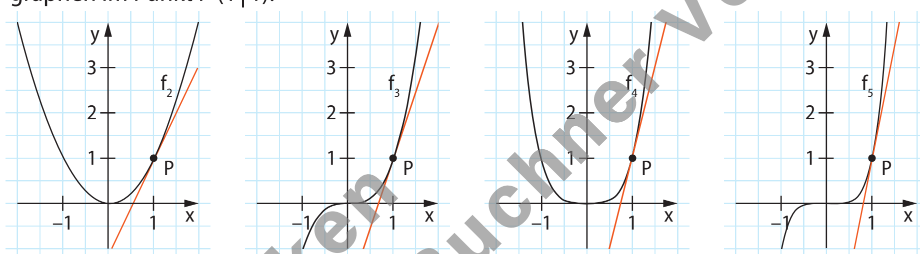
b) Der Graph von f ist eine zur y-Achse symmetrische Parabel, die die y-Achse im Punkt $S(0 \mid 0{,}5)$ schneidet.

1 Geben Sie eine Gleichung von f an.

2 Bestimmen Sie rechnerisch die Steigung der Tangente t im Punkt Q.

c) Vergleichen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b).

8 Die Abbildungen zeigen die Graphen der Funktionen f_2, f_3, f_4 und f_5 mit $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x^4$ und $f_5(x) = x^5$; $D = \mathbb{R}$, sowie jeweils die Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt $P(1 \mid 1)$.



Berücksichtigen Sie Eigenschaften der Funktion sowie die Steigung der Tangenten.

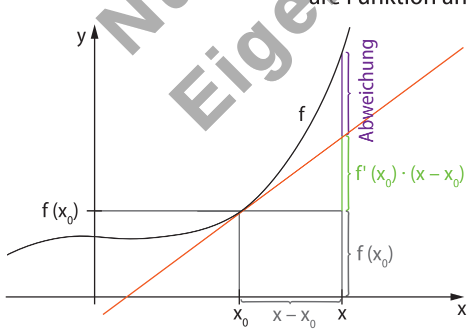
a) Beschreiben und vergleichen Sie die vier Funktionsgraphen und die vier eingezeichneten Tangenten.

b) Berechnen Sie $f'_2(1)$, $f'_3(1)$, $f'_4(1)$ und $f'_5(1)$. Beschreiben Sie Zusammenhänge und geben Sie eine Vermutung bezüglich $f'_{10}(1)$ und $f'_n(1)$; $n \in \mathbb{N}$, an. Überprüfen Sie Ihre Vermutung mithilfe eines Computerprogramms.

c) Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f_2, f_3, f_4 und f_5 im Punkt $P(1 \mid 1)$.

d) Berechnen Sie für jede der vier Tangenten die Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit der x-Achse und mit der y-Achse. Beschreiben Sie Zusammenhänge.

9 Mithilfe der momentanen Änderungsrate lassen sich näherungsweise Funktionswerte berechnen, d. h. eine Funktion f lässt sich auf einem sehr kleinen Intervall durch eine lineare Funktion annähern (approximieren).



a) Begründen Sie, wie sich aus der Definition der momentanen Änderungsrate die lineare Näherung (Approximation) $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$ herleiten lässt.

b) Erläutern Sie, warum diese lineare Näherung nur in einer sehr kleinen Umgebung von x_0 gilt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3$.
Bestimmen Sie mithilfe der linearen Approximation Näherungswerte für $x = 3{,}1$ und $x = 3{,}5$. Vergleichen Sie die Näherungswerte mit den tatsächlichen Funktionswerten. Erläutern Sie, wann eine lineare Approximation Sinn macht.

d) Für die Gleichung der Tangente t an den Graphen der Funktion f in einem Punkt $B(x_B \mid y_B)$ gilt: $y = f'(x_b) \cdot (x - x_b) + f(x_b)$. Vergleichen Sie mit der linearen Approximation.

10 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + x + 1$; $D = \mathbb{R}$.

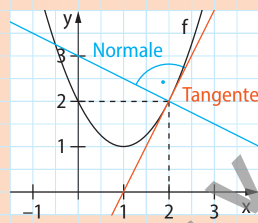
a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

b) Bestimmen Sie $f'(3)$. Stellen Sie damit die Gleichung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $P(3\,|\,f(3))$ auf. Ergänzen Sie die Tangente in der Skizze aus Teilaufgabe a).

c) Ermitteln Sie graphisch die Gerade, die die Tangente aus Teilaufgabe b) im Punkt P senkrecht schneidet. Geben Sie mithilfe des Graphen die zugehörige Gleichung an.

11 **a)** Untersuchen Sie mithilfe eines Computerprogramms den Zusammenhang der Steigung zweier Geraden, die senkrecht aufeinander stehen.

Die Gerade, die auf der Tangente eines Graphen im Berührpunkt senkrecht steht, heißt **Normale**.
Für die Steigung von Tangente und Normale gilt:
$m_T \cdot m_N = -1$.



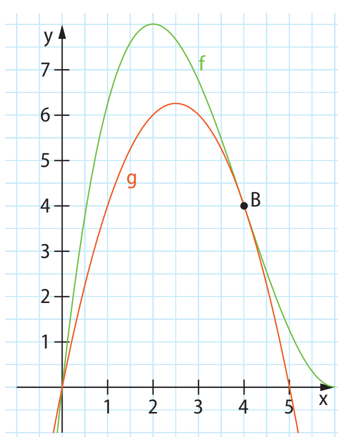
Weiterdenken

b) Bestätigen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe a) den angegebenen Zusammenhang und finden Sie Argumente für diesen.

12 Bestimmen Sie zunächst die Gleichung der Tangente und anschließend die Gleichung der Normalen im Punkt P. Gehen Sie bei der Bestimmung der Gleichung der Normalen wie bei der Tangente vor: **1** Steigung m bestimmen **2** Punkt P einsetzen
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mithilfe eines Computerprogramms.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$; $P(2\,|\,f(2))$ **b)** $f(x) = x^2 + 3x$; $P(-1\,|\,f(-1))$ **c)** $f(x) = x^2 + 2$; $P(4\,|\,f(4))$

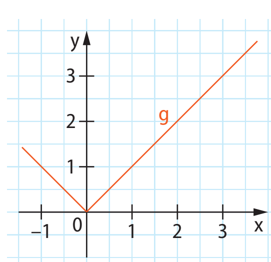
13 Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x$; $D = \mathbb{R}$, und den Graphen der Funktion g mit $g(x) = -x^2 + 5x$; $D = \mathbb{R}$.



a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung $O(0\,|\,0)$ schneiden und sich im Punkt B berühren. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes B.

b) Ermitteln Sie mithilfe des Differentialquotienten eine Gleichung der gemeinsamen Tangente t an die Graphen von f und g im Punkt B.

14 Der Differentialquotient existiert genau dann, wenn die Grenzwerte bei links- und rechtsseitiger Annäherung existieren und beide Grenzwerte übereinstimmen.



a) Zeigen Sie, dass die sogenannte „Betragsfunktion" f mit $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.

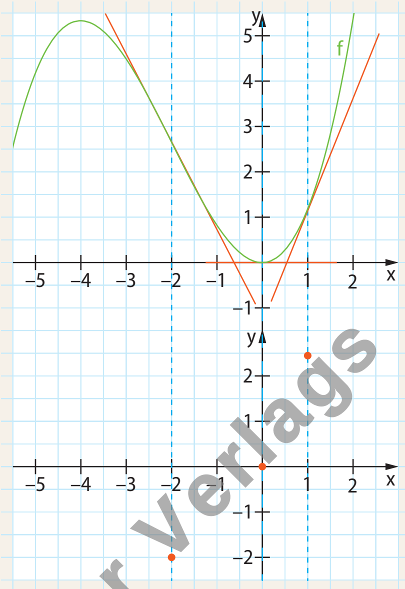
b) Geben Sie eine Gleichung einer Funktion an, die an der Stelle $x_0 = -5$ nicht differenzierbar ist.

Entdecken

Sie können dazu auch ein Computerprogramm nutzen.

Untersuchen Sie die Steigung der Tangenten an verschiedenen Stellen $x \in D$ der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2$; $D = \mathbb{R}$.

- Übertragen Sie den Graphen der Funktion in Ihr Heft. Zeichnen Sie an mindestens acht verschiedene Stellen die Tangente an den Graphen von f und bestimmen Sie graphisch die Steigung der Tangente.
- Zeichnen Sie wie nebenan ein zweites Koordinatensystem unter das bisherige Koordinatensystem. Markieren Sie im neuen Koordinatensystem die Steigung der Tangenten als y-Wert zu jeder Stelle.
- Verbinden Sie die Punkte im zweiten Koordinatensystem miteinander. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen.



Verstehen

Existiert an jeder Stelle $x \in D$ einer Funktion f der Differentialquotient $f'(x)$, so erhält man eine neue Funktion, die jeder Stelle x den zugehörigen Differentialquotienten zuordnet.

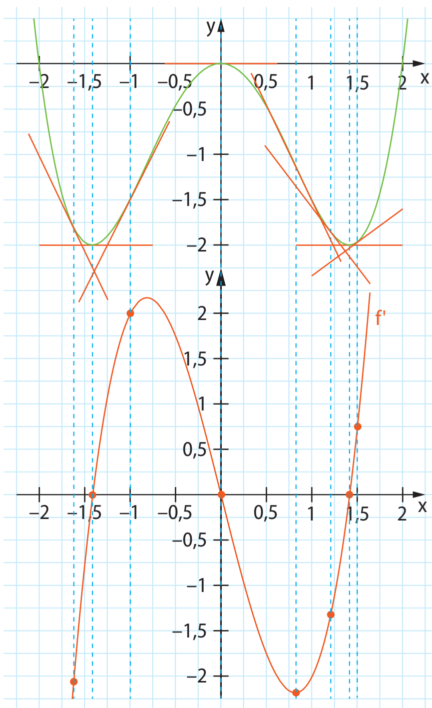
Eine Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn in jeder Stelle $x \in D$ der Differentialquotient existiert. Die Funktion f', die jeder Stelle $x \in D$ einer differenzierbaren Funktion f, den Wert ihrer Ableitung in x zuordnet, nennt man die **Ableitungsfunktion f'** von f.

Beispiel

Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Bestimmen Sie graphisch die zugehörige Ableitungsfunktion f'. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Lösung:

1. Zeichnen Sie die Tangente des Graphen der Funktion f an verschiedenen Stellen ein. *Tipp:* Nutzen Sie besondere Punkte des Graphen von f.
2. Bestimmen Sie an jeder Stelle die Steigung der Tangente.
3. Ordnen Sie in einem neuen Koordinatensystem jeder Stelle x die zugehörige Steigung der Tangente als y-Wert zu.
4. Verbinden Sie die eingezeichneten Punkte zur Ableitungsfunktion f'.



Nachgefragt

- Beschreiben Sie mit eigenen Worten den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion f und dem Graphen deren Ableitungsfunktion f'.
- Beschreiben Sie, wie der Graph einer Funktion f an den Stellen verläuft, an denen der Graph der Ableitungsfunktion f' die x-Achse schneidet.
- Zeichnen Sie den Graphen einer Ableitungsfunktion f'. Beschreiben Sie damit den Verlauf des Graphen der Funktion f.

Aufgaben

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x$; $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall [0; 5].

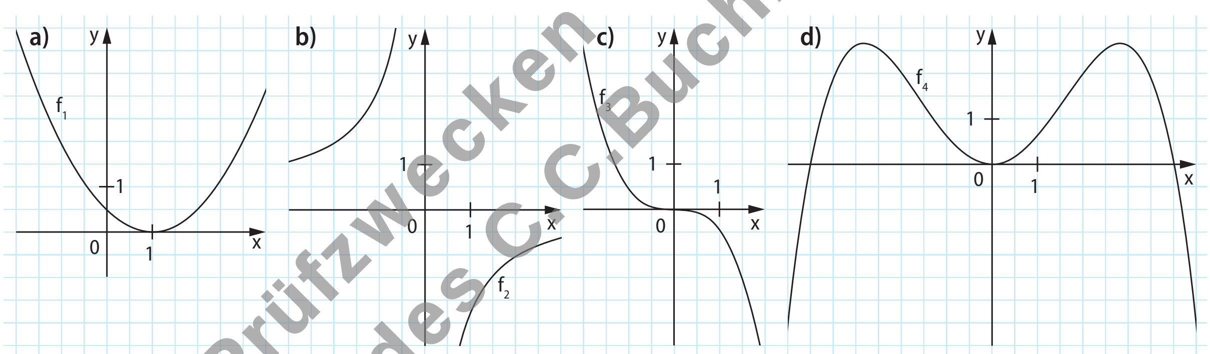
b) Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate für x = 3 näherungsweise zeichnerisch.

c) Ermitteln Sie f' (3) rechnerisch.

d) Ermitteln Sie, wann die momentane Änderungsrate 2 ist.

e) Geben Sie an, wann die momentane Änderungsrate am größten ist.

2 Die Abbildungen zeigen vier Funktionsgraphen. Übertragen Sie jeden Graphen möglichst genau in Ihr Heft und skizzieren Sie dann dort den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.



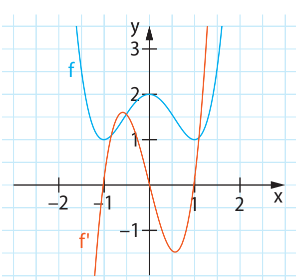
3 Begründen Sie den folgenden Zusammenhang:

Die Ableitungsfunktion f' einer differenzierbaren Funktion f gibt für jedes $x \in D$ die Steigung m der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(x\,|\,f(x))$ an.

4 Überprüfen Sie, sowohl graphisch als auch rechnerisch, ob die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 2x^2 - 1$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ Tangenten haben, die identisch oder parallel zur Geraden s mit $s(x) = 4x - 3$ verlaufen.

Sie können ein Computerprogramm nutzen.

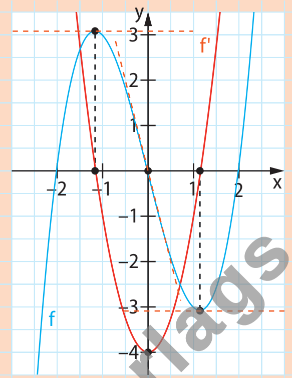
5 In der nebenstehenden Abbildung sehen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ und den Graphen der Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 4x^3 - 4x$.
Geben Sie an, welche Rückschlüsse man vom Verlauf des Ableitungsgraphen auf den Verlauf des Ausgangsgraphen und umgekehrt schließen kann.



6 Für den Graphen einer Funktion f und den Graphen der dazugehörigen Ableitungsfunktion f' gelten folgende Zusammenhänge:

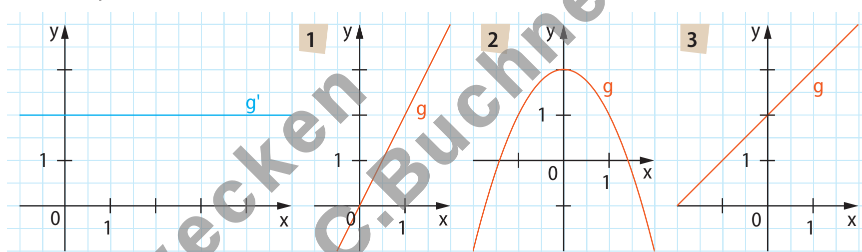
Weiterdenken

- Eine steigende Tangente an den Graphen von f in $x_0 \in D$ bedeutet, dass $f'(x_0) > 0$.
- Eine fallende Tangente an den Graphen von f in $x_0 \in D$ bedeutet, dass $f'(x_0) < 0$.
- Eine waagerechte Tangente an den Graphen von f in $x_0 \in D$ bedeutet, dass $f'(x_0) = 0$.

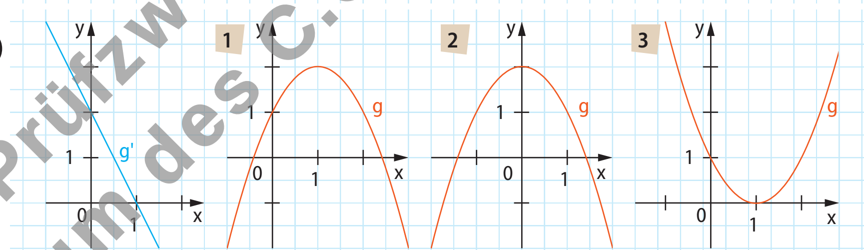


Die erste Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion g'. Genau eine der Abbildungen **1** bis **3** stellt den Graphen der ursprünglichen Funktion g dar. Begründen Sie, welcher Graph dies ist.

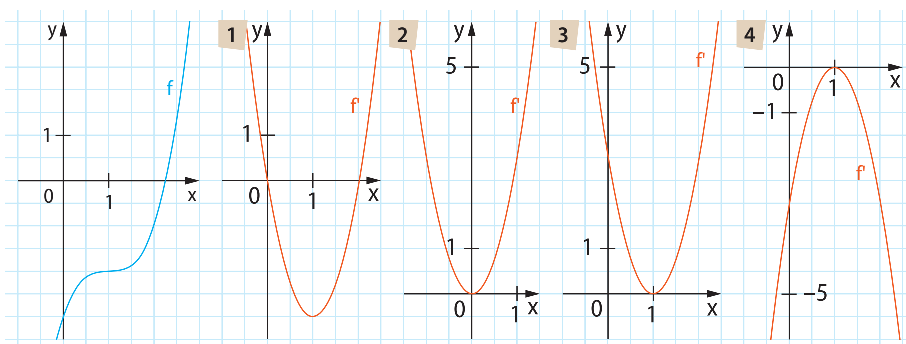
a)



b)



7 Die erste Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f. Genau eine der vier Abbildungen **1** bis **4** stellt den Graphen der Ableitungsfunktion f' dar. Finden Sie durch Ausschlussverfahren heraus, welche der Abbildungen dies ist.



8 Für die Grenzwertbestimmung verwendet man häufig die sogenannte **h-Methode**.

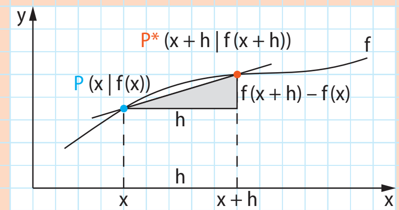
Für die Ableitung an der Stelle x_0 einer Funktion f gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

und für die Gleichung der Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h};$$

h kann dabei positiv oder negativ sein.



Beispiel: Bestimmung der Ableitungsfunktion f' zur Funktion f mit $f(x) = x^3$; $D = \mathbb{R}$.

Lösung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Die Ableitungsfunktion f' von f ist gegeben durch $f'(x) = 3 \cdot x^2$; $D = \mathbb{R}$.

Beschreiben Sie die Bedeutung von h bei der Bestimmung der Ableitungsfunktion.

Weiterdenken

Bei der h-Methode wird die Differenz $x - x_0$ durch h abgekürzt.

Beachten Sie: Der Grenzwert kann schrittweise für jeden Summanden gebildet werden.

$$\begin{array}{ccccc} 3x^2 & + & 3xh & + & h^2 \\ \downarrow{\scriptstyle h \to 0} & & \downarrow{\scriptstyle h \to 0} & & \downarrow{\scriptstyle h \to 0} \\ 3x^2 & + & 0 & + & 0 \end{array}$$

9 Ermitteln Sie die Ableitungsfunktion f' mithilfe der h-Methode in x_0 und allgemein.

a) $f(x) = x^2 + 1$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = -2$
b) $f(x) = x^3 + x$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = 0$
c) $f(x) = x^3 + 2x - 1$; $D = \mathbb{R}$; $x_0 = -1$
d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x_0 = 1$

10 **a)** Ermitteln Sie jeweils die Ableitung der Funktionen f_1 bis f_4 ($D = \mathbb{R}$) mithilfe der h-Methode.

1 $f_1(x) = 0{,}5x^2$ **2** $f_2(x) = 0{,}5x^2 + 3$ **3** $f_3(x) = 0{,}5x^2 + \frac{1}{5}$ **4** $f_4(x) = 0{,}5x^2 + 1000$

b) Formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Funktionen und Ableitungsfunktionen aus Teilaufgabe a).

11 Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^2 + 2x - 1$; $D = \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: $f'(x) = 2x + 2$; $D = \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass jede Funktion g mit der Gleichung $g(x) = x^2 + 2x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ die Ableitungsfunktion f' hat.

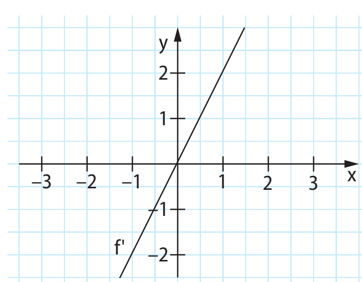
12 Skizzieren Sie jeweils den Graphen einer Funktion f, deren Ableitungsfunktion f' die angegebene Eigenschaft besitzt.

a) f' hat keine Nullstellen
b) f' hat genau eine Nullstelle
c) f' ist stets negativ
d) f' ist niemals negativ

13 Gegeben ist der Graph einer Ableitungsfunktion mit $f'(x) = 2x$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung einer dazugehörigen Funktion f.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f und f' in ein Koordinatensystem. Überprüfen Sie den Zusammenhang zwischen dem tiefsten Punkt von f und der Nullstelle von f'.



Entdecken

- Übertragen Sie die Tabelle in Ihr Heft und ergänzen Sie die Ableitungsfunktionen.

f (x)	x^4	x^3	x^2	x	1
f' (x)					

- Stellen Sie eine Vermutung für einen Zusammenhang zwischen den Potenzfunktionen und ihren Ableitungsfunktionen auf.
- Verallgemeinern Sie Ihre Vermutung für $f(x) = x^q$; $q \in \mathbb{Q}$. Verwenden Sie ein Computerprogramm, um Ihre Vermutung zu überprüfen.

Verstehen

Untersucht man Zusammenhänge zwischen einer Funktion f und deren Ableitungsfunktion f', so erkennt man, dass in manchen Fällen die Ableitungsfunktion einfach bestimmt werden kann.

Eine Funktion f mit $f(x) = x^q$; $q \in \mathbb{Q}$, ist differenzierbar und für ihre Ableitungsfunktion f' gilt: $f'(x) = q \cdot x^{q-1}$. Diese Regel nennt man **Potenzregel**.

Eine Funktion f mit $f(x) = x^q$; $q \in \mathbb{Q}$, wird also abgeleitet, indem man im Term der Ableitungsfunktion den Exponenten als Faktor voranstellt und den Exponenten um 1 vermindert.

Beispiele

I. Bestimmen Sie mithilfe der Potenzregel die Ableitungsfunktionen.

a) $f(x) = x^7$ **b)** $f(x) = x^{12}$ **c)** $f(x) = x$

Erinnern Sie sich:
$x = x^1$
$1 = x^0$

Lösung:

a) $f(x) = x^7$
$f'(x) = 7x^6$

b) $f(x) = x^{12}$
$f'(x) = 12x^{11}$

c) $f(x) = x^1$
$f'(x) = 1x^0 = 1$

II. Begründen Sie die Potenzregel für Exponenten $n \in \mathbb{N}$ mithilfe der h-Methode.

Lösung

Es gilt:

1 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$

2 **Pascal'sches Dreieck** zum Ausmultiplizieren von $(x+y)^n$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & \boxed{1} & & \boxed{2} & & \boxed{1} & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$n = 2$: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
(binomische Formel)

$n = 3$: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

3 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + h^2(\ldots) - x^n}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{h \cdot (nx^{n-1} + h(\ldots))}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} [nx^{n-1} + h(\ldots)]$

$= nx^{n-1}$

Der Grenzwert kann schrittweise für jeden Summanden gebildet werden.

1 Um mit h kürzen zu können, multiplizieren wir die Klammer im Zähler aus.

2 Mit dem Pascal'schen Dreieck gilt: Für $(x+h)^n$ erhält man nacheinander $x^n, hx^{n-1}, h^2x^{n-2}, \ldots, h^{n-1}x, h^n$. Die Vorfaktoren für den ersten und letzten Term sind gleich 1, für den zweiten und vorletzten Term gleich n. Dazwischen hat man weitere Vorfaktoren.

3 Im Zähler entfällt x^n wegen der Subtraktion mit x^n. Der erste verbleibende Term enthält ein h, ab dem zweiten Term ist sogar mindestens h^2 enthalten. So kann man h kürzen und erhält dann durch Bildung des Grenzwerts das Ergebnis.

Nachgefragt

- Beschreiben Sie die Potenzregel mit eigenen Worten.
- Erklären Sie die einzelnen Schritte in der Herleitung der Potenzregel in Beispiel II mit eigenen Worten. Nutzen Sie den Aufbau des Pascal'schen Dreiecks.

Aufgaben

1 Bilden Sie jeweils die Ableitungsfunktion f' der Funktion f mithilfe der Potenzregel.

a) $f(x) = x^6$ **b)** $f(x) = x^{14}$ **c)** $f(x) = x^{-12}$
d) $f(x) = x^{-5}$ **e)** $f(x) = x^3$ **f)** $f(x) = x$
g) $f(x) = x^{-1}$ **h)** $f(x) = x^{2020}$ **i)** $f(x) = \frac{1}{x^{-2}}$
j) $f(x) = x^{2n}; n \in \mathbb{N}$ **k)** $f(x) = x^{4n+1}; n \in \mathbb{N}$ **l)** $f(x) = \sqrt{x}$

2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P. Beachten Sie den Zusammenhang zwischen Ableitungsfunktion und Steigung der Tangente im Punkt P.

a) $f(x) = x^5$; $P(-1\,|\,f(-1))$ **b)** $f(x) = x^{-3}$; $P(2\,|\,f(2))$ **c)** $f(x) = x^6$; $P(1\,|\,f(1))$
d) $f(x) = x^4$; $P(\sqrt{2}\,|\,f(\sqrt{2}))$ **e)** $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $P(0{,}5\,|\,f(0{,}5))$ **f)** $f(x) = x^2$; $P(-2\sqrt{2}\,|\,f(-2\sqrt{2}))$

3 Fassen Sie die Terme der angegebenen Funktionen zunächst mithilfe der Potenzgesetze zu einer Potenz zusammen. Bestimmen Sie anschließend die Ableitungsfunktion.

a) $f(x) = x^7 \cdot x^5$ **b)** $f(x) = x^3 \cdot x^{-5}$ **c)** $f(x) = x^{-2} \cdot x^{-3}$
d) $f(x) = x^4 \cdot x^{-4}$ **e)** $f(x) = (x^7)^3$ **f)** $f(x) = (x^{-2})^{-4}$
g) $f(x) = (x^{-2})^3$ **h)** $f(x) = \frac{1}{x^4}$ **i)** $f(x) = \frac{x^2}{x^5}$
j) $f(x) = \frac{1}{x^{-4}}$ **k)** $f(x) = \left(\frac{1}{x^7}\right)^{-2}$ **l)** $f(x) = \left(\frac{1}{x^8}\right)^5$
m) $f(x) = x^2 + 2x - x \cdot (x+1)$ **n)** $f(x) = \sqrt{x^6}$ **o)** $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^{-9}}\right)^{-2}$

4 Auch die konstante Funktion kann man ableiten. Betrachten Sie dazu die angegebenen Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4.

1 $f_1(x) = 3$ **2** $f_2(x) = -2$ **3** $f_3(x) = 2{,}5$ **4** $f_4(x) = 0$

a) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 bis f_4 und untersuchen Sie die Steigung der Tangenten an verschiedenen Stellen x_0.
b) Begründen Sie den folgenden Zusammenhang:

Jede konstante Funktion f mit $f(x) = a$; $D = \mathbb{R}$, ist differenzierbar für alle Werte aus ihrer Definitionsmenge. Ihre Ableitungsfunktion f' ist konstant gleich null, d. h. $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$.

5 Und nun einmal umgekehrt: Gegeben ist die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Bestimmen Sie eine zugehörige Funktionsgleichung von f und beschreiben Sie Ihr Vorgehen. Machen Sie die Probe, indem Sie Ihr Ergebnis ableiten.

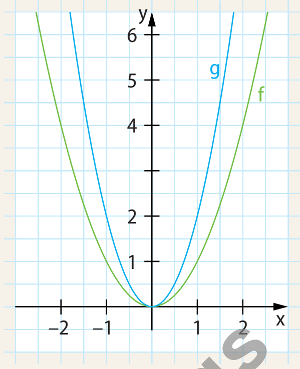
1 $f'(x) = 4x^3$ **2** $f'(x) = 17x^{16}$ **3** $f'(x) = -3x^{-4}$ **4** $f'(x) = -8x^{-9}$

6 Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Gleichung der Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = q \cdot x^{q-1}$; $q \in \mathbb{Q}$, und der Gleichung der Funktion f selbst.

Entdecken

Die Abbildung zeigt die Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$ und der Funktion g mit $g(x) = 2x^2$.

- Erläutern Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.
- Formulieren Sie eine Vermutung, welche Konsequenzen der Faktor 2 für die Steigung der Tangenten an den Graphen von g gegenüber denen an den Graphen von f hat.
- Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen von f und g. Beschreiben Sie den Einfluss des Vorfaktors 2 auf die Ableitungsfunktion von g.



Verstehen

Multipliziert man einen konstanten Faktor zu einer differenzierbaren Funktion oder addiert man zwei differenzierbare Funktionen, so kann man für die entstandene Funktion ebenfalls Ableitungsregeln herleiten.

1 Faktorregel

Eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^q$; $q \in \mathbb{Q}$, ist differenzierbar. Für ihre Ableitungsfunktion f' gilt: $f'(x) = a \cdot q\,x^{q-1}$.

Allgemein gilt:
Ist g eine differenzierbare Funktion und $a \in \mathbb{R}$, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = a \cdot g(x)$ differenzierbar mit $f'(x) = a \cdot g'(x)$.

2 Summenregel

Eine Funktion f mit $f(x) = x^r + x^s$; $r, s \in \mathbb{Q}$, ist differenzierbar. Für ihre Ableitungsfunktion gilt: $f'(x) = r\,x^{r-1} + s\,x^{s-1}$.

Allgemein gilt:
Sind g und h differenzierbare Funktionen, so ist auch die Funktion f mit $f(x) = g(x) + h(x)$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.

Beispiele

I. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f.

a) $f(x) = 7x^4$ b) $f(x) = x^5 + x^{-4}$ c) $f(x) = 5x^3 + x + 1$

Lösung:

a) $f(x) = 7x^4$
$f'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$
(Faktorregel)

b) $f(x) = x^5 + x^{-4}$
$f'(x) = 5x^4 - 4x^{-5}$
(Summenregel)

c) $f(x) = 5x^3 + x + 1$
$f'(x) = 5 \cdot 3x^2 + 1x^0 + 0 = 15x^2 + 1$
(Faktorregel und Summenregel)

II. Nutzen Sie Faktor-, Summen- und Potenzregel, um die Ableitungsfunktion von f mit $f(x) = 6x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 7$ zu bestimmen.

Lösung:

$f(x) = 6 \cdot x^4 + (-3) \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + (-7)$

$f'(x) = 6 \cdot 4x^3 + (-3) \cdot 2x^1 + \frac{1}{2} \cdot 1x^0 + 0 = 24x^3 - 6x + \frac{1}{2}$

Bei jedem Summanden werden die Faktorregel und die Potenzregel angewendet.

- Erklären Sie, wie Sie die Ableitungsfunktion f' von f mit $f(x) = a \cdot x^q$ mithilfe der allgemeinen Faktorregel bilden.
- Clara meint: „Die Summenregel kann ich auch bei Differenzen anwenden."
Hat sie recht? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie die Faktor-, Summen- und Potenzregel in Beispiel II miteinander verbunden werden.

Nachgefragt

Nutzen Sie:
$a - b = a + (-b)$

Aufgaben

1 Bilden Sie die Ableitungsfunktion f' von der Funktion f. Nutzen Sie dazu die Ableitungsregeln für Potenzen, Faktoren und Summen.

a) $f(x) = 2x^3$ **b)** $f(x) = 2x + 3x^3$ **c)** $f(x) = 7 - 14x + 21x^3$
d) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2$ **e)** $f(x) = -x^6 + x^5 - x^4$ **f)** $f(x) = 1 + 2x^{-1} + 4x^{-3}$
g) $f(x) = 7x^5 + 6x^3 + 0{,}5x^2$ **h)** $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 3$ **i)** $f(x) = \frac{1}{4}x^8 + \frac{1}{6}x^3 - 2$
j) $f(x) = 4 - 4x^{-1} + x^{-2}$ **k)** $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 1$ **l)** $f(x) = \sqrt{x} + 12x + 24$

2
1 $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 4)$ **2** $f(x) = x^2 \cdot (2 - x)$ **3** $f(x) = -3x \cdot (x^4 + x^5)$
4 $f(x) = (2x + 0{,}5)^2$ **5** $f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 4}$ **6** $f(x) = x^{-5} \cdot \left(x^3 - \frac{2}{x}\right)$

a) Formen Sie die Gleichung der Funktion f zunächst so um, dass Sie Summen- und Faktorregel anwenden können.
b) Leiten Sie die Funktion f ab. Nutzen Sie dazu Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a). Geben Sie auch die Definitionsmenge von f und f' an.
c) Bestimmen Sie – falls möglich – mithilfe der Ableitung die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$.

3
1 $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x$ **2** $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ **3** $f(x) = 0{,}5x - 7$ **4** $f(x) = 3x^7$

a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f' von f.
b) Geben Sie mithilfe der Ableitungsfunktion alle Stellen an, an denen der Graph der Funktion f eine waagerechte Tangente besitzt, also Tangenten mit der Steigung $m = 0$.

4 Verdeutlichen Sie anhand einer geeigneten Skizze oder einem passenden Beispiel die …
a) Faktorregel. **b)** Summenregel.

5 **a)** Überprüfen Sie mithilfe der Ableitungsregeln:
Die Funktionen f_1 mit $f_1(x) = 4x^3 + 2x + 3$ und f_2 mit $f_2(x) = 4x^3 + 2x - 2$ besitzen beide dieselbe Ableitungsfunktion.
b) Vervollständigen Sie die Aussage von Thessa und begründen Sie diese.

Es gibt unendlich viele Funktionsgleichungen, die alle dieselbe Ableitungsfunktion haben. Die Gleichungen unterscheiden sich dabei nur …

6 Gegeben ist die Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f. Ist Ihr Ergebnis eindeutig?

a) $f'(x) = x + 4x^2$ **b)** $f'(x) = 4$ **c)** $f'(x) = 0$

d) $f'(x) = 2 + 0{,}5x$ **e)** $f'(x) = (1 - x)^2$ **f)** $f'(x) = (x - 1)^2$

7 Auch die Faktorregel kann mithilfe der h-Methode hergeleitet werden.

Begründen & verstehen

Dazu betrachten wir allgemein eine differenzierbare Funktion g und eine reelle Zahl a. Dann ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot g(x)$ ebenfalls differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot g(x+h) - a \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(a \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = a \cdot g'(x)$$

a) Beschreiben Sie die einzelnen Umformungen bei der Herleitung der Faktorregel und begründen Sie jeweils deren Richtigkeit.

b) Lukas überlegt: „Auf diese Weise kann ich doch auch die Summenregel herleiten!“

Sind g_1 und g_2 differenzierbare Funktionen, so ist f mit $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ ebenfalls differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[g_1(x+h) + g_2(x+h)] - [g_1(x) + g_2(x)]}{h} = \ldots$$

Vervollständigen Sie die Herleitung in Ihrem Heft.
Erklären Sie alle Umformungen, die Sie dabei vornehmen.

8 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3 - x$; $D = \mathbb{R}$, punktsymmetrisch zum Ursprung O (0|0) ist. Zeichnen Sie den Graphen von f und ergänzen Sie dann Ihre Zeichnung fortlaufend.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte Z, O und K mit der x-Achse ($x_Z < x_O < x_K$) und je eine Gleichung der Tangenten an f in Z, O und K.
Die Tangente t_O schneidet die Tangente t_Z im Punkt I und die Tangente t_K im Punkt C.

a) Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs ZICK.

b) Begründen Sie, dass die Tangenten t_Z und t_K zueinander parallel sind.

c) Spiegeln Sie den Punkt I an der x-Achse, der Spiegelpunkt heißt A. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ZACK.

9 Gegeben ist die die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 5$; $D = \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

b) Beschreiben Sie die Funktion anhand charakteristischer Eigenschaften wie Achsenschnittpunkte, mögliche Symmetrie, Scheitelpunkt, usw.

c) Begründen Sie mithilfe des Graphen von f, wie viele Punkte es gibt, deren Tangente durch den Koordinatenursprung verläuft.

d) Stellen Sie die Gleichung der Normalen im Punkt Q (3|f(3)) auf. Bestimmen Sie anschließend den Schnittpunkt Y der Normalen mit der y-Achse.

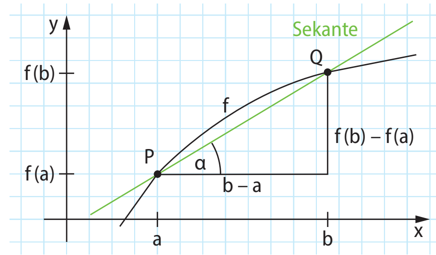
e) Der Koordinatenursprung sowie die Punkte Q und Y aus Teilaufgabe d) legen ein Dreieck fest. Markiere das Dreieck in der Skizze aus Teilaufgabe a). Bestimme anschließend den Flächeninhalt und die Länge des Umfangs von diesem Dreieck.

Mittlere Änderungsrate

Seite 44

Die **mittlere Änderungsrate** einer Funktion f im Intervall [a; b] entspricht der Steigung der Sekante zwischen den Punkten P (a | f (a)) und Q (b | f (b)). Man bestimmt die mittlere Änderungsrate mithilfe des **Differenzenquotienten**:

$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



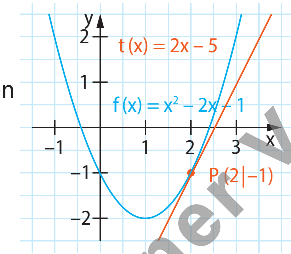
Momentane Änderungsrate

Seite 48

Die **momentane Änderungsrate** einer Funktion f an der Stelle x_0 bezeichnet man auch als **Ableitung von f an der Stelle x_0.** Sie gibt die Steigung der Tangente im Punkt P (x_0 | f (x_0)) an. Die Tangentensteigung kann mittels **Differentialquotient** bestimmt werden:

$m = f'(x_0)$ mit $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Gesucht ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f in P.



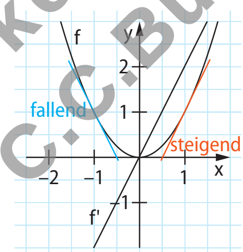
Ableitungsfunktion

Seite 52

Ordnet man jedem x ∈ 𝔻 die Ableitung f' (x) zu, so erhält man die **Ableitungsfunktion f' der Funktion f.**

Zusammenhänge zwischen f und f':

- Eine steigende Tangente an den Graphen von f in x_0 ∈ D bedeutet, dass $f'(x_0) > 0$.
- Eine fallende Tangente an den Graphen von f in x_0 ∈ D bedeutet, dass $f'(x_0) < 0$.
- Eine waagrechte Tangente an den Graphen von f in x_0 ∈ D bedeutet, dass $f'(x_0) = 0$.



$f(x) = x^2$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x}{h} = 2x$

Ableitungsregeln

Seite 56, 58

- Potenzregel
  Die Funktion f mit $f(x) = x^q$; q ∈ ℚ, hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = qx^{q-1}$.
  $f(x) = x^{12}$
  $f'(x) = 12x^{11}$
- Faktorregel
  Die Funktion f mit $f(x) = ax^q$; q ∈ ℚ, hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = a \cdot qx^{q-1}$.
  $f(x) = 7x^4$
  $f'(x) = 7 \cdot 4x^3 = 28x^3$
- Summenregel
  Die Funktion f mit $f(x) = x^r + x^s$; r, s ∈ ℚ, hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = rx^{r-1} + sx^{s-1}$.
  $f(x) = x^5 + x^4$
  $f'(x) = 5x^4 + 4x^3$

Die einzelnen Regeln können auch miteinander kombiniert werden.

$f(x) = 6x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2}x - 7$

$f'(x) = 24x^3 - 6x + \frac{1}{2}$

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$; $D = \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [2; 5].
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in ein Koordinatensystem.
c) Interpretieren Sie die in a) ermittelte Änderungsrate im Zusammenhang mit dem in b) gezeichneten Graphen.

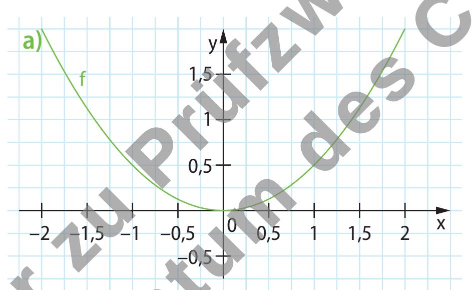
Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den Intervallen …
a) [2; 5].
b) [0; 4].
c) [2; t], mit $t \in \mathbb{R}$.
d) [3; 3 + h], mit $h \in \mathbb{R}$.

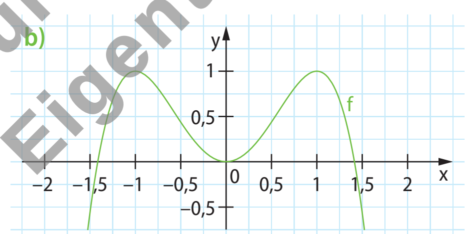
2 Im Folgenden soll die Ableitungsfunktion f' der Funktion f mit $f(x) = -2x^2 + x + 1$; $D = \mathbb{R}$, untersucht werden.

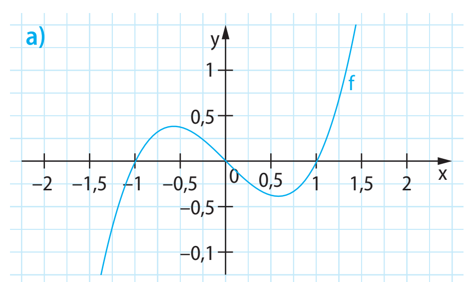
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
b) Zeichnen Sie die Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = -1$.
c) Ermitteln Sie graphisch die momentane Änderungsrate in $x_0 = 1$.
d) Zeichnen Sie bei $x_0 = -1$ die Normale zu t und bestimmen Sie mittels Steigungsdreieck deren Steigung.

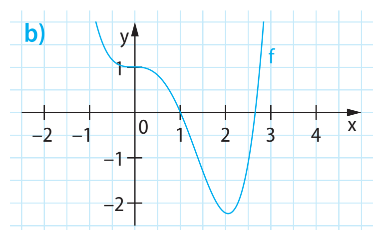
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
b) Bestimmen Sie mithilfe des Differentialquotienten die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0 = -1$ und damit die Gleichung der zugehörigen Tangente.
c) Ermitteln Sie bei $x_0 = -1$ die Gleichung der zugehörigen Normalen.
d) Ergänzen Sie Tangente und Normale in Ihrem Koordinatensystem aus a).

3 Übertragen Sie den Graphen der Funktion f so genau wie möglich in Ihr Heft. Bestimmen Sie graphisch den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f'. Nutzen Sie dabei markante Punkte, wie z. B. Punkte, in denen der Graph waagrechte Tangenten besitzt.









4 Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt P sowie die Fläche des Dreiecks, das von t und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird.

a) $f(x) = x^3$; $P\,(1\,|\,f(1))$
b) $f(x) = 0{,}25x^2$; $P\,(2\,|\,f(2))$

a) $f(x) = 0{,}5x^4$; $P\,(-1\,|\,f(-1))$
b) $f(x) = \frac{1}{32}x^5$; $P\,(-2\,|\,f(-2))$

5 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x + 1$; $D = \mathbb{R}$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
b) Treffen Sie anhand Ihrer Skizze aus a) Aussagen zur Ableitungsfunktion f'.
c) Geben Sie die Gleichung von f' an.
d) Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion und überprüfen Sie Ihre Aussagen aus b).

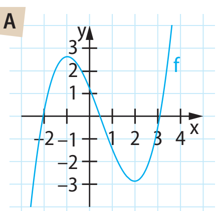
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.
b) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'.
c) Geben Sie die Gleichung der Ableitungsfunktion an. Zeichnen Sie deren Graphen und überprüfen Sie Ihr Ergebnis aus b).

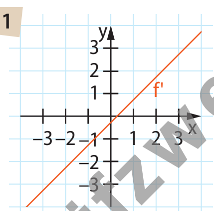
6

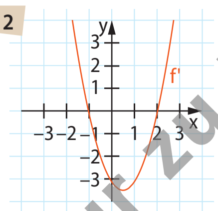
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 4$; $D = \mathbb{R}$.
a) Bestimmen Sie die Stelle an der der Graph eine waagerechte Tangente besitzt.
b) Ermitteln Sie, welche Steigung die Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt mit der positiven x-Achse hat.

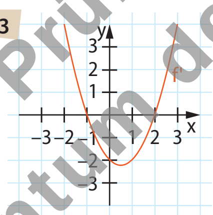
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$; $D = \mathbb{R}$.
a) Bestimmen Sie alle Punkte des Graphen von f mit waagerechter Tangente.
b) Ermitteln Sie, unter welchem Winkel die Tangente an den Graphen von f im Punkt P (4 | 0) die x-Achse schneidet.

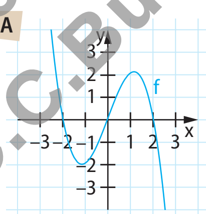
7 Ordnen Sie dem Graphen **A** einer Funktion f dem Graphen seiner Ableitungsfunktion f' **1**, **2** oder **3** zu. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

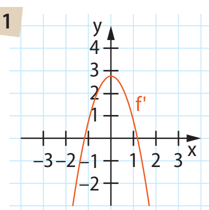
A


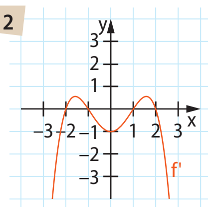
1


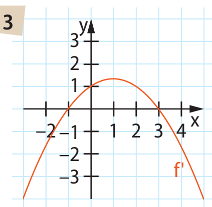
2


3


A


1


2


3


8 Geben Sie die Ableitungsfunktion von f an. Formen Sie, falls nötig, den Funktionsterm zunächst um.

a) $f(x) = x^{12}$
b) $f(x) = 2 + 0{,}5x$
c) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$
d) $f(x) = 4\sqrt{x} + x^{-3}$

a) $f(x) = 3x^3 + 3x^{\frac{1}{3}}$
b) $f(x) = 0{,}1 \cdot (10x^2 + 100)$
c) $f(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{2}{5}} - 3x^{-2}$
d) $f(x) = (x + 1)^2 - (x - 1)^2$

9 Finden Sie heraus, für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ der Graph der Funktion f keine, genau eine bzw. mehr als eine waagrechte Tangente besitzt.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$; $D = \mathbb{R}$

$f(x) = 0{,}25x^4 + ax^2$; $D = \mathbb{R}$

2 Kreuz und quer

1 Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall I.

a) $f(x) = 4x^2 - 1;\ I = [2; 5]$

b) $f(x) = -5x^2 - 2x;\ I = [-3; 2]$

c) $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 4x;\ I = [-8; 0]$

d) $f(x) = 1{,}4^x;\ I = [-5; -1]$

e) $f(x) = \frac{2}{3x^2 + 1};\ I = [-3; 4]$

f) $f(x) = \sqrt{3x - 1};\ I = [2; 3]$

g) $f(x) = \log_{10}(x);\ I = [0{,}1; 10]$

h) $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x};\ I = [0; 2]$

2 **a)** Stellen Sie jeweils die Gleichung der Sekante an den Graphen von f durch die angegebenen Punkte P und Q auf.

1 $f(x) = -0{,}5x^2 + x;\ P\,(-2\,|\,f(-2));\ Q\,(3\,|\,f(3))$

2 $f(x) = 3x^2 + 2;\ P\,(-1\,|\,f(-1));\ Q\left(\frac{1}{2}\middle|f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

3 $f(x) = -x^4 + 2x;\ P\,(0\,|\,f(0));\ Q\left(\left(\frac{3}{4}\right)\middle|f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

4 $f(x) = -0{,}5^{x+1};\ P\,(-4\,|\,f(-4));\ Q\,(1\,|\,f(1))$

b) Bestimmen Sie anschließend die Steigung der Sekante und deuten Sie ihre Bedeutung für den Graphen der Funktion f.

c) Berechnen Sie den Steigungswinkel, den die Sekante mit der x-Achse einschließt.

3 **a)** Ermitteln Sie für die Funktion f eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der angegebenen Stelle x_0.

1 $f(x) = 3;\ x_0 = 1{,}5$

2 $f(x) = 2x + 1;\ x_0 = -4$

3 $f(x) = -2x^2 - x;\ x_0 = -5$

4 $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}25x;\ x_0 = 1$

5 $f(x) = 2x^{-4};\ x_0 = 2$

6 $f(x) = x + \frac{1}{x};\ x_0 = 5$

b) Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Tangente t mit der x-Achse.

4 Bestimmen Sie mithilfe des Differentialquotienten die momentane Änderungsrate der Funktion f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 5;\ x_0 = -2$

b) $f(x) = -x - 2;\ x_0 = 0{,}5$

c) $f(x) = x^2 + 2;\ x_0 = 3$

d) $f(x) = -x^2 - x;\ x_0 = 4$

e) $f(x) = \frac{3}{x^2};\ x_0 = 1$

f) $f(x) = -(x^2 + 4);\ x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

5 Bestimmen Sie jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregeln.

a) $f(x) = 2x^4$

b) $f(x) = -3x$

c) $f(x) = -4$

d) $f(x) = -5x$

e) $f(x) = -\frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{2}{x}$

g) $f(x) = 5x^3 + 1$

h) $f(x) = x^2 - 4$

i) $f(x) = 3x^2 - x$

j) $f(x) = x - x^{-1}$

k) $f(x) = 4x^{-5}$

l) $f(x) = x \cdot (x + 1)$

6 Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen die Stellen, an denen der Graph eine waagrechte Tangente besitzt. Begründen Sie, wenn dies nicht möglich ist.

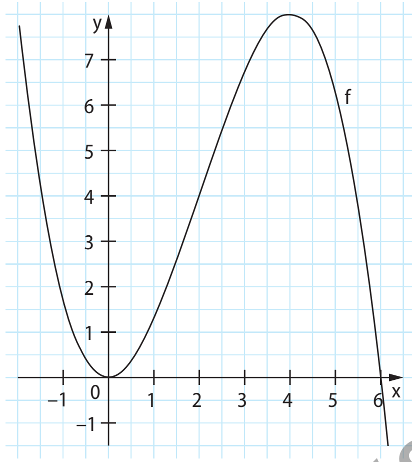
a) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

b) $f(x) = -3x^3 + 2x + 1$

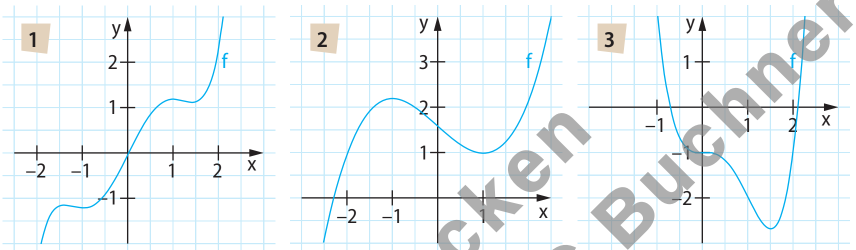
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$

d) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

7 Übertragen Sie den abgebildeten Graphen einer Funktion f möglichst genau in Ihr Heft. Zeichnen Sie dann dort an mindestens vier Stellen Tangenten an den Graphen von f sowie je ein zugehöriges Steigungsdreieck. Ermitteln Sie die jeweilige Tangentensteigung und skizzieren Sie mithilfe dieser Werte den Graphen von f'.



8 Die Abbildungen **1** bis **3** zeigen jeweils den Graphen einer Funktion f.



Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

9 Prüfen Sie, ob f' die Ableitungsfunktion von f ist.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x;\ f'(x) = 6x^2 - 8x + 1$
b) $f(x) = 2x^7 - 5x;\ f'(x) = 14x - 5$
d) $f(x) = 2x^7 + 5x^5 + 1;\ f'(x) = 14x^6 + 25x^4$
c) $f(x) = 3x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x + 7;\ f'(x) = 1{,}5x^{-\frac{3}{2}} + x$
e) $f(x) = 3x^2 + 4x^3 + 7;\ f'(x) = 6x + 12$
f) $f(x) = 4x^{-2} + 7x + 3;\ f'(x) = -8x + 7 + 3$

10 Der Punkt A $(-2\,|\,4)$ liegt auf dem Graphen einer Funktion f, deren Ableitungsfunktion f' gegeben ist mit $f'(x) = 4x^{-4}$.

a) Erläutern Sie, wie Sie die Funktionsgleichung von f bestimmen können.
b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f zur gegebenen Ableitungsfunktion.
c) Prüfen Sie, ob B $(4\,|\,8)$ und C $(0\,|\,3)$ auf, ober- oder unterhalb des Graphen von f liegen.

11 Begründen Sie, dass die Funktionen f mit $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$ und g mit $g(x) = 5x^2 + 2x - 3$ dieselbe Ableitungsfunktion haben.

12 Bestimmen Sie für die Funktion f die Stelle x_0 aus dem Intervall I, für die die momentane Änderungsrate mit der mittleren Änderungsrate im Intervall I übereinstimmt. Fertigen Sie jeweils eine aussagekräftige Skizze an.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1;\ I = [-3; 1]$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 1;\ I = [0; 4]$
c) $f(x) = x^3 - x;\ I = [1; 4]$
d) $f(x) = \frac{2}{x^2} + 1;\ I = [-3; -1]$
e) $f(x) = 2x^2 - 7;\ I = [-4; 1]$
f) $f(x) = -3x + 1;\ I = [0; 5]$
g) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x;\ I = [-1; 2]$
h) $f(x) = x^2 - x - 1;\ I = [-2; 1]$

Informieren Sie sich im Internet über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

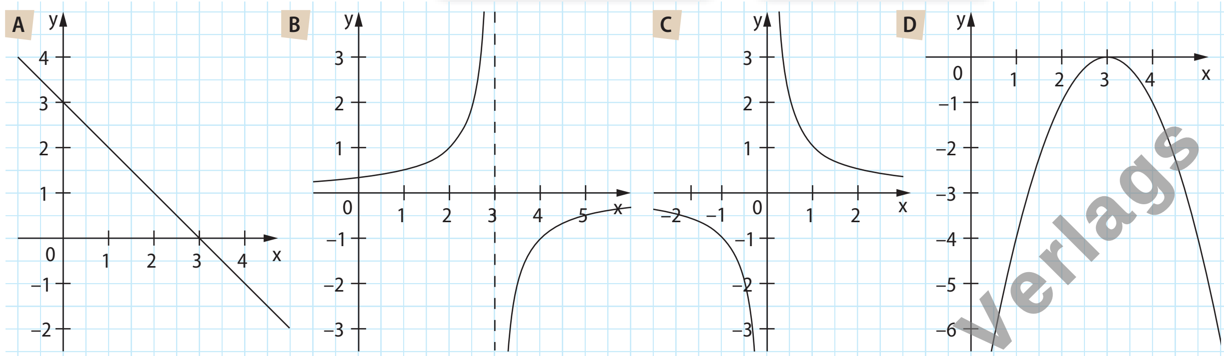
13 Gegeben sind die vier Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4 sowie ihre Funktionsgraphen.

$f_1(x) = \frac{1}{x}$; $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f_2(x) = \frac{1}{3-x}$; $D = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

$f_3(x) = -(x-3)^2$; $D = \mathbb{R}$

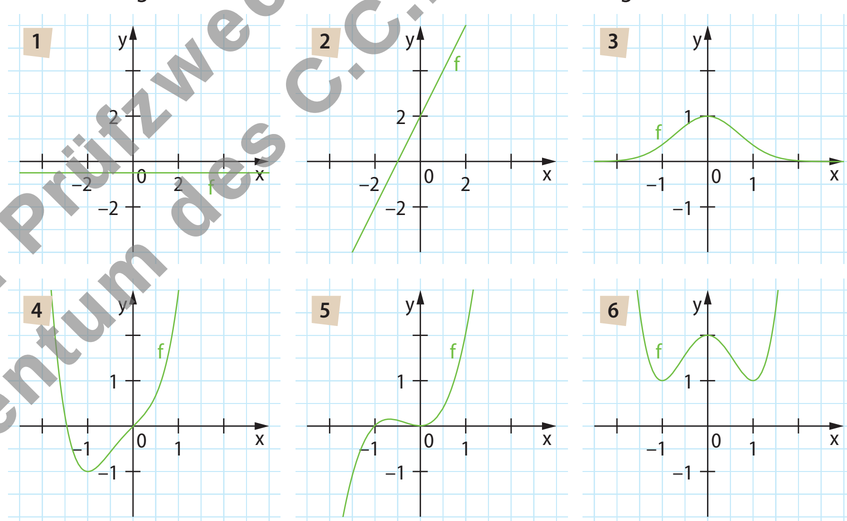
$f_4(x) = 3 - x$; $D = \mathbb{R}$



a) Ordnen Sie zunächst jeder der vier Funktionen ihren Funktionsgraphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

b) Skizzieren Sie in Ihrem Heft zu jeder dieser vier Funktionen den Graphen ihrer Ableitungsfunktion. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

14 Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Skizzieren Sie jeweils den zugehörigen Graphen der Ableitungsfunktion f' in Ihr Heft. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

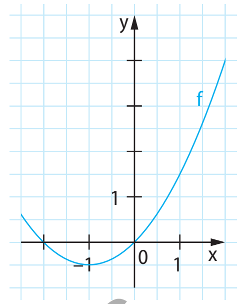


15 Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^3$; $D = \mathbb{R}$.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f. Ermitteln Sie anhand des Graphen Näherungswerte für die Tangentensteigungen in $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$ und $x_0 = -2$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in D$ gilt: $x^3 - x_0^3 = (x - x_0) \cdot (x^2 + xx_0 + x_0^2)$

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Werte der momentanen Änderungsrate für $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = -1$, $x_0 = 2$ und $x_0 = -2$. Berechnen Sie den prozentualen Unterschied zwischen dem berechneten Wert und dem graphischen Wert aus Teilaufgabe a).



16 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.

a) Beschreiben Sie Eigenschaften der Ableitungsfunktion f'.

b) Übertragen Sie den Graphen der Funktion in Ihr Heft und skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in dasselbe Koordinatensystem.

17 Geben Sie im Sachkontext die Bedeutung der Ableitung f' an, wenn die Funktion f folgendes beschreibt:

a) Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit

b) Zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit der Zeit

c) Füllhöhe einer Wasserwanne in Abhängigkeit der Zeit

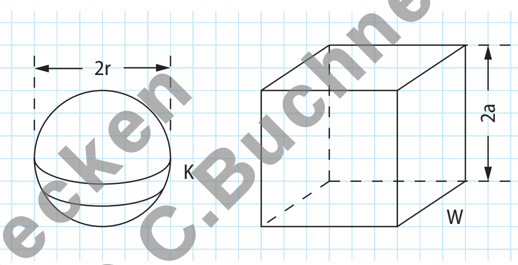
d) Höhe über dem Wasser beim Sprung vom 10 m-Turm

18 Stellen Sie mithilfe einer Wertetabelle folgende Funktionen graphisch dar. Überlegen Sie dann mit einem Partner oder einer Partnerin, wie der zugehörige Ableitungsgraph aussieht. Beschreiben Sie dessen Verlauf.

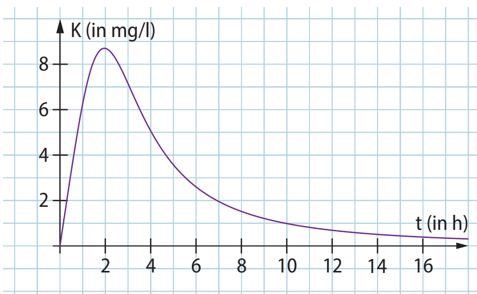
a) $f(x) = 2x$ **b)** $f(x) = -2x^2 + x + 5$ **c)** $f(x) = x^3 - 2x$

19 **a)** Geben Sie das Volumen $V_K(r)$ einer Kugel K mit Durchmesserlänge 2r sowie das Volumen $V_W(a)$ eines Würfels W mit Kantenlänge 2a an.

b) Bilden Sie dann die beiden Ableitungen $V_K'(r)$ und $V_W'(a)$. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.



20 Nimmt ein Patient ein bestimmtes Medikament ein, so hängt die Konzentration K (t) dieses Medikaments im Blut von der Zeit t ab, die seit der Einnahme vergangen ist. Das Diagramm zeigt die Konzentration in mg pro Liter in Abhängigkeit der abgelaufenen Zeit in Stunden seit Medikamenteneinnahme.



a) Ermitteln Sie, wann die Konzentration am größten ist.

b) Bestimmen Sie graphisch die Änderungsrate der Konzentration in den ersten beiden Stunden nach Einnahme.

c) Finden Sie den Zeitpunkt, an dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. Bestimmen Sie diese Änderungsrate näherungsweise. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

21 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 14x$; $D = \mathbb{R}$.

a) Skizzen Sie den Funktionsgraphen.

b) Begründen Sie, warum es eine Tangente mit minimaler Steigung gibt und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung.

c) Prüfen Sie, ob es auch eine Tangente mit maximaler Steigung gibt.

d) Die Funktion f soll die Geschwindigkeit eines Elementarteilchens in einem Beschleunigungsprozess angeben.

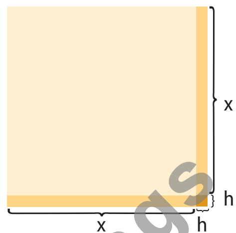
1 Geben Sie an, welche Bedeutung $f(0) = 0$ in diesem Sachkontext hat.

2 Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitungsfunktion f' im Sachzusammenhang.

2 Horizonte

In den vorangegangenen Kapiteln haben Sie zwei Grundvorstellungen der Ableitung kennengelernt: zum einen die Ableitung als **Tangentensteigung**, zum anderen die Ableitung als **momentane Änderungsrate**. Im Folgenden beschäftigen wir uns mit einer weiteren Grundvorstellung.

Hierzu betrachten wir ein Quadrat mit der (gegebenen) Seitenlänge x und dem Flächeninhalt $A(x) = x^2$. Wir fragen uns konkret, welche Auswirkungen eine kleine Veränderung (hier: Vergrößerung) der Seitenlänge x (das ist die unabhängige Größe) auf den Flächeninhalt A (x) (das ist die abhängige Größe) hat. Diese kleine Veränderung bezeichnen wir mit h: h steht für die Differenz $\Delta x = x_2 - x_1$, also für einen kleinen Unterschied zwischen x_2 und x_1.



1 Erläutern Sie unter Zuhilfenahme der Skizze, dass sich für die absolute Änderung des Flächeninhalts des Quadrates ergibt: $\Delta A = 2x \cdot h + h^2$.

2 Setzen Sie für h nun drei konkrete, immer kleiner werdende Zahlen ein und berechnen Sie die dazu gehörige absolute Veränderung ΔA des Flächeninhalts A (x).

3 Erläutern Sie, dass sich allgemein für kleine Änderungen Δx ergibt: $\Delta A \approx A'(x) \cdot h = 2x \cdot h$. Gehen Sie dabei darauf ein, dass für die relative Änderung des Flächeninhalts (mittlere Änderungsrate) folgende Näherung beliebig gut ist, wenn h hinreichend klein ist:
$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \approx 2x$.

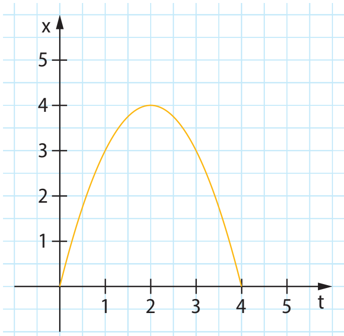
4 Erläutern Sie unter Einbeziehung einer Skizze folgenden Satz:
„Die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge x ist gleich seinem halben Umfang. Anders ausgedrückt: Als Ableitung des Quadratflächeninhalts erhält man den halben Quadratumfang, d. h.: Verändert man die Quadratseitenlänge und damit den Quadratflächeninhalt minimal, so erhält man den halben Quadratumfang“.

Wir können zusammenfassend festhalten:

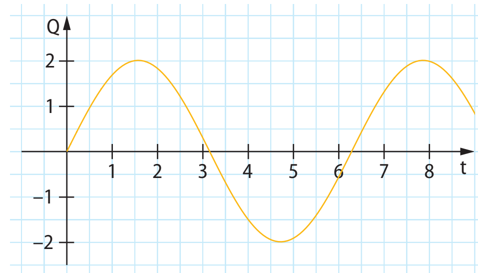
> Die Ableitung gibt an, wie stark sich eine kleine Änderung (beispielweise ein kleiner Messfehler) einer (unabhängigen) Größe auf eine davon abhängige Größe auswirkt. Hohe Werte der Ableitung bedeuten dabei eine schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte (eine große Steigung in diesem Kurvenabschnitt); kleine Änderungen der Ableitungswerte bedeuten hingegen, dass sich die Funktionswerte kaum ändern. Diese Interpretation der Ableitung nennt man **Verstärkungsfaktorvorstellung**.

Schauen wir uns nun Beispiele an, die die Relevanz der Verstärkungsfaktorvorstellung illustrieren:

- Die Abbildung zeigt die Höhe x eines senkrecht nach oben geworfenen Balls in Abhängigkeit von der Zeit t. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_E sich die Position (Höhe) des Balls am wenigsten ändert. Geben Sie die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt an.



- Die Abbildung zeigt die Ladung Q eines Kondensators in Abhängigkeit von der Zeit t. Zu welchen Zeitpunkten resultiert aus einer kleinen zeitlichen Änderung kaum eine Änderung der Ladung? Welche Rückschlüsse lassen sich auf die Stromstärke zu diesen Zeitpunkten ziehen?



Wir halten fest:

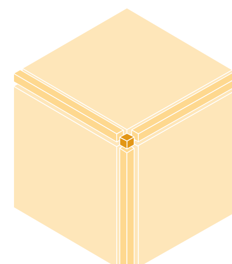
Die **Verstärkungsfaktorvorstellung** kann zum Beispiel dabei helfen, Hoch- und Tiefpunkte einer Kurve zu ermitteln.

5 Übertragen Sie unter Zuhilfenahme der abgebildeten Skizze Ihre bisherigen Erkenntnisse nun auf den Würfel. Wir betrachten eine kleine Änderung des Würfelvolumens.

a) Erläutern Sie, inwiefern die Abbildung die binomische Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ visualisiert.

b) Zeigen Sie, dass beim Würfel die Ableitung des Volumens nach der Kantenlänge der halben Würfeloberfläche entspricht.

c) Erläutern Sie, inwiefern diese Erkenntnis illustriert, dass die Ableitung von x^3 demnach $3x^2$ ist.



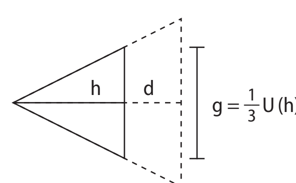
6 **a)** Zeigen Sie unter Einbeziehung einer Skizze, dass die Ableitung der Fläche eines Kreises seinem Umfang entspricht und stellen Sie dies auch als Formel dar.

b) Versehen Sie jede Zeile der angeführten Argumentation mit einem Kommentar, der zum Ausdruck bringt, was aus welchen Gründen gemacht wurde.

	Umformung	Kommentar
1	$U(a)\cdot d \;\le\; A(a+d) - A(a) \;\le U(a+d)\cdot d$	
2	$U(a) \;\le\; \frac{A(a+d) - A(a)}{d} \;\le U(a+d)$	
3	$U(a) \;\le\; \lim\limits_{d\to 0} \frac{A(a+d) - A(a)}{d} \;\le \lim\limits_{d\to 0} U(a+d)$	
4	$U(a) \;\le\; \lim\limits_{d\to 0} \frac{A(a+d) - A(a)}{d} \;\le U(a)$	
5	$U(a) \;=\; A'(a) = 2\pi a$	

7 Zeigen Sie unter Einbeziehung einer Skizze, dass die Ableitung des Kugelvolumens nach dem Radius die Kugeloberfläche ergibt.

8 Zeigen Sie mithilfe der Skizze, dass für ein gleichseitiges Dreieck mit Höhe h gilt: $\frac{1}{3}U(h) = A'(h)$. Beschreiben Sie diesen Zusammenhang in Worten.



Abschließend kann man zusammenfassen:

Die **Verstärkungsfaktorvorstellung** der Ableitung hilft dabei, geometrische Zusammenhänge zwischen Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren bzw. Volumen und Oberfläche von Körpern plausibel zu machen.

Überprüfen Sie Ihre Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben und bewerten Sie anschließend Ihre Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich **wirklich gut!**	Das kann ich **fast!**	Das muss ich **noch üben!**

1 Erläutern Sie, was unter der mittleren Änderungsrate zu verstehen ist.

2 Eine Bakterienkultur mit einem Anfangsbestand von 2000 Bakterien verdoppelt sich stündlich. Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der ersten, der zweiten und der dritten Stunde und vergleichen Sie diese miteinander.

3 Bestimmen Sie zu den gegebenen Funktionen die jeweilige Ableitungsfunktion. Verwenden Sie die Ableitungsregeln.

$f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ $\quad$ $g(x) = \frac{1}{x^4} + 2x + 3$

$h(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2$ $\quad$ $k(x) = x^{20} - 5x$

4 Bestimmen Sie die Punkte, in welchen der Graph von f eine waagrechte Tangente besitzt.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 2$

5 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x - 1$ zwei Tangenten hat, die parallel zur Geraden g mit $g(x) = 4x + 1$ verlaufen. Bestimmen Sie deren Gleichungen und den jeweiligen Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse.

6 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-2\,|\,f(-2))$.

a) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$

7 Bestimmen Sie zur gegebenen Ableitungsfunktion eine Funktionsgleichung der ursprünglichen Funktion. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

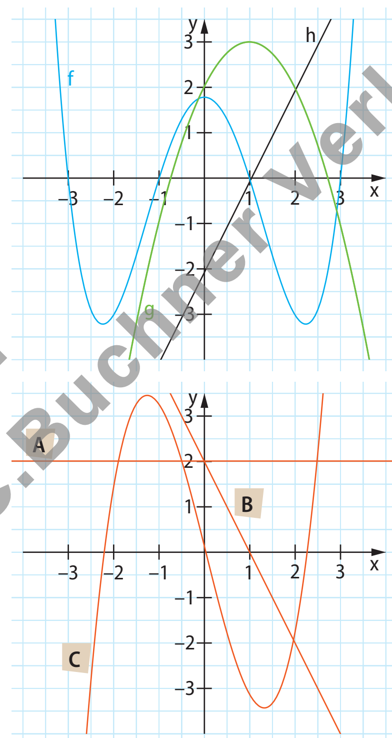
a) $f'(x) = 4x + 1$

b) $g'(x) = -5$

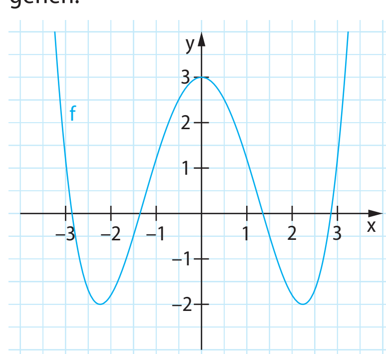
c) $h'(x) = -x^{-2} - x^{-3}$

d) $k'(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$

8 Ordnen Sie den Graphen der Funktionen f, g und h den zugehörigen Graphen A, B oder C der Ableitungsfunktion zu. Begründen Sie Ihre Auswahl.



9 Übertragen Sie den Graphen der Funktion f möglichst genau in Ihr Heft. Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f'. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.



Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zuerst allein.
2. Suchen Sie einen Partner oder eine Partnerin und arbeiten Sie zusammen weiter: Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen. Korrigieren Sie fehlerhafte Antworten.

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie.

A Die mittlere Änderungsrate eines Wachstumsvorgangs gibt an, wie lineares Wachstum mit gleichem Anfangs- und Endpunkt verlaufen würde.

B Kennt man Anfangs- und Endpunkt des Graphen einer Funktion, so kann mithilfe der mittleren Änderungsrate jeder Zwischenwert genau berechnet werden.

C Es gibt nicht-konstante Funktionen, die für ein Intervall eine mittlere Änderungsrate von 0 haben.

D Es gibt nicht-konstante Funktionen, für die die momentane Änderungsrate an jeder Stelle gleich null ist.

E Es gibt Funktionen, deren Ableitungsfunktion stets im positiven Bereich verläuft.

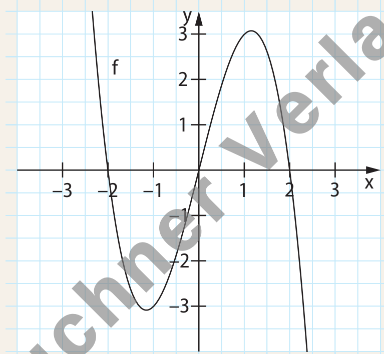
F Zu jeder vorgegebenen Ableitungsfunktion gibt es genau eine Funktion, aus der sie entstanden ist.

G Legt man an dem Graphen einer Funktion in zwei verschiedenen Punkten Tangenten an, so schneiden sich diese Tangenten stets.

H Der Schnittwinkel der Tangente mit der x-Achse entspricht dem Schnittwinkel der Normalen mit der y-Achse.

I Ist m die Steigung einer Tangente, so gilt für die Steigung n der zugehörigen Normalen: $n + m = 2$.

J



Am Graphen der Funktion f erkennt man, dass die Ableitung f' von f an drei Stellen gleich 0 ist.

K Wenn die Funktion f (s) den Tankinhalt eines Pkw auf der Strecke $[s_1; s_2]$ beschreibt, dann beschreibt die Ableitungsfunktion den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch auf dieser Strecke.

L Wenn die Funktion f (t) das Wachstum einer Pflanze im Zeitraum $[t_1; t_2]$ beschreibt, dann ist die momentane Änderungsrate die Wachstumsgeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Ich kann …	„Am Ziel!"-Aufgaben	Hilfe
… mittlere Änderungsraten bestimmen.	1, 2, A, B, C, K	S. 44
… momentane Änderungsraten bestimmen.	3, L, D	S. 48
… die Gleichung von Tangenten aufstellen und Tangentensteigungen interpretieren.	4, 5, 6, H, I, J	S. 48, 52
… die Ableitungsfunktion rechnerisch und graphisch bestimmen und anwenden.	7, 8, 9, E, F, G	S. 52, 56, 58

6 Startklar!

Aufgabe	Ich kann schon …	Grundwissen
1	… Baumdiagramme für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente nutzen.	S. 210
2a, 2b	… die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße bestimmen und im Sachzusammenhang interpretieren.	S. 210
2c, 3	… den Erwartungswert einer Zufallsgröße bestimmen und im Sachzusammenhang interpretieren.	S. 210

2 12

1 10 000 Personen, darunter 3000 Frauen, unterziehen sich einem Farbsehtest.
9250 Personen bestehen diesen erfolgreich. 30 Frauen erweisen sich als farbenfehlsichtig. Unter den Testpersonen wird zufällig eine Person ausgewählt.
Dabei werden folgende Ereignisse betrachtet:
F: „Die Person ist farbenfehlsichtig."
W: „Die Person ist weiblich."

a) Erstellen Sie für das betrachtete zweistufige Zufallsexperiment sowohl ein geeignetes, vollständig beschriftetes Baumdiagramm als auch eine Vierfeldertafel.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
M: „Die ausgewählte Testperson ist weiblich oder farbenfehlsichtig."

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte männliche Versuchsperson farbenfehlsichtig ist.

2 Ein Nachtwächter möchte im Dunkeln eine Türe aufsperren. Von seinen fünf Schlüsseln passen für diese Türe genau zwei. Er probiert in zufälliger Reihenfolge einen nach dem anderen, bis ein Schlüssel passt, wobei er nicht passende Schlüssel nach dem Ausprobieren jeweils wegsteckt.
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Schlüssel, die der Nachtwächter ausprobiert, bis sich die Tür öffnen lässt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X.

b) Bestimmen Sie P („X beträgt höchstens 2") und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Bestätigen Sie, dass sich für den Erwartungswert $E(X) = 2$ ergibt. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

3 Die Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X.

x_i	-3	2	3	4
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	0,1	0,2

a) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $E(X)$ nicht kleiner als -1 sein kann.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 so, dass sich $E(X) = 0$ ergibt.

6 Die Binomialverteilung

Einstieg

Eine Firma stellt Präzisionskugellager für den Maschinenbau her.
Trotz sorgfältiger Überwachung des Produktionsprozesses entsteht immer Ausschussware.
Um den Ausschussanteil zu kontrollieren, wird eine Qualitätskontrolle durchgeführt.

- Erläutern Sie den Begriff „Ausschussware“ und recherchieren Sie, wie die Qualitätskontrolle bei einem Massenprodukt vorgenommen wird. Erläutern Sie in diesem Zusammenhang auch den Begriff „Stichprobe“.
- Erklären Sie, warum das Entnehmen einer Stichprobe als mehrstufiges Zufallsexperiment aufgefasst werden kann. Wie viele Ausgänge gibt es auf jeder Stufe, welche Wahrscheinlichkeiten treten auf?
- Für eine bestimmte Sorte von Kugellagern soll der Ausschussanteil einen bestimmten Wert nicht überschreiten. Aufgrund einer Stichprobe soll entschieden werden, ob dieses Ziel erreicht ist. Erläutern Sie, warum eine Entscheidungsregel aufgrund einer Stichprobe nicht mit absoluter Sicherheit zu einer richtigen Entscheidung führt.

Ausblick

Am Ende dieses Kapitels haben Sie gelernt, …

- … was man unter einem Bernoulli-Experiment und einer Bernoulli-Kette versteht.
- … was eine binomialverteilte Zufallsgröße ist und wie man deren Wahrscheinlichkeitsverteilung ermittelt.
- … wie man Erwartungswert und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße ermittelt.
- … wie man mit graphischen Darstellungen der Binomialverteilung arbeitet.
- … wie man binomialverteilte Zufallsgrößen zur Modellierung von realen Problemstellungen verwendet.

Kap. 6.1

Entweder – oder …!

Untersuchen Sie die folgenden Zufallsexperimente auf Gemeinsamkeiten.
Welches Experiment passt nicht dazu? Erklären Sie genau.

1 Das Werfen einer Münze.
2 Das Werfen eines Würfels zu Beginn eines Mensch-Ärgere-Dich-nicht-Spiels.
3 Das Ziehen eines Loses aus einer Lostrommel mit Gewinnen und Nieten.
4 Das Drehen eines Glücksrads mit vier gleichgroßen Feldern.
5 Das Erraten der Antwort bei einem Multiple-Choice-Test, bei dem es zu jeder Frage genau eine Antwort gibt.

Kap. 6.2

Preisverleihung

Aus einer Klasse mit zwölf Schülerinnen und acht Schülern soll eine Gruppe von zwei Schülerinnen und zwei Schülern die Lehrerin zu einer Preisverleihung begleiten. Beurteilen Sie:

- Die Klassensprecher überlegen, ob sie über jede der möglichen Zusammenstellungen abstimmen lassen sollen.
- Max denkt: „Wenn ausgelost wird wer mitfahren darf, dann ist die Chance sehr gering, dass ich dabei bin."

Kap. 6.4

Zehntausend – oder: 1 gewinnt

Beim Würfelspiel „Zehntausend" wird mit sechs Würfeln gespielt. Besonders wichtig ist dabei die Anzahl der gewürfelten Einser. Um die Gewinnchancen einschätzen zu können, ist also die Zufallsgröße X: „Anzahl der Einser" von Interesse.

- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
- Recherchieren Sie die Spielregeln von „Chicago" und berechnen Sie für weitere relevante Ereignisse die Wahrscheinlichkeit.

Kap. 6.5

Mut zur Lücke?

Bei einem Test werden zu jeder Frage vier Antwortmöglichkeiten angeboten von denen genau eine korrekt ist. Der Test besteht aus insgesamt 30 Fragen. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens zehn Fragen korrekt beantwortet wurden.

- Beurteilen Sie, wie hoch die Chancen sind, bei dieser Regelung alleine durch Raten den Test zu bestehen.
- Schlagen Sie eine Regelung für das Bestehen des Tests vor und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Kap. 6.6 und 6.7

Sportliche Krise?

Ein Biathlet trifft die Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %.

- Mit wie vielen Treffern kann er pro Wettkampf etwa rechnen, wenn dabei jeweils 20 Schuss abgegeben werden? Geben Sie eine Einschätzung ab und machen Sie diese plausibel.
- Er trifft bei drei Rennen hintereinander jeweils nur 15 Mal. Muss er sich Sorgen machen? Versuchen Sie ohne Rechnung eine Einschätzung abzugeben.

Kap. 6.8

Perlentauchen – Ein Glücksspiel!

Echte Perlen, sogenannte Orient-Perlen, wachsen aus nicht eindeutig geklärter Ursache als Fremdkörper in bestimmten Muscheln heran. Bis ins 19. Jahrhundert wurde insbesondere im Persischen Golf nach derartigen Muscheln getaucht. Ihr Vorkommen ist sehr selten: In jeder tausendsten Muschel einer bestimmten Art wächst eine Perle heran.

- Ermitteln Sie durch systematisches Probieren, wie viele Muscheln ein Taucher mindestens ans Tageslicht befördern muss, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine Perle zu finden.

Tipp: Betrachten Sie das Gegenereignis.

Entdecken

Ein Biathlet trifft im liegenden Anschlag mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % die Scheibe. Er muss nach der ersten Langlaufrunde fünf Schüsse im liegenden Anschlag abgeben.

- Stellen Sie die Situation in einem Baumdiagramm dar.
- Beschreiben Sie Besonderheiten, die das Baumdiagramm aufweist.

Verstehen

Häufig stößt man bei der Betrachtung zufälliger Vorgänge auf Situationen, in denen nur zwei mögliche Ausgänge auftreten können oder von Interesse sind, z. B. Treffer/Niete, falsch/richtig, intakt/defekt, Kopf/Zahl, 6/$\overline{6}$, 1/0.

Die Bezeichnung Bernoulli-Experiment geht auf den Schweizer Mathematiker und Physiker Jakob I. Bernoulli (1655–1705) zurück.

Gibt es für ein Zufallsexperiment genau zwei mögliche Ergebnisse (z. B. Treffer/Niete), so spricht man von einem **Bernoulli-Experiment**. Die Trefferwahrscheinlichkeit wird mit p bezeichnet. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit für eine Niete $1 - p$.

Führt man dasselbe Bernoulli-Experiment mehrmals hintereinander aus (n-mal, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, alle n Teilexperimente sind unabhängig voneinander und haben Trefferwahrscheinlichkeit p), so spricht man von einer **Bernoulli-Kette der Länge n**.

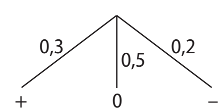
Ein Baumdiagramm eines Bernoulli-Experiments hat also lediglich zwei Äste. Stellt man eine Bernoulli-Kette der Länge n im Baumdiagramm dar, so gibt es n Stufen und insgesamt 2^n Pfade.

Beispiel

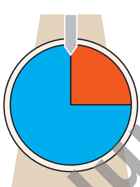
Entscheiden Sie, ob ein Bernoulli-Experiment bzw. eine Bernoulli-Kette vorliegt.

a) Ziehen eines Loses aus einer Lostrommel mit sehr vielen Losen.

b) Ein Zufallsexperiment, das durch nebenstehendes Baumdiagramm veranschaulicht wird.



c) Das abgebildete Glücksrad wird fünfmal gedreht.



d) Bei der Produktion von Bleistiften ist in 5 % aller Fälle die Miene gebrochen. Im Rahmen der Qualitätskontrolle werden zufällig zehn Bleistifte herausgegriffen und auf den genannten Fehler untersucht.

e) Eine Lostrommel enthält zehn Lose, unter denen vier Gewinnlose sind. Es werden nacheinander drei Lose gezogen und geöffnet.

Lösung:

	ja	nein	Begründung
a)	x		Es handelt sich näherungsweise um ein Bernoulli-Experiment, falls man nur zwischen Gewinn und Niete unterscheidet: $\Omega = \{\text{Gewinn}; \text{Niete}\}$, und annimmt, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit annähernd konstant bleibt.
b)		x	Das Baumdiagramm besteht aus mehr als zwei Ästen, es gibt also mehr als zwei mögliche Ausgänge.
c)	x		Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 5 mit $p = 0{,}25$.
d)	x		Es handelt sich näherungsweise um eine Bernoulli-Kette der Länge 10 mit $p = 0{,}05$, wenn angenommen wird, dass der Bleistift ein Massenprodukt ist.
e)		x	Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer ändert sich in jedem Zug.

- Beim Känguru-Test für Mathematik gibt es zu 30 Fragen je fünf Antwortmöglichkeiten von denen jeweils genau eine korrekt ist. Erläutern Sie, unter welchen Umständen das Ankreuzen des Testbogens eine Bernoulli-Kette ist.
- Erklären Sie, warum das mehrfache Ziehen von Losen aus einer Lostrommel mit sehr vielen Losen streng genommen keine Bernoulli-Kette ist.

Nachgefragt

Aufgaben

1 Entscheiden Sie jeweils, ob bzw. unter welchen Umständen die folgenden Zufallsexperimente eine Bernoulli-Kette darstellen.

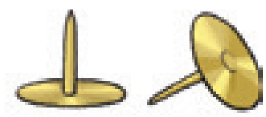
a) Nacheinander werden fünf Lose aus einer Lostrommel mit zehn Losen gezogen.

b) Vier Münzen werden gleichzeitig geworfen.

c) Ein Glücksrad mit drei gleichgroßen Sektoren wird viermal gedreht.

d) Bauteile einer Massenproduktion werden auf korrekte Verarbeitung überprüft.

2 Ein Reißnagel fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % auf den Kopf. In allen anderen Fällen landet er auf der Seite. Der Reißnagel wird viermal hintereinander geworfen.



a) Begründen Sie, dass es sich bei dem Experiment um eine Bernoulli-Kette handelt und geben Sie die Parameter p und n an.

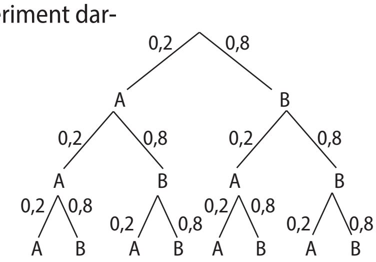
b) Erstellen Sie ein beschriftetes Baumdiagramm.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Reißnagel viermal auf der Seite landet.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Reißnagel mindestens einmal auf dem Kopf landet.

e) Begründen Sie mithilfe des Baumdiagramms aus Teilaufgabe b): Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Reißnagel genau zweimal auf dem Kopf landet lässt sich durch den Term $6 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2$ berechnen.

3 Durch das nebenstehende Baumdiagramm wird ein mehrstufiges Zufallsexperiment dargestellt.



a) Begründen Sie, dass es sich um eine Bernoulli-Kette handelt und geben Sie die Parameter n und p an.

b) Formulieren Sie ein zum Baumdiagramm passendes Zufallsexperiment.

4 Ein Würfel wird mehrmals hintereinander gewürfelt.
Dabei interessiert nur ob eine Sechs gewürfelt wird oder nicht.

a) Begründen Sie, dass es sich dabei um eine Bernoulli-Kette handelt und geben Sie einen sinnvollen Ergebnisraum an.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …

1 die erste Sechs beim zehnten Wurf auftritt.

2 unter den ersten zehn Würfen genau eine Sechs ist.

3 unter den ersten zehn Würfen mindestens eine Sechs ist.

c) Berechnen Sie: Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Sechs zu würfeln größer als 95 % ist?

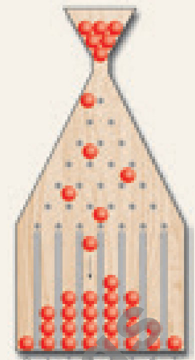
Tipp zu 4b: Stellen Sie sich die betreffenden Pfade im Baumdiagramm vor.

Tipp zu 4c: Betrachten Sie das Gegenereignis.

5 Begründen Sie, unter welchen Umständen das mehrfache Ziehen aus einer Lostrommel näherungsweise als Bernoulli-Kette modelliert werden darf. Warum ist diese Näherung hilfreich?

Entdecken

Ein Galton-Brett ist ein Spiel, in das Kugeln eingeworfen werden, die in regelmäßigen Abständen auf ein Hindernis treffen. Diese Hindernisse passieren sie jeweils zufällig entweder links oder rechts. Nach dem Passieren einer vorgegebenen Anzahl n von Hindernissen werden die Kugeln, abhängig vom durchlaufenen Pfad, in Auffangbehältern gesammelt.
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein solches Galton-Brett.



- Begründen Sie: Die Nummer des Auffangbehälters gibt an, wie oft die Kugel an den Hindernissen nach rechts gefallen ist.
- Erläutern Sie, inwiefern das Durchlaufen eines Galton-Bretts als Simulation eines mehrstufiges Bernoulli-Experiments aufgefasst werden kann. Zeichnen Sie ein entsprechendes Baumdiagramm.
- Bestimmen Sie für $n = 4$ die Anzahl der Wege, die in den Behälter Nr. 0 (in den Behälter Nr. 2) führen. Zählen Sie auch jeweils die zugehörigen Pfade im Baumdiagramm und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Verstehen

Bei einem mehrstufigen Bernoulli-Experiment der Länge n ist oft nur die Gesamtanzahl k der Treffer von Interesse. Entscheidend für die Berechnung entsprechender Wahrscheinlichkeiten ist die Anzahl der zugehörigen Pfade.

Der Taschenrechner kann die Werte von $\binom{n}{k}$ berechnen.

Eine Formel zur Berechnung des Binomialkoeffizienten finden Sie auf den Horizonte-Seiten (S. 210/211).

Betrachtet man das Baumdiagramm zu einer Bernoulli-Kette der Länge n, so gibt der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Pfade mit k ($k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$) Treffern an.
Weitere Anwendungsmöglichkeiten des Binomialkoeffizienten:

1. Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen.
   Beispiel: Auswahl einer Delegation von k Personen aus einer Gruppe von n Personen.
2. Spielt die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle, so gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten k Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne zu ziehen.
   Beispiel: Lotto 6 aus 49

Beispiel

Ein Radiosender verlost unter den ersten 50 Anrufern drei Freikarten für ein Musikkonzert.

a) Begründen Sie, dass die Verlosung der Freikarten für das Musikkonzert als Bernoulli-Experiment aufgefasst werden kann.
b) Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten für die Auswahl der Gewinner.

Lösung:
a) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 50, denn jeder Kandidat hat die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit.
b) Aus einer Menge von $n = 50$ Anrufern werden $k = 3$ Gewinner gezogen.
Dies ist gleichbedeutend mit der Anzahl der Pfade im entsprechenden Baumdiagramm, die zu drei Treffern ($k = 3$) führen.
Also gibt es $\binom{50}{3} = 19\,600$ Möglichkeiten für die Auswahl der Gewinner.

Nachgefragt

- Begründen Sie anschaulich die Gleichheit $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$. Erläutern Sie anschließend, warum allgemein $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ gilt.
- Begründen Sie, dass $\binom{n}{0} = 1$ und $\binom{n}{n} = 1$ gilt.

Aufgaben

1 Berechnen Sie die nachfolgenden Binomialkoeffizienten mit dem Taschenrechner.

a) $\binom{15}{9}$ **b)** $\binom{100}{4}$ **c)** $\binom{85}{80}$ **d)** $\binom{9}{4}$ **e)** $\binom{1000}{3}$

2 Berechnen Sie die nachfolgenden Binomialkoeffizienten – falls möglich im Kopf.

a) $\binom{70}{0}$ **b)** $\binom{10}{9}$ **c)** $\binom{20}{20}$ **d)** $\binom{24}{1}$ **e)** $\binom{12}{2}$

Lösungen zu 2:
24; 1; 10; 66; 1

3 Ermitteln Sie jeweils die Anzahl der Möglichkeiten.

a) Der Trainer einer Fußballmannschaft wählt für ein Fußballspiel von den 20 Feldspielern, die er zur Verfügung hat, zehn zufällig aus.

b) Aus einer Klasse mit 12 Jungen und 15 Mädchen soll eine Gruppe mit zwei Buben und zwei Mädchen gebildet werden.

4 **a)** Bei einer Geburtstagsfeier sind zwölf Personen anwesend. Ermitteln Sie, wie oft die Gläser klingen, wenn jeder mit jedem einmal anstößt.

b) In der ersten Handball-Bundesliga spielen 18 Mannschaften. Berechnen Sie, wie viele Spiele in einer Hinrunde stattfinden, wenn alle Mannschaften jeweils einmal gegeneinander spielen.

c) Eine Fluglinie plant neue Flugverbindungen zwischen zehn Flughäfen. Ermitteln Sie die Anzahl neuer Verbindungen, wenn es Flüge zwischen allen Städten geben soll.

d) Formulieren Sie vorliegende Analogien zwischen den Sachverhalten und deren Lösung in den Teilaufgaben a) bis c).

5 Binomialkoeffizienten können mit dem Pascal'schen Dreieck in Verbindung gebracht werden.

a) Begründen Sie die Gleichheit der beiden Darstellungen des Pascal'schen Dreiecks. Nutzen Sie dazu die Zusammenhänge **1** $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und **2** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \vdots \end{array}$$

b) Begründen Sie mithilfe des Pascal'schen Dreiecks …

1 die Symmetrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. **2** $\binom{n}{1} = n$ und $\binom{n}{n-1} = n$.

c) Der binomische Lehrsatz lautet $(x + y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot y + \ldots + \binom{n}{n} \cdot y^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

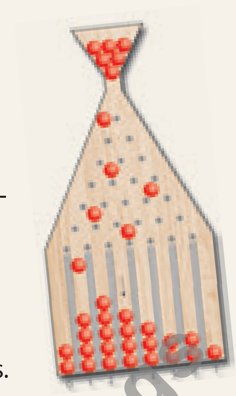
1 Begründen Sie, warum die Binomialkoeffizienten im binomischen Lehrsatz mithilfe des Pascal'schen Dreiecks abgelesen werden können.

2 Zeigen Sie die Gültigkeit für $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Entdecken

Stellt man ein Galton-Brett etwas schräg auf, so fallen die eingeworfenen Kugeln bei jedem Hindernis mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p nach rechts und mit der Wahrscheinlichkeit 1 – p nach links.

- Untersuchen Sie, wie sich durch das Schrägstellen die Anzahl der Wege ändert, die auf dem Galton-Brett in einen bestimmten Auffangbehälter führen.
- Betrachten Sie für $n = 5$ die Wege, die in den Auffangbehälter Nr. 3 führen sowie die entsprechenden Pfade im zugehörigen Baumdiagramm. Ermitteln Sie jeweils deren Anzahl und für $p = 0{,}3$ die Wahrscheinlichkeiten auf den einzelnen Pfaden des Baumdiagramms.

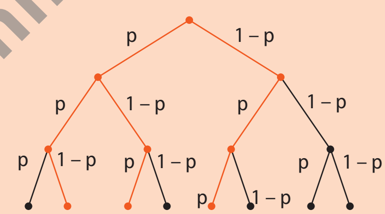


Verstehen

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel nach dem Durchlaufen eines n-stufigen schrägen Galton-Bretts im Auffangbehälter k landet, entspricht also der Wahrscheinlichkeit, bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Parameter p genau k Treffer zu erzielen.

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit Parameter p ergibt sich für jedes Ergebnis mit k Treffern ($0 \le k \le n$) die Wahrscheinlichkeit $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Dies folgt z. B. aus der 1. Pfadregel, wenn man den zugehörigen Pfad im Baumdiagramm betrachtet.
Es gibt $\binom{n}{k}$ solcher Pfade. Die Wahrscheinlichkeit dafür, in einer Bernoulli-Kette der Länge n genau k Treffer zu erzielen, ergibt sich nach der 2. Pfadregel also zu:
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (X: „Anzahl der Treffer“)
Dies ist die sogenannte **Bernoulli-Formel**.

Beispiel: $n = 3$; $k = 2$



$P(X = 2) = 3 \cdot p^2 \cdot (1-p)$
$= \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{3-2}$

Beispiel

Bei der Produktion von Trinkgläsern weisen erfahrungsgemäß 2 % der Gläser einen Defekt (= Ausschuss) auf. Bei der Qualitätskontrolle wird eine Stichprobe von zehn Gläsern untersucht.
Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass …

a) genau zwei Gläser einen Defekt aufweisen.
b) kein Glas einen Defekt aufweist.
c) höchstens ein Glas einen Defekt aufweist.
d) das achte Glas das erste ist, das einen Defekt aufweist.

Lösung:
X: „Anzahl der defekten Gläser in der Stichprobe“
a) $P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^8 \approx 0{,}015$
b) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{10} = 0{,}98^{10} \approx 0{,}817$
c) $P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}98^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^9 \approx 0{,}984$
d) E: „Das achte Glas ist das erste, das einen Defekt aufweist.“
$P(E) = 0{,}98^7 \cdot 0{,}02 = 0{,}017$

- Begründen Sie, dass beim sechsstufigen Galton-Brett die Wahrscheinlichkeit für den Auffangbehälter mit der Nr. 3 am größten ist.
- Tim meint: „Beim zweifachen Münzwurf ist die Wahrscheinlichkeit zweimal die gleiche Seite zu werfen genauso hoch, wie die Wahrscheinlichkeit zwei unterschiedliche Seiten zu werfen." Beurteilen Sie seine Aussage.

Nachgefragt

Aufgaben

1 Eine Bernoulli-Kette hat die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße X beschreibt die Trefferanzahl. Ermitteln Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.
a) $P(X = 6)$ für $n = 15$ und $p = 0{,}4$
b) $P(X = 9)$ für $n = 10$ und $p = 0{,}8$
c) $P(X = 0)$ für $n = 8$ und $p = 0{,}05$
d) $P(X = 6)$ für $n = 6$ und $p = 0{,}99$

2 Nehmen Sie zu folgender Aussage Stellung: „Beim gleichzeitigen Würfeln von fünf Würfeln beträgt die Wahrscheinlichkeit genau dreimal die Sechs zu würfeln $\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$."

3 Ein fünfstufiges Galton-Brett steht etwas schräg, sodass die Wahrscheinlichkeit nach rechts zu fallen auf jeder Stufe 0,4 beträgt.
a) Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Wege, die in den Auffangbehälter Nr. 3 führen.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel nur auf den beiden letzten Stufen nach rechts fällt.
c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel im Auffangbehälter Nr. 4 landet.

4 Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 20 Fragen. Zu jeder Frage gibt es fünf Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Peter setzt bei jeder Frage zufällig ein Kreuz. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er …
a) alle Antworten
b) genau vier Antworten
c) keine Antwort
d) eine oder zwei Antworten
richtig angekreuzt hat.

Mit Wahrscheinlichkeiten von Gegenereignissen zu rechnen, kann in manchen Situationen von Vorteil sein.

5 Beim Biathlon müssen Sportler mehrere Runden Skilanglauf absolvieren und stehend bzw. liegend auf je fünf Scheiben schießen. Ein bestimmter Athlet habe eine Trefferwahrscheinlichkeit von 87 % im Stehend- und 93 % im Liegendschießen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Sportler …
a) beim Liegendschießen genau die ersten drei Scheiben trifft.
b) genau vier Scheiben im Stehendschießen trifft.
c) mindestens vier Scheiben im Liegendschießen trifft.
d) den ersten Treffer im Stehendschießen bei der vierten Scheibe setzt.
e) liegend genau zwei nebeneinanderliegende Scheiben verfehlt.

6 In einer Fabrik werden je neun Schokoküsse in einer Schachtel verpackt. Erfahrungsgemäß ist jeder fünfzigste angebrochen.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schachtel alle Schokoküsse intakt sind.
b) 20 Schachteln werden an 20 Kunden verkauft. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der Kunden mindestens einen gebrochenen Schokokuss in ihrer Packung haben.

Entdecken

Ein Hersteller von Präzisionsschrauben weiß, dass die Genauigkeit der erforderlichen Maße einer bestimmten Schraube in 98 % aller Fälle den Qualitätsanforderungen genügt. Bei der Qualitätskontrolle wird eine Stichprobe von 100 Schrauben untersucht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit …

- genügen alle Schrauben den Anforderungen?
- finden sich in der Stichprobe genau drei Schrauben, die den Anforderungen nicht genügen?
- findet man in der Stichprobe mindestens eine Ausschuss-Schraube?

Verstehen

Häufig interessiert bei der Betrachtung einer Bernoulli-Kette nur die Anzahl der Treffer und die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Trefferanzahl zu erzielen.

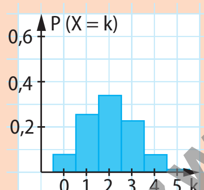
Eine Zufallsgröße X, bei der man die Wahrscheinlichkeit für die Trefferanzahl k wie bei einer Bernoulli-Kette mit Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p angeben kann, heißt **binomialverteilt mit den Parametern n und p**. Man schreibt $X \sim B(n; p)$.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt **Binomialverteilung mit den Parametern n und p** und ordnet jeder Zahl k die Wahrscheinlichkeit $B(n; p; k)$ zu:

$$B(n; p; k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die häufigste graphische Darstellung einer Binomialverteilung ist das **Histogramm**.

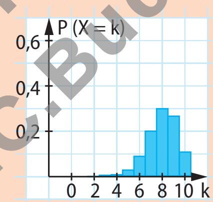
Ein Histogramm ist ein Säulendiagramm, bei dem für jedes Ereignis X = k die zugehörige Wahrscheinlichkeit durch den Flächeninhalt der jeweiligen Säule dargestellt wird. Alle Säulen sind gleich breit und es gibt keinen Abstand zwischen den Säulen.

1 $X \sim B(5; 0{,}4)$



k	P (X = k)
0	0,0778
1	0,2592
2	0,3456
3	0,2304
4	0,0768
5	0,0102

2 $X \sim B(10; 0{,}8)$



k	P (X = k)	k	P (X = k)
0	≈ 0	6	0,0881
1	≈ 0	7	0,2013
2	0,0001	8	0,302
3	0,0008	9	0,2684
4	0,0055	10	0,1074
5	0,0264		

Beispiele

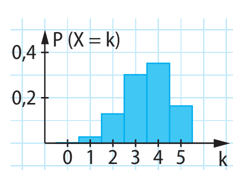
I. Ein Würfel wird zehnmal gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der …
a) genau drei Sechser gewürfelt werden.
b) keine Eins gewürfelt wird.
c) mindestens eine Eins gewürfelt wird

Lösung:
a) $P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}1550$; X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$.
b) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}1615$; X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$.
c) $1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}1615 = 0{,}8385$; X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$.

II. Eine Zufallsgröße ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0{,}7$. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form und zeichnen Sie das Histogramm.

Lösung:

k	0	1	2	3	4	5
P (X = k)	0,0024	0,0284	0,1323	0,3087	0,3602	0,1681



Nachgefragt

- Begründen Sie: Für welchen Wert von k erwarten Sie das Maximum einer Binomialverteilung mit Parametern n und p. Überprüfen Sie Ihre Vermutung an einigen Beispielen und halten Sie Ihre Beobachtungen fest.
- „Für ein Bernoulli-Experiment mit $p = 0{,}5$ gilt: $P(X = k) = P(X = n - k)$." Begründen Sie die Aussage. Welche Bedeutung hat dieser Zusammenhang für das zugehörige Histogramm?

Aufgaben

Lösungen zu Aufgabe 1: 0,3660; 0,3020; 0,2787

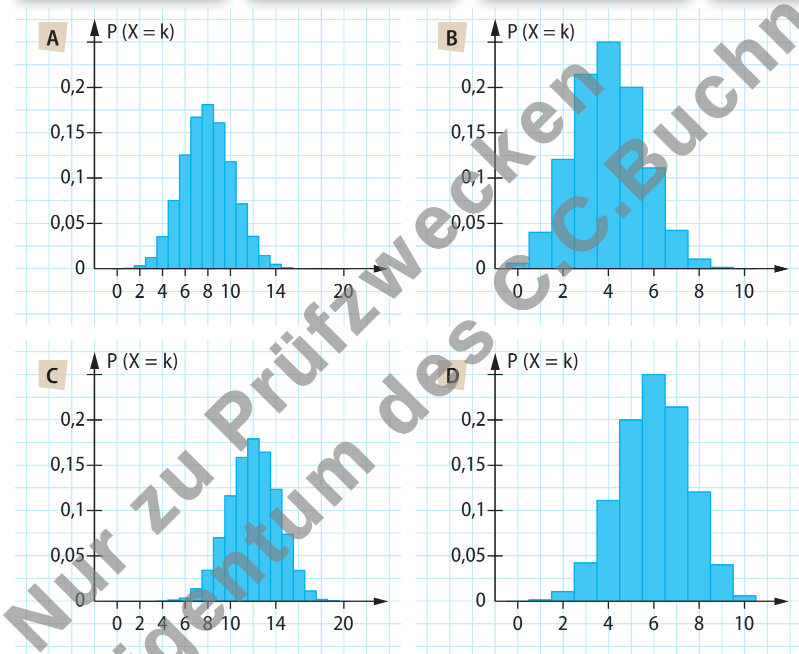
1 Bestimmen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

a) $B(8; 0{,}4; 3)$ **b)** $B(100; 0{,}99; 100)$ **c)** $P(X = 2)$ mit $X \sim Bin\left(0; \frac{1}{5}\right)$

2 Eine Zufallsgröße ist binomialverteilt mit $X \sim Bin(10; 0{,}4)$. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.

3 Ordnen Sie jeder Binomialverteilung das passende Histogramm zu. Begründen Sie.

1 $n = 10;\ p = 0{,}4$ **2** $n = 20;\ p = 0{,}4$ **3** $n = 10;\ P = 0{,}6$ **4** $n = 20;\ p = 0{,}6$



4 Dem Jongleur Aldo gelingt sein neuester Trick mit 90 % Sicherheit. In einer Woche sind insgesamt zehn Vorstellungen geplant, in denen Aldo diesen Trick vorführt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit blamiert sich Aldo bei diesem Trick nie?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt Aldo dieser Trick in keiner Vorstellung?

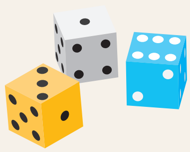
Beschreiben Sie in diesem Sachzusammmenhang die Ereignisse E_3 bis E_7 in Worten:

c) $P(E_3) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^8$ **d)** $P(E_4) = 1 - 0{,}1^{10}$

e) $P(E_5) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}9^8 \cdot 0{,}1^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}9^9 \cdot 0{,}1^1 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}9^{10}$

f) $P(E_6) = 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^5$ **g)** $P(E_7) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1^5$

Entdecken



Beim Spiel „chuck-a-luck“ werden drei Würfel gleichzeitig geworfen. Vor dem Wurf legt der Spieler eine Zahl zwischen 1 und 6 als Treffer fest. Beim Wurf kommt es darauf an, möglichst viele Treffer zu erzielen.

- Beschreiben Sie das Zufallsexperiment durch einen geeigneten Ergebnisraum und legen Sie eine passende Zufallsgröße fest.
- Beschreiben Sie anschließend die nachfolgenden Ereignisse als Teilmenge des Ergebnisraums und mithilfe der festgelegten Zufallsvariablen.

1 Es wird mehr als ein Treffer gewürfelt. **2** Es werden höchstens zwei Treffer gewürfelt.
3 Es wird mindestens ein Treffer gewürfelt, aber weniger als drei.

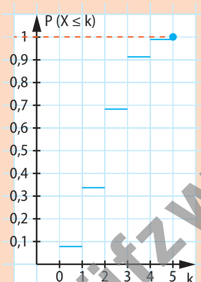
Verstehen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße werden häufig nicht die Einzelwahrscheinlichkeiten für bestimmte Trefferanzahlen benötigt, sondern es stellt sich die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Trefferanzahl über- oder unterschritten wird.

Interessiert man sich bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X für die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen der Form $X \le k$, so spricht man von **kumulierten Wahrscheinlichkeiten**.
$P(X \le k) = \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

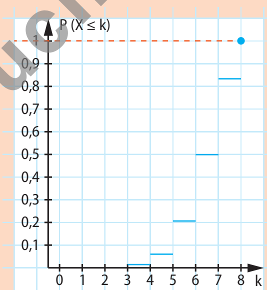
Als graphische Darstellung der kumulierten Verteilung ergibt sich eine Treppenfunktion.

1 $n = 5$; $p = 0{,}4$



k	P (X ≤ k)
0	0,0778
1	0,3370
2	0,6826
3	0,9130
4	0,9898
5	1

2 $n = 8$; $p = 0{,}8$



k	P (X ≤ k)
0	0
1	0,0001
2	0,0012
3	0,0104
4	0,0563
5	0,2031
6	0,4967
7	0,8322
8	1

Beispiel

Das abgebildete Glücksrad ($p = 0{,}75$ für einen Gewinn) wird fünfmal gedreht.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens drei Gewinne erzielt werden.

b) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mehr als zwei Gewinne erzielt werden.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der Gewinne“, erstellen Sie das zugehörige Histogramm und stellen Sie $P(X \le k)$ für $0 \le k \le n$ mithilfe einer Treppenfunktion dar. Markieren Sie jeweils $P(X \le 3)$.

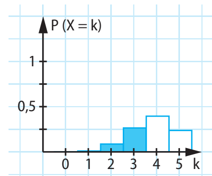
Lösung:

Sprechweisen:
„mindestens“ → ≥
„mehr als“ → >
„höchstens“ → ≤
„weniger als“ → <

a) $P(X \le 3) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}75^0 \cdot 0{,}25^5 + \ldots + \binom{5}{3} \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25^2 = 0{,}3672$

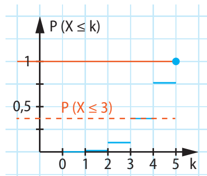
b) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - 0{,}1035 = 0{,}8965$

c)



k	P (X = k)
0	0,0010
1	0,0146
2	0,0879
3	0,2637
4	0,3955
5	0,2373

$\left.\right\}$ P (X ≤ 3) (Zeilen k = 0 bis 3)



k	P (X ≤ k)
0	0,001
1	0,0156
2	0,1035
3	0,3672
4	0,7627
5	1

Nachgefragt

- Veranschaulichen Sie die Ausdrücke „X > k“, „X < k“, „X ≥ k“ und „X ≤ k“ am Zahlenstrahl.
- Ordnet man jedem Wert k die kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \le k)$ einer binomialverteilten Zufallsgröße zu, ergibt sich eine monoton steigende Treppenfunktion. Erläutern Sie den Zusammenhang mit dem Histogramm der Binomialverteilung.
- Begründen Sie allgemein für $X \sim B(n; p)$: **1** $P(X < k) = P(X \le k - 1)$ **2** $P(X > k) = 1 - P(X \le k)$ **3** $P(k_1 < X \le k_2) = P(X \le k_2) - P(X \le k_1)$

Aufgaben

1 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{5}$. Ermitteln Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

a) $P(X \le 3)$ **b)** $P(X > 1)$ **c)** $P(2 \le X \le 4)$ **d)** $P(X \in [1; 3])$

Lösungen zu 1:
0,6242; 0,5914; 0,8791; 0,7718

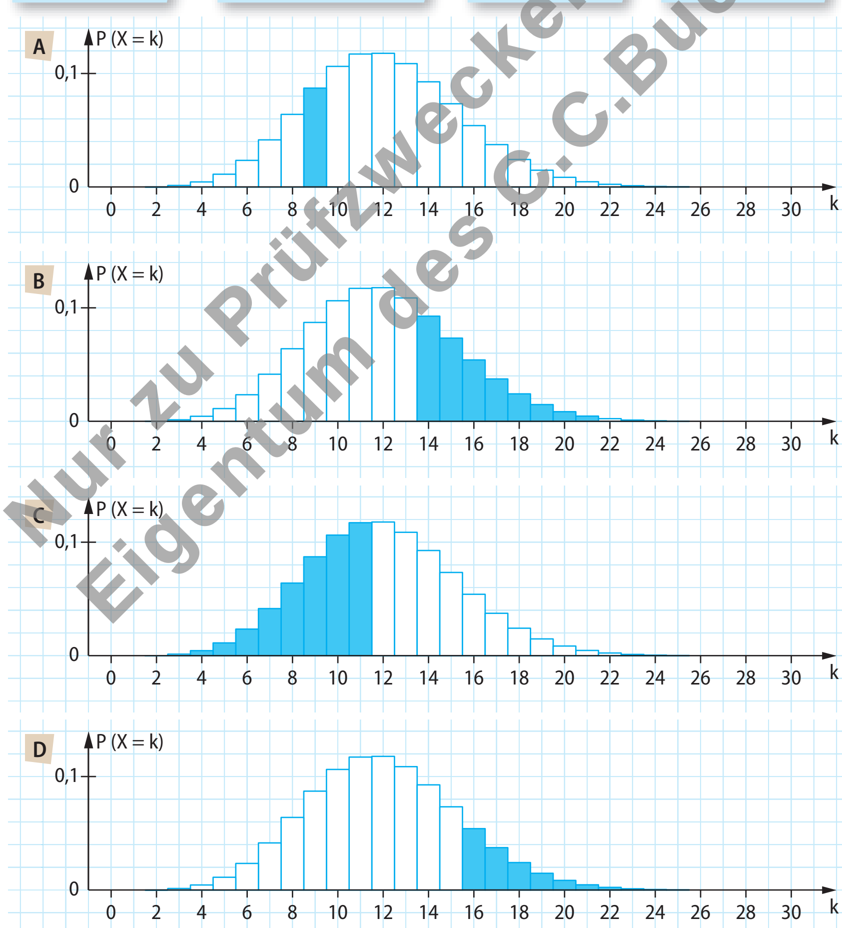
2 Bestimmen Sie $P(X \le k)$ einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit …

a) $n = 50$; $p = 0{,}02$; $k = 3$ **b)** $n = 20$; $p = 0{,}9$; $k = 19$ **c)** $n = 100$; $p = 0{,}99$; $k = 95$

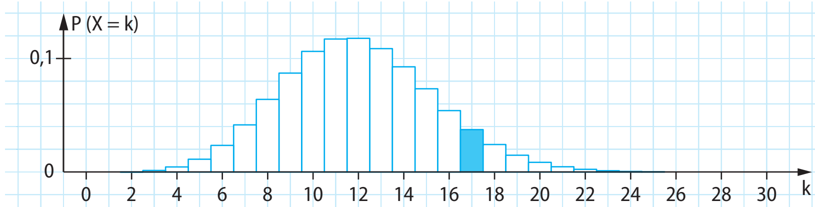
Lösungen zu 2:
0,0034; 0,9822; 0,8784

3 In den folgenden Diagrammen ist die Binomialverteilung für $p = 0{,}06$ und $n = 200$ dargestellt. Begründen Sie, weshalb es genügt, den dargestellten Ausschnitt des Histogramms zu betrachten und ordnen Sie den Wahrscheinlichkeiten die passende Darstellung zu.

1 $P(X \le 11)$ **2** $P(14 \le X \le 21)$ **3** $P(X = 9)$ **4** $P(X > 15)$



4 Julian meint: „Die Markierung im Histogramm veranschaulicht sowohl P (16 < X <18) als auch P (X = 17).“ Erklären Sie.



5 23 Schüler sollen eine Frage beantworten, zu der aus drei vorgegeben Antworten die richtige ausgewählt werden muss. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, …

a) dass genau 12 Schüler das richtige Ergebnis erzielen, wenn sie ihr Kreuz nach dem Zufallsprinzip setzen.

b) dass mindestens 12 Schüler das richtige Ergebnis erzielen, wenn sie ihr Kreuz nach dem Zufallsprinzip setzen.

c) dass höchstens 12 Schüler das richtige Ergebnis erzielen, wenn sie ihr Kreuz nach dem Zufallsprinzip setzen.

6 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,4. Stellen Sie die kumulierten Wahrscheinlichkeiten von X tabellarisch und graphisch dar.

7 In einer 10 000 Probanden umfassenden Gruppe sind 500 Personen mit der Krankheit K infiziert.

a) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter den 20 zufällig ausgewählten Probanden dieser Gruppe höchstens eine Person ist, die mit der Krankheit K infiziert ist.

b) Untersuchen Sie, wie viele Probanden dieser Gruppe man mindestens untersuchen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % auf mindestens eine Person zu treffen, die mit der Krankheit K infiziert ist.

8 Vor der schriftlichen Führerscheinprüfung führt die Fahrschule UNFALLFREI einen Vortest durch. Er besteht aus zehn Fragen mit je drei vorgegebenen Antworten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Nur wer bei diesem Multiple-Choice-Test mehr als 75 % der Fragen richtig beantwortet hat, wird zur schriftlichen Prüfung zugelassen.

a) Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der richtigen Vortestantworten bei reinem Raten. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung tabellarisch und graphisch dar.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht man den Vortest bei reinem Raten?

9 In einer Kantine gibt es täglich drei Gerichte zur Auswahl. Davon ist eines vegetarisch. Erfahrungsgemäß wählen zwei von fünf der 400 Kantinenbesucher das fleischlose Gericht. Die Kantine bereitet täglich 160 vegetarische Gerichte vor.

a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die vegetarischen Portionen an einem bestimmten Tag nicht ausreichen.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die vorbereiteten fleischlosen Gerichte an mindestens drei von fünf Tagen derselben Woche nicht reichen.

10 Aus einer Urne mit 36 Kugeln (14 weiße und 22 blaue Kugeln) werden nacheinander blind 24 Kugeln entnommen. Eine gezogene Kugel wird betrachtet und anschließend wieder in die Urne gelegt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der blauen Kugeln an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die angegebenen Ereignisse.

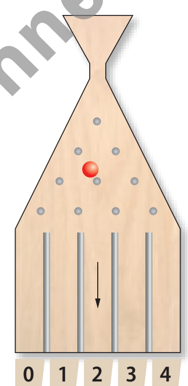
a) E_1: „Es sind genau 18 Kugeln blau."
b) E_2: „Die ersten fünf gezogenen Kugeln sind blau."
c) E_3: „Höchstens die Hälfte der gezogenen Kugeln sind blau."
d) E_4: „Höchstens 20 und mehr als 15 Kugeln sind blau."

11 Um die Auslastung ihrer Flugzeuge zu optimieren, verkauft eine Fluggesellschaft mehr Flugtickets für einen Flug, als Plätze im Flugzeug vorhanden sind. Dabei geht die Fluggesellschaft von ihren Erfahrungswerten aus: Etwa bei 4 % der gebuchten Flugtickets taucht kein Fluggast auf. Für den Flug mit einem Airbus A320 (200 Sitzplätze) werden Tickets verkauft. Beurteilen Sie die folgenden Vorgaben durch die Betrachtung geeigneter Wahrscheinlichkeiten:

a) Es werden 4 % mehr Tickets verkauft als Sitzplätze vorhanden sind.
b) Es werden 210 Tickets verkauft.
c) Die Überbuchung soll in weniger als 25 % der Fälle dazu führen, dass Fluggäste umgebucht werden müssen.

12 In der Abbildung sehen Sie ein vierstufiges Galton-Brett. Eine Kugel rollt von oben durch alle Reihen und hat jeweils dieselbe Chance, nach rechts oder nach links abgelenkt zu werden. Unter der vierten Reihe befinden sich die fünf Fächer 0, 1, 2, 3 und 4.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel …

a) in Fach 1 fällt.
b) in ein äußeres Fach fällt.
c) in das mittlere Fach fällt.
d) in eines der Fächer 1, 2 oder 3 fällt.



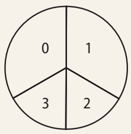
13 Beim Spiel „Schatzsuche" muss ein Kandidat abgesperrte Truhen öffnen. Bei jeder Truhe stehen dafür sechs sehr ähnliche, aber dennoch verschiedene Schlüssel zur Auswahl, von denen vier nicht zum Schloss passen. Mit jedem einzelnen der beiden anderen Schlüssel lässt sich das Schloss entriegeln. Pro Truhe darf der Kandidat zwei verschiedene Schlüssel ausprobieren, die er zufällig auswählt.

a) Bestätigen Sie mithilfe eines Baumdiagramms, dass bei jeder der Truhen die Wahrscheinlichkeit für das Öffnen 60 % beträgt.
b) Wie viele Truhen müssen in diesem Spiel mindestens zur Verfügung gestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9 % wenigstens eine Truhe geöffnet wird?

14 Eine Binomialverteilung der Länge $n = 18$ mit einer Wahrscheinlichkeit p ist gegeben. Begründen Sie die nachfolgenden Aussagen mithilfe eines Histogramms.

a) Für $p = 0{,}5$ ist das Histogramm achsensymmetrisch.
b) Das Histogramm für die Wahrscheinlichkeit p ist das Spiegelbild des Histogramms für die Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Die Spiegelgerade liegt bei $k = 18 \cdot 0{,}5$.
c) Verallgemeinern Sie die Aussage aus Teilaufgabe b).

Entdecken



Die Zufallsgröße X gibt die Zahl an, die sich beim Drehen des nebenstehenden Glücksrads ergibt.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	0,3	0,2	$\frac{1}{6}$

- Bestimmen Sie den Erwartungswert E (X).
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert E (Y) einer Zufallsgröße $Y \sim B(3; 0{,}4)$.
- Berechnen Sie $n \cdot p$ für die Zufallsgröße Y und machen Sie plausibel, dass das Ergebnis dem Erwartungswert E (Y) entspricht.

Verstehen

Die Binomialverteilung ordnet jedem Wert x_i, den die Zufallsgröße X annehmen kann, die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ zu, mit der x_i auftritt. Generell spricht man von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Bei Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist oftmals die Datenmitte der Verteilung von Interesse: der sogenannte Erwartungswert $E(X) = \mu$.

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße X ist allgemein definiert als die Summe der Produkte der Werte x_i der Zufallsgröße und der Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$:
$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$.

Bei einer binomialverteilten Zufallsvariable X sind der Erwartungswert und das arithmetische Mittel identisch, da die Wahrscheinlichkeit für jeden Versuch dieselbe ist.
Der **Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße X** kann durch die Formel $\mu = E(X) = n \cdot p$ dargestellt werden.

Beispiele

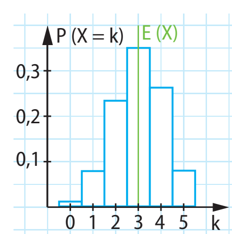
I. Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B(5; 0{,}6)$.

a) Ermitteln Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert E (X) mit der allgemeinen Formel.
c) Bestimmen Sie den Erwartungswert mit der Formel für binomialverteilte Zufallsgrößen.
d) Tragen Sie den Erwartungswert E (X) in das Histogramm aus Teilaufgabe a) ein.

Lösung:

a)

k	0	1	2	3	4	5
P (X = k)	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776



b) $E(X) = 1 \cdot 0{,}0768 + 2 \cdot 0{,}2304 + 3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}07776 = 3$

c) $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}6 = 3$

d) siehe Histogramm

II. Finden Sie die drei verschiedene Beispiele für binomialverteile Zufallsgrößen, deren Erwartungswert gleich 15 ist.

Lösungsmöglichkeit:

1 Münzwurf mit einer fairen Münze, wobei X: „Anzahl Kopf“ bei n = 30: $E(X) = 30 \cdot 0{,}5 = 15$

2 Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit 45 Kugeln, von denen eine weiß ist.
Y: „Anzahl gezogener weißer Kugeln“ bei n = 45: $E(Y) = 45 \cdot \frac{1}{3} = 15$

3 Würfeln mit einem Laplace-Würfel, wobei Z: „Anzahl Sechser“ bei n = 90 Würfen:
$E(Z) = 90 \cdot \frac{1}{6} = 15$

Nachgefragt

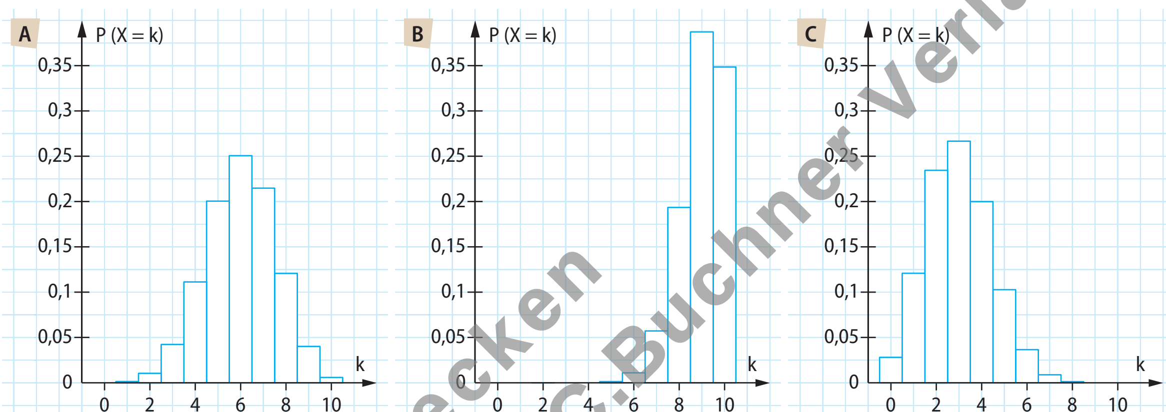
- Erläutern Sie für eine Zufallsgröße $X \sim B(n; p)$ die Formel $E(X) = n \cdot p$.
- In 75 % aller Fälle landet ein belegtes Brot auf der belegten Seite. Klara überlegt: „Wenn ich sechs Brote fallen lasse, kann ich damit rechnen, dass mindestens vier Brote auf die belegte Seite fallen.“ Nehmen Sie Stellung zu Klaras Aussage.

Aufgaben

1 Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsgrößen X, die binomialverteilt ist mit …
a) $n = 100; p = 0,35$. **b)** $n = 5; p = 0,12$. **c)** $n = 1200; p = 0,98$. **d)** $n = 6; p = 0,4$.

Lösungen zu 1: 0,6; 35; 2,4; 1176

2 Die Histogramme zeigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $X_1 \sim B(10; 0,6)$, $X_2 \sim B(10; 0,3)$ und $X_3 \sim B(10; 0,9)$.



a) Ordnen Sie die Histogramme der richtigen Zufallsgröße zu.
b) Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert und erläutern Sie, wie Sie diesen im Histogramm verdeutlichen können.
c) Erstellen Sie für $X_4 \sim B(6; 0,2)$ und $X_5 \sim B(6; 0,8)$ jeweils ein Histogramm und stellen Sie darin auch den jeweiligen Erwartungswert dar. Beschreiben Sie, was Ihnen auffällt.

3 Laut Angaben der DLRG können fast 34 % der Kinder und Jugendlichen „im schulpflichtigen Alter“ in Deutschland „nicht oder nur schlecht“ schwimmen. In einer Siedlung wohnen 143 Kinder.
a) Ermitteln Sie, wie viele „Schwimmer“ man unter diesen Kindern erwarten kann.
b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mehr als 100 schwimmen können.

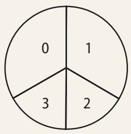
DLRG: Deutsche Lebens-Rettungs-Gesellschaft

4 Fünf Reißnägel werden 100 mal geworfen. Es wird in einer Tabelle festgehalten, wie häufig k von den fünf Reißnägeln auf dem Kopf landen.
a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel $\overline{k}$ für die Anzahl der auf dem Kopf liegenden Reißnägel pro Wurf.

k	0	1	2	3	4	5
H (k)	17	37	29	12	4	1

b) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der auf dem Kopf liegenden Reißnägel pro Wurf an. Machen Sie plausibel, dass X binomialverteilt ist mit $X \sim B(5; p)$ und dass $\frac{\overline{k}}{n}$ als Näherungswert $\tilde{p}$ für p geeignet ist.
c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für $p = \tilde{p}$. Vergleichen Sie mit a).

Entdecken



Die Zufallsgröße X gibt, wie in Entdecken aus 6.6, die Zahl an, die sich beim Drehen des nebenstehenden Glücksrads ergibt. Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 3$ und $p = 0{,}4$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	0,3	0,2	$\frac{1}{6}$

- Vergleichen Sie die Erwartungswerte und die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y.
- Untersuchen Sie, warum der Ausdruck
  $\sqrt{(0 - E(X))^2 \cdot P(X = 0) + (1 - E(X))^2 \cdot P(X = 1) + (2 - E(X))^2 \cdot P(X = 2) + (3 - E(X))^2 \cdot P(X = 3)}$
  ein Maß für die Abweichung von X vom Erwartungswert darstellen soll.
- Untersuchen Sie den obigen Ausdruck auch für die binomialverteilte Zufallsgröße Y.

Quadrat der Abweichung vom Erwartungswert

Wahrscheinlichkeit

Verstehen

Betrachtet man Wahrscheinlichkeitsverteilungen, dann ist nicht nur der „Mittelwert" der Verteilung von besonderem Interesse, sondern auch die Streuung der Daten um diesen Mittelwert.

Die Herleitung der Formel für binomialverteilte Zufallsgrößen ist etwas aufwendiger.

Die **Varianz** V ist ein Maß für den quadratischen Fehler, d. h. sie gibt die Summe der quadrierten Abweichungen vom Erwartungswert, jeweils multipliziert mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit, an:
$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$.
Für binomialverteilte Zufallsgrößen kann dies umgeformt werden zu $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Der Nachteil dieses Streuungsmaß liegt darin, dass der Wert V (X) eine andere Einheit als der Erwartungswert hat. Ein Vergleich der Werte in der Praxis ist deshalb schwierig.
Deshalb wird die sogenannte **Standardabweichung** σ als Quadratwurzel der Varianz zur Beschreibung der Daten erfasst, d. h. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt entsprechend $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Beispiel

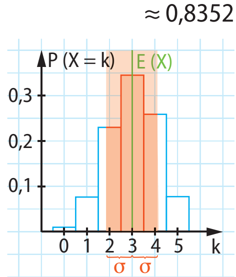
Betrachtet wird, wie im Beispiel aus 6.6, die binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 5$ und $p = 0{,}6$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert E (X) und die Standardabweichung σ (X).
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \leq \sigma)$.
c) Zeichnen Sie ein Histogramm. Tragen Sie auch den Erwartungswert und die Standardabweichung in das Histogramm ein.

Lösung:

a) $E(X) = \mu = n \cdot p = 3$
$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{1{,}2} \approx 1{,}1$

b) $\mu - \sigma = 3 - \sqrt{1{,}2} \approx 1{,}9$ und $\mu + \sigma = 3 + \sqrt{1{,}2} \approx 4{,}1$
Die gesuchten Werte für X liegen also bei $k = 2$, 3 und 4.
$P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(2 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) \approx 0{,}9224 - 0{,}08704$
$\approx 0{,}8352$

c)


Die σ-Umgebung um den Erwartungswert gibt an, welche Trefferzahlen um höchstens σ vom Erwartungswert entfernt sind. Hier sind dies die Treffer bei $k = 2$, 3 und 4 (vgl. Teilaufgabe b)).

Nachgefragt

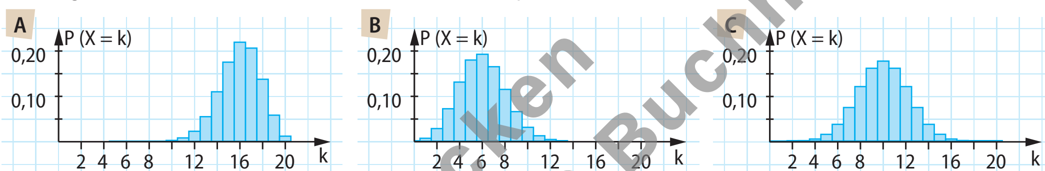
- Begründen Sie, weshalb in der Formel zur Berechnung von Varianz und Standardabweichung die Quadrate der Abweichungen und nicht die einfachen Abweichungen betrachtet werden.
- Aus Gründen der Vergleichbarkeit zieht man bei der Standardabweichung die Wurzel aus der Varianz. Begründen Sie.
- Beschreiben Sie die Bedeutung der Standardabweichung für kleine und große σ.

Aufgaben

1 Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt: $E(X) = 10$ und $\sigma(X) = 3$. Bestimmen Sie rechnerisch die Parameter p und n.

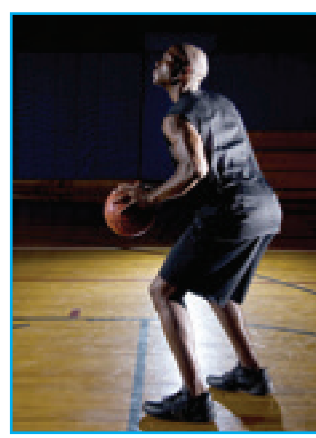
2 Begründen Sie: Vervierfacht man bei gleichbleibender Trefferwahrscheinlichkeit p die Anzahl n der Versuchsdurchführungen bei einer Bernoulli-Kette, so verdoppelt sich die Standardabweichung und vervierfacht sich der Erwartungswert.

3 Die nachfolgenden Histogramme zeigen jeweils die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgrößen $X_1 \sim B(20; 0{,}8)$, $X_2 \sim B(20; 0{,}3)$ und $X_3 \sim B(20; 0{,}5)$.



a) Ordnen Sie die Histogramme der richtigen Zufallsgröße zu und erläutern Sie, wie Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung im Diagramm verdeutlichen können.
b) Geben Sie für die drei Zufallsgrößen das Ereignis $|X - \mu| \leq \sigma$ in der Form $k_1 \leq X \leq k_2$ (mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$) an und erläutern Sie, wie im Histogramm der Bereich zu markieren ist, in dem gilt $|X - \mu| \leq \sigma$.
c) Fassen Sie allgemein die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| > \sigma)$ in Worte und berechnen Sie diese für die drei Zufallsgrößen.

4 Ein Basketballspieler trifft beim Freiwurf mit einer gleichbleibenden Trefferwahrscheinlichkeit von 80 %. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Treffer bei 100 Freiwürfen an.
a) Begründen Sie den Zusammenhang $P(|X - \mu| \leq \sigma) = P(76 \leq X \leq 84)$.
b) Erläutern Sie die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe a) im Sachzusammenhang.



5 Der Känguru-Test ist ein Multiple-Choice-Test, bei dem zu jeder Frage fünf Antwortmöglichkeiten angegeben sind, von denen jeweils genau eine korrekt ist. Der Test besteht aus 30 Fragen.
a) Berechnen Sie den Erwartungswert E (X) der Zufallsvariablen X: „Anzahl richtiger Antworten", wenn bei jeder Frage geraten wird. Interpretieren Sie das Ergebnis.
b) Berechnen Sie die Standardabweichung $\sigma(X)$.
c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl der richtigen Antworten beim Raten um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.

Entdecken

Ein Kopiergerät liefert mit einer festen Wahrscheinlichkeit p brauchbare Kopien. Ermitteln Sie durch systematisches Ausprobieren, wie groß p mindestens sein muss, dass die Wahrscheinlichkeit unter 20 Kopien keine unbrauchbare zu finden größer als 80 % bleibt.

Verstehen

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X ist durch die Parameter n und p der zugehörigen Bernoulli-Kette eindeutig festgelegt.

Nicht immer kann der gesuchte Parameter durch Rechnung bestimmt werden.

Die Werte der (kumulierten) Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen wurden früher in Tabellenwerken aufgelistet.

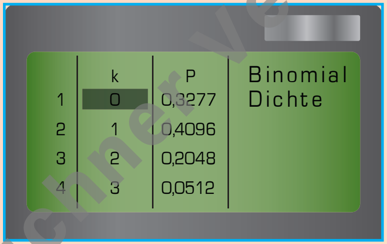
In einem Tabellenkalkulationsprogramm liefert der Befehl =Binom.Vert(k;n;p;0) den Wert P (X = k) und der Befehl =Binom.Vert(k;n;p;1) liefert den Wert P (X ≤ k) zu den Parametern n und p.

Um einen der drei Parameter n, p und k zu variieren und die Abhängigkeit der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten von diesem Parameter zu betrachten, können verschiedene Hilfsmittel herangezogen werden.

Auszug aus einem **Tabellenwerk**:

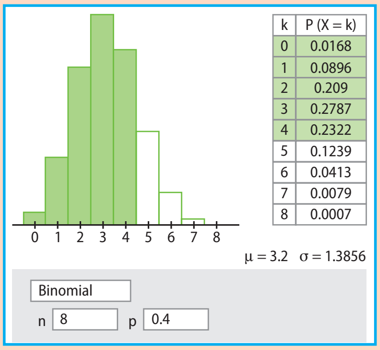
n	k \ p	0,2	0,25	0,3	$\frac{1}{3}$
3	0	0,5120	0,4219	0,3430	0,29663
	1	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444
	2	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222
	3	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370
4	0	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975
	1	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951
	2	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963
	3	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988
	4	0,0016	0,0039	0,0081	0,0124

Ausgabe eines **Taschenrechners**:



Tabellenkalkulationsprogramm:

Anzeige einer **Stochastik-App**:



Beispiel

Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit Parameter n = 20 und p = 0,4. Bestimmen Sie ein möglichst kleines Intervall [μ – k; μ + k] so, dass P (X ∈ [μ – k; μ + k]) > 0,9 gilt.

Lösung:

Es ist μ = n · p = 20 · 0,4 = 8. Tabellarisch ergibt sich nebenstehende Wahrscheinlichkeitsverteilung für X und damit durch Aufaddieren:

P (X ∈ [3; 12]) = 0,9752

P (X ∈ [4; 11]) = 0,9274

P (X ∈ [5; 10]) = 0,8214

Das gesuchte Intervall ist also [4; 11]. Zur Erklärung gibt man auch die Wahrscheinlichkeiten für das vorherige und das nachfolgende Intervall an.

k	P (X = k)
3	0,0123
4	0,0350
5	0,0746
6	0,1244
7	0,1659
8	0,1797
9	0,1597
10	0,1171
11	0,0710
12	0,0355

Nachgefragt

- Finden Sie jeweils ein Beispiel, in dem einer der Parameter n, p oder k bestimmt werden soll.
- Wie oft muss eine Münze mindestens geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens zehnmal Kopf geworfen zu haben?
  Sina meint: „Dies kann ich durch systematisches Probieren oder durch Rechnung lösen."
  Was meinen Sie zu ihrer Aussage?
- „Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $X \sim B(n; p)$ und $Y \sim B(n; 1 - p)$ sind zueinander symmetrisch." Veranschaulichen Sie die Aussage anhand einiger Beispiele und begründen Sie sie mithilfe der Bernoulli-Formel.

Aufgaben

Hinweis zu den Aufgaben 1 bis 3: Bestimmen Sie die Lösung so, dass sich für den gesuchten Parameter eine Ungleichung ergibt.

1 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 40$ und $p = 0,3$. Geben Sie die Werte der Parameter k bzw. k_1 und k_2 so an, dass die nachfolgenden Ungleichungen erfüllt sind.

a) $P(X \leq k) > 0,8$ **b)** $P(X \leq k) > 0,3$
c) $P(X > k) < 0,2$ **d)** $P(X > k) < 0,75$
e) $P(k_1 \leq X \leq k_2) > 0,9$ **f)** $P(k_1 < X < k_2) > 0,5$

2 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 100$ und p. Bestimmen Sie den Parameter p (auf zwei Dezimalstellen genau) so, dass die nachfolgenden Ungleichungen erfüllt sind.

a) $P(X \leq 90) \geq 0,95$ **b)** $P(X > 20) > 0,5$
c) $P(X < 35) < 0,7$ **d)** $P(X \geq 95) > 0,99$

3 Wie häufig muss ein Bernoulli-Experiment mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 mindestens durchgeführt werden, dass …

a) $P(X \geq 20) \geq 0,95$ **b)** $P(X \leq 30) < 0,01$
c) $P(X < 40) < 0,1$ **d)** $P(X > 95) > 0,999$

wenn X die Anzahl der Treffer der zugehörigen Bernoulli-Kette angibt?

Lösungen zu 3: 119; 25; 47; 40

4 Drei Viertel aller Jugendlichen zwischen 10 und 16 Jahren nutzen einen Messenger-Dienst um untereinander zu kommunizieren. Von diesen nutzen 40% sogar mehrere solche Dienste. Bestimmen Sie durch systematisches Probieren, wie groß eine Gruppe Jugendlicher mindestens sein muss, …

a) damit mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens ein Jugendlicher mit dabei ist, der einen Messenger-Dienst nutzt.
b) damit mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens ein Jugendlicher mit dabei ist, der mehrere Messenger-Dienste nutzt.

5 Ein Kopiergerät liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % unbrauchbare Kopien.

a) Es werden n Kopien angefertigt. Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle n Kopien brauchbar sind, kleiner als 10 %?
b) Von einem Rundschreiben werden 170 (brauchbare) Kopien benötigt.
Lucas fertigt zur Sicherheit 200 Kopien. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er trotzdem weniger als 170 brauchbare Kopien?

6 Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit p für einen Hauptgewinn beim Drehen eines Glücksrads mindestens sein muss, damit sich beim 20-maligen Drehen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 10 % mindestens ein Hauptgewinn ergibt.

7 Berechnen Sie, wie oft man zwei Würfel mindestens werfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens einen Sechserpasch zu würfeln.

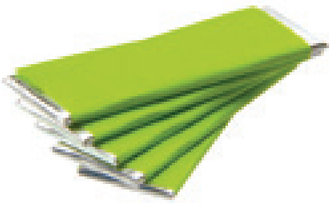
8 Es gibt immer wieder Autofahrer, die zu schnell fahren. Nach den Erfahrungen der Verkehrspolizei sind dies auf Autobahnen 2,5 % der Pkw-Fahrer, auf Landstraßen 5 %.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Fahrer, die von einer Verkehrskontrolle auf der Landstraße mindestens überprüft werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98 % mindestens ein Verkehrssünder befindet.

b) Auf der Autobahn müssen im Vergleich mehr Fahrzeuge kontrolliert werden, bevor mit der gleichen Wahrscheinlichkeit mindestens ein Verkehrssünder dingfest gemacht werden kann.
Begründen Sie durch Rechnung, dass mehr als doppelt so viele Kontrollen benötigt werden.

9 Eine bestimmte Sorte von Blumenzwiebeln keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 85 %. Ermitteln Sie die Anzahl an Blumenzwiebeln, die mindestens gepflanzt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95 % mindestens 20 blühende Blumen zu erhalten.

10 Ein Verpackungsgerät für Kaugummis arbeitet nicht mehr akkurat: 15 % der Kaugummis werden nicht mehr einwandfrei verpackt.



a) Berechnen Sie, ab wie vielen Kaugummis die Wahrscheinlichkeit, dass alle einwandfrei verpackt sind kleiner als 10 % wird.

b) Durch eine Wartung kann der Fehleranteil auf 5 % reduziert werden. Ermitteln Sie nun für die Anzahl der Kaugummis aus Teilaufgabe a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Kaugummis einwandfrei verpackt sind. Vergleichen Sie mit der Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe a) und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

11 Ermitteln Sie, wie groß die Ausschusswahrscheinlichkeit eines 3D-Druckers höchstens sein darf, damit sich unter 25 Drucken mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % keine Fehldrucke finden.

12 Eine Bürgerinitiative veranstaltet am viel besuchten Badesee der Gemeinde eine Unterschriftenaktion gegen eine geplante Windkraftanlage.
Berechnen Sie, wie hoch der Anteil p der Gegner der Windkraftanlage unter den Badegästen mindestens sein muss, damit sich unter zehn zufällig ausgewählten Badegästen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % wenigstens ein Gegner der Windkraftanlage befindet.

13 Eine Präzisionsfräse wird von zehn Elektromotoren angetrieben, die unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit p ordnungsgemäß arbeiten. Fällt auch nur ein Elektromotor aus, so ist die Fräse gestört. Ermitteln Sie, wie groß p mindestens sein muss, damit das Gerät mit 90 % Sicherheit arbeitet.

14 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}24$. Ermitteln Sie ein Intervall, das zum Erwartungswert symmetrisch liegt und in das der Wert der Zufallsgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % fällt.

15 Finden Sie durch systematisches Ausprobieren eine binomialverteilte Zufallsvariable $X \sim B(n;p)$, deren wahrscheinlichster Wert nicht derjenige ist, der am nächsten zum Erwartungswert liegt.

16 **a)** Untersuchen Sie für verschiedene feste Werte von p die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße $X \sim B(n; p)$ bei Variation von n. Beobachten Sie insbesondere die Lage und den Wert der höchsten auftretenden Wahrscheinlichkeit.
b) Versuchen Sie, Bedingungen an n und p zu formulieren, unter denen dieser Maximalwert kleiner als 10 % bleibt. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

17 In einer Urne befinden sich schwarze und weiße Kugeln. Aus der Urne werden nacheinander vier Kugeln gezogen, jede gezogene Kugel wird wieder zurück in die Urne gelegt. Ermitteln Sie den Anteil p der weißen Kugeln so, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: „Es wird genau eine schwarze oder genau eine weiße Kugel gezogen“ maximal wird.
Gehen Sie wie folgt vor:

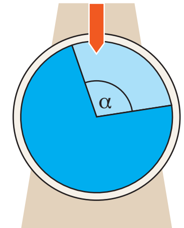
1. Bestimmen Sie P (E) in Abhängigkeit von p.
2. Fassen Sie diese Abhängigkeit als Funktion mit der Variablen p auf.
3. Ermitteln Sie den gesuchten Wert von p graphisch mithilfe eines Computerprogramms.

18 In einem Call-Center eines Anbieters für Handytarife haben im Mittel 65 % der Anrufer Fragen zu ihrer Abrechnung, während 19 % Fragen zu ihrem Tarif haben. Die restlichen Anrufer haben verschiedene sonstige Fragen.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 20 Anrufern mehr als die Hälfte Fragen zu ihrer Abrechnung haben.
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Arbeitstag erst der zehnte Anrufer Fragen zu seinem Tarif hat.
c) Berechnen Sie, wie viele Anrufe mindestens eingehen müssen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens ein Anrufer ein Anliegen vorträgt, das sich nicht auf seine Rechnung oder seinen Tarif bezieht.
d) In Einzelfällen berichten Anrufer über eine Störung. Berechnen Sie, wie groß der Anteil dieser Anrufer mindestens sein muss, damit unter den ersten 50 Anrufern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine Störung reklamiert wird.

Hinweis: Fassen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit als Funktion von p auf und betrachten Sie den Funktionsgraphen.

19 Die Abbildung zeigt ein Glücksrad. Einen Treffer erzielt man, wenn der Zeiger nach Stillstand des Rads auf den hellblau getönten Teil der Scheibe weist. Dabei ist $p_{\text{Treffer}} = \frac{\alpha}{360°}$ und $0° < \alpha < 360°$.



Vor einem Spiel wird als Spielregel vereinbart: Der Spieler dreht das Glücksrad zehnmal. Er gewinnt, wenn er dabei genau zwei Treffer erzielt.

a) Ermitteln Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von p.

b) Finden Sie heraus, wie groß p (und damit α) gewählt werden muss, damit die Gewinnwahrscheinlichkeit möglichst groß wird.

20 Für die Premiere eines Theaterstücks wird die Aula der Schule bestuhlt. In der ersten Reihe werden acht Plätze für Ehrengäste reserviert.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die die fünf erschienenen Ehrengäste haben, sich auf die reservierten Plätze zu verteilen, wenn …

1 die Personen nicht unterschieden werden.

2 die Personen unterschieden werden.

b) Nennen Sie im Sachzusammenhang einen möglichen Grund dafür, dass die möglichen Anordnungen der Ehrengäste auf den reservierten Plätzen nicht gleichwahrscheinlich sind – unabhängig davon, ob die Personen unterschieden werden oder nicht.

Bei jeder Aufführung wird der Vorhang 15-mal geschlossen. Dafür ist ein automatischer Mechanismus vorgesehen. Erfahrungsgemäß funktioniert der Mechanismus bei jedem Schließen des Vorhangs mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %. Nur dann, wenn der Mechanismus nicht funktioniert, wird der Vorhang von Hand zugezogen.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: „Bei einer Aufführung wird der Vorhang kein einziges Mal von Hand zugezogen."
B: „Bei einer Aufführung lässt sich der Vorhang zunächst viermal automatisch schließen, insgesamt wird der Vorhang jedoch genau zweimal von Hand zugezogen."

d) Beschreiben Sie ein Urnenexperiment, mit dem sich das Verhalten des Mechanismus bei 15-maligem Schließen des Vorhangs simulieren lässt.

e) Die Zufallsgröße X beschreibt, wie oft der Mechanismus beim Schließen des Vorhangs im Verlauf einer Aufführung nicht funktioniert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht.

21 Der Hersteller von Werbegeschenken versendet Kugelschreiber mit individuellem Aufdruck. Er behauptet, dass höchstens 10 % der Aufdrucke durch Fehler im Druck unleserlich sind. Ein Großkunde bestellt 10 000 Kugelschreiber und testet die Aussage des Herstellers, indem er 20 Kugelschreiber herausgreift und den Aufdruck begutachtet. Er will die Ware wieder zurücksenden, wenn mehr als zwei Kugelschreiber einen fehlerhaften Aufdruck aufweisen.

a) Erläutern Sie, warum das Entnehmen der Stichprobe näherungsweise als Bernoulli-Kette aufgefasst werden kann.

b) Beurteilen Sie das Prüfverfahren unter Bezugnahme auf die Wahrscheinlichkeit, mit der die Lieferung zurückgeschickt wird, obwohl die Angaben des Herstellers korrekt sind.

c) Der Hersteller möchte dem Kunden eine alternative Entscheidungsregel für die Stichprobe vorschlagen. Formulieren Sie eine Entscheidungsregel, die den Interessen des Herstellers entgegenkommt und begründen Sie Ihren Vorschlag.

Seite 182

Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette

Ein Zufallsexperiment, bei dem es nur zwei mögliche Ausgänge gibt, heißt **Bernoulli-Experiment**.
Meist wird der Ergebnisraum in der Form
$\Omega = \{$„Treffer“; „Niete“$\}$ oder
$\Omega = \{1; 0\}$ beschrieben. Dabei ist
P („Treffer“) = p und P („Niete“) = 1 – p.

Ein mehrstufiges (n-stufiges) Zufallsexperiment, dessen Teilexperimente aus dem gleichen Bernoulli-Experiment bestehen, heißt **Bernoulli-Kette** (der Länge n).

$\Omega = \{$Gewinn; Niete$\}$
P („Gewinn“) $= \frac{1}{4}$ und P („Niete“) $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
Dreimaliges Drehen des Glücksrads entspricht einer Bernoulli-Kette der Länge 3.

Seite 184

Der Binomialkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen.
Man kann damit auch angeben, wie viele Pfade im Baumdiagramm einer Bernoulli-Kette der Länge n zu k Treffern führen.

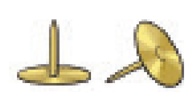
- Beim Lotto 6 aus 49 werden 6 Kugeln aus 49 ausgewählt. Dafür gibt es $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ Möglichkeiten.
- Im Baumdiagramm zum 10-maligen Werfen einer Münze gibt es $\binom{10}{3} = 120$ Pfade zum Ereignis „Es wird dreimal Kopf geworfen“.

Seite 186

Die Bernoulli-Formel

Die Wahrscheinlichkeit bei der Durchführung einer Bernoulli-Kette der Länge n (mit Trefferwahrscheinlichkeit p) k Treffer zu erzielen, beträgt
$P = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ (**Bernoulli-Formel**)

Eine Reißzwecke landet mit p = 0,4 auf dem Kopf. Die Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von fünf Reißzwecken drei auf den Kopf landen, beträgt
$P = \binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot (1 - 0{,}4)^{5-3} \approx 0{,}2304.$

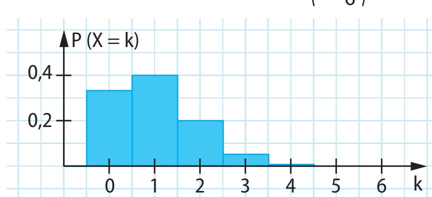


Seite 188, 190

Die Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsgröße X heißt **binomialverteilt mit den Parametern n und p**, wenn für ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt:
$B(n; p; k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$
Die häufigste graphische Darstellung einer Binomialverteilung ist das **Histogramm**.

Werfen mit sechs Würfeln.
X: „Anzahl der Sechser“; $X \sim B\left(6; \frac{1}{6}\right)$

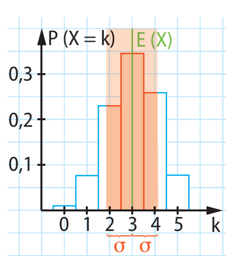


Seite 194, 196

Erwartungswert und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B(n; p)$ kann der Erwartungswert zu $E(X) = n \cdot p$ umgeformt werden. Für die Standardabweichung einer solchen Zufallsgröße gilt: $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

$X \sim B(5; 0{,}6)$
$E(X) = 5 \cdot 0{,}6 = 3$
$\sigma(X) = \sqrt{5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}$
$\approx 1{,}1$



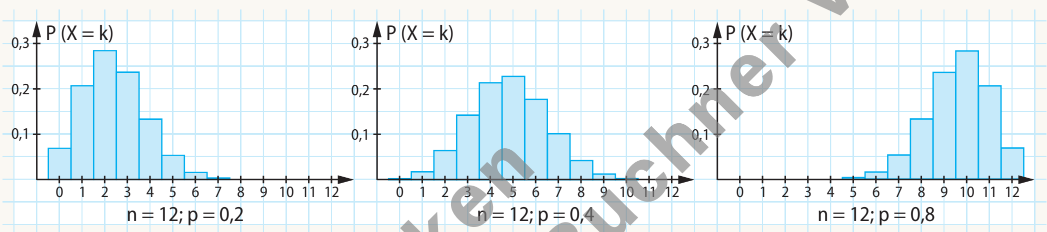
6 Auf unterschiedlichen Wegen

1 Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten bei den beschriebenen zufälligen Vorgängen.

a) Die Sportler, die bei einem Wettbewerb mit zwölf Teilnehmern einen Platz auf dem Podium erhalten.
b) Die Zusammensetzung eines Gremiums aus drei Damen und zwei Herren, für das insgesamt zwölf Damen und zehn Herren kandidieren.
c) Mögliche Anordnung aller Buchstaben des Wertes HONOLULU.

a) Eine Sechsergruppe bei einem Sportwettbewerb, von deren Mitgliedern zwei aus einem Lostopf mit acht und vier aus einen Lostopf mit 16 Mannschaften gezogen werden.
b) Das Trefferbild eines Biathleten bei fünf Schuss.
c) Für zehn Zuschauer stehen noch drei Sitzplätze zur Verfügung.

2 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X hängt von den Parametern p und n ab. Beispielsweise erhält man folgende Histogramme:



a) Erstellen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ein Histogramm für die Zufallsvariable $X \sim \text{Bin}(16; p)$ mit variablem Parameter p.
b) Lassen Sie sich auch jeweils E (X) sowie σ (X) anzeigen.
c) Untersuchen und beschreiben Sie Abhängigkeiten von der Variablen.

a) Erstellen Sie mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms ein Histogramm für die Zufallsvariable $X \sim \text{Bin}(n; 0{,}2)$ mit variablem Parameter n.
b) Lassen Sie sich auch jeweils E (X) sowie σ (X) anzeigen.
c) Untersuchen und beschreiben Sie Abhängigkeiten von der Variablen.

3 Beim Zoll stehen neun Personen an. Vier von ihnen sind Schmuggler. Der Zollbeamte bittet drei der neun Personen zur Kontrolle. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit unter diesen drei Personen …

1 kein Schmuggler ist.
2 genau ein Schmuggler ist.

1 höchstens ein Schmuggler ist.
2 mindestens ein Schmuggler ist.

4 Lukas verwandelt beim Fußball Elfmeterschüsse mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 60 %. Bestimmen Sie, wie viele Elfmeter er schießen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal erfolgreich zu sein.

Lösen Sie durch systematisches Probieren.

Lösen Sie durch Rechnung.

5 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der nachfolgenden Ereignisse auf zwei Arten:
a) Überlegungen zu den Pfadregeln im zugehörigen Baumdiagramm
b) geschicktes Abzählen und einen Laplace-Ansatz

In einer Klasse mit 15 Schülerinnen und 10 Schülern wird ausgelost, welche fünf Teilnehmer zum SMV-Wochenende mitfahren dürfen.
A Es darf nur eine Schülerin mitfahren.
B Die ersten fünf Schüler des Alphabets werden ausgelost.
C Anna und Jan sind dabei.

Ein gewöhnlicher Würfel wird zehnmal geworfen.
A Es werden nur ungerade Zahlen gewürfelt.
B Genau zwei Sechsen werden gewürfelt.
C Die ersten fünf Würfe sind größer, die letzten fünf Würfe kleiner als drei.

6 Fehler passieren! Wichtig ist es, die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens realistisch einschätzen zu können.

Ein Kopiergerät liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % unbrauchbare Kopien. Lukas fertigt 20 Kopien an.
Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten folgender Ereignisse:
E_1: „Alle 20 Kopien sind brauchbar."
E_2: „Mehr als drei Viertel der Kopien sind brauchbar."
E_3: „Es ist genau eine Kopie unbrauchbar, und diese befindet sich unter den letzten fünf."
E_4: „Von den Kopien sind genau drei unbrauchbar, und diese folgen unmittelbar aufeinander".

Nach Angaben der Post erreichen 90 % all derjenigen Inlandsbriefe, die vor 18 Uhr aufgegeben werden, am nächsten Tag den Empfänger. Sophie schreibt 16 Einladungen zu einem Sommerfest und wirft sie vor der 18-Uhr-Leerung in den Briefkasten.
Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten folgender Ereignisse:
E_1: „Alle 16 Briefe werden am nächsten Tag zugestellt."
E_2: „Alle Briefe bis auf einen werden am nächsten Tag zugestellt."
E_3: „Die Briefe von Anna und Tom werden nicht zugestellt."

7 Beurteilen Sie die nachfolgenden Sachverhalte, indem Sie eine geeignete Wahrscheinlichkeitsbetrachtung anstellen.

Nach Angaben eines Leuchtmittelgroßhändlers ist durchschnittlich eine von zwanzig LED-Lämpchen einer bestimmten Sorte defekt.

Ein Dekorateur meint: „Wenn ich 100 Lämpchen für eine Schaufensterdekoration benötige und 110 LEDs kaufe, also 10 % mehr als benötigt, dann bin ich auf der sicheren Seite."

Ein Reiseunternehmen führt Gruppenreisen durch. Erfahrungsgemäß müssen 3% der Gäste die Reise kurzfristig stornieren.

Eine Reise soll für eine Gruppe von 80 Personen geplant werden. Der Veranstalter kalkuliert: „Wenn ich 82 Plätze verkaufe, dann ist die Wahrscheinlichkeit gering, dass am Abreisetag zu viele Gäste auftauchen."

1 Begründen Sie, warum es sich beim beschriebenen Zufallsexperiment um eine Bernoulli-Kette handelt. Geben Sie jeweils die Parameter n und p an.

a) Die Einnahme eines bestimmten Medikaments führt in 75 % aller Fälle zu einer Linderung der Symptome. Im letzten Jahr wurde es 3086 Patienten verschrieben.

b) Pia versucht mit einem gezinkten Würfel, bei dem die Sechs durchschnittlich doppelt so häufig geworfen wird wie alle anderen Zahlen, beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel aus dem Haus zu kommen.

c) Aus Erfahrung weiß ein Gärtner, dass Tulpenzwiebeln mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % austreiben. Er setzt 1000 Stück gleichzeitig ein.

2 Bei einem Gewinnspiel werden Kugeln aus einer Urne mit zehn nummerierten Kugeln gezogen. Es handelt sich dabei um vier rote und sechs blaue Kugeln.
Erläutern Sie, welche Bedeutung den nachfolgenden Termen im Sachzusammenhang zukommen könnte.

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ **b)** $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3}$ **c)** 10^3 **d)** $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{10^3}$ **e)** $\frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}}$

3 In einer Klasse sind 10 Jungen und 15 Mädchen.

a) Erläutern Sie die Bedeutung der nachfolgenden Terme im Sachzusammenhang.

1 $\binom{15}{7}$ **2** $\binom{10}{5}$ **3** $\binom{25}{12}$ **4** $\binom{15}{7} \cdot \binom{10}{5}$

b) Begründen Sie anschaulich, warum sich die Ergebnisse von **3** und **4** unterscheiden.

4 Eine Bernoulli-Kette hat die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer. Ordnen Sie jeder Angabe in der linken Tabelle den passenden Ansatz in der rechten Tabelle zu.

a)	$P(X = 2)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}1$	J.
b)	$P(X \leq 4)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}9$	
c)	$P(1 < X < 4)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}1$	
d)	$P(X \leq 1)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}1$	
e)	$P(X > 1)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}9$	
f)	$P(X > 3)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}1$	
g)	$P(1 < X \leq 4)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}9$	
h)	$P(X < 5)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}1$	
i)	$P(3 < X < 5)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}9$	
j)	$P(X \geq 0)$ für $n = 5$ und $p = 0{,}1$	

L	$1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}1^5$
E	$\binom{5}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3 + \binom{5}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^2$
N	$1 - 0{,}1^5 - 5 \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^1$
O	$\binom{5}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9 + 0{,}1^5$
U	$\binom{5}{2} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^3 + \binom{5}{3} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^2 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1$
J	$\binom{5}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^3$
R	$0{,}9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4$
L	$5 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1$
B	$1 - P(X = 5) = 1 - 0{,}9^5$
I	1

5 Ein siebenstufiges Galton-Brett steht etwas schräg, sodass die Wahrscheinlichkeit nach rechts zu fallen auf jeder Stufe 0,3 beträgt.

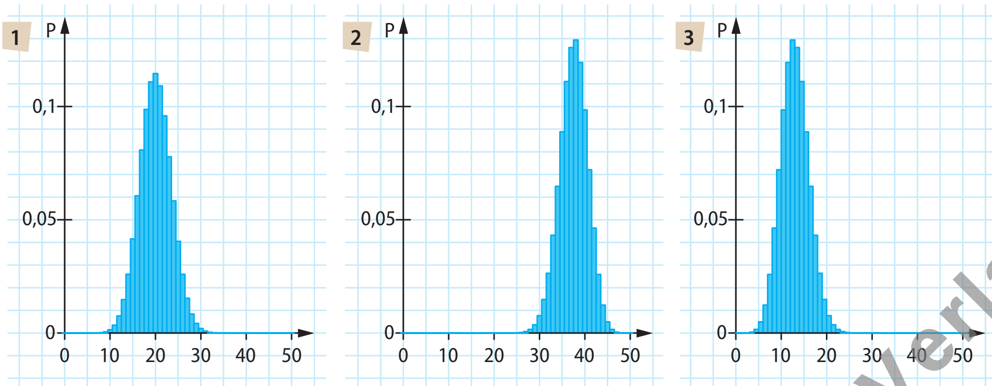
a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Wege, die in den Auffangbehälter 4 führen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel …

1 nur auf den beiden letzten Stufen nach rechts fällt.

2 in Auffangbehälter 3 oder 5 landet.

6 Finden Sie heraus, welches der folgenden Histogramme die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit $n = 50$ und $p = 0{,}25$ darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort.



7 Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $E(X) = 40$ und der Standardabweichung $\sigma(X) = 6$. Bestimmen Sie die Parameter n und p der Binomialverteilung.

8 Ein Laplace-Würfel trägt auf einer seiner Flächen ein Auge, auf zwei Flächen jeweils zwei Augen und auf drei Flächen jeweils drei Augen. Bei einem Spiel wird der Würfel zweimal geworfen. Man gewinnt, wenn der Summenwert der beiden Augenanzahlen ungerade ist.

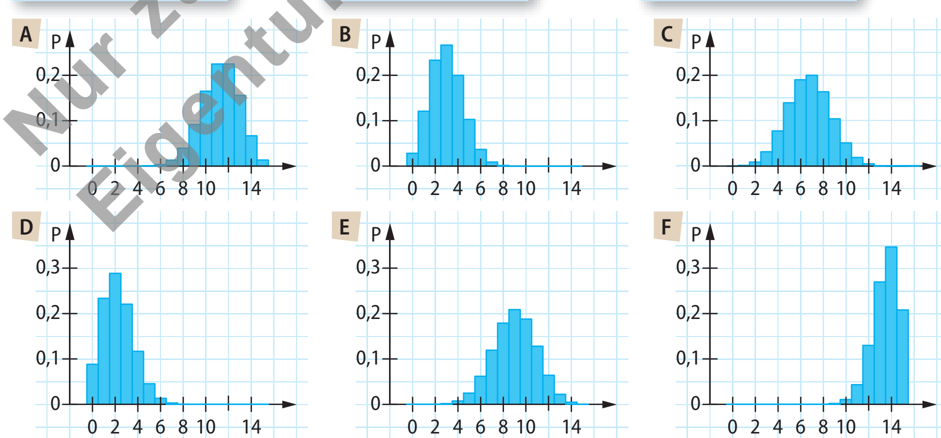
a) Zeigen Sie, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{4}{9}$ ist.

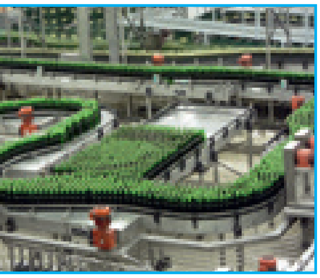
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man entweder bei genau zwei oder bei genau drei von zehn Spielen gewinnt.

9 Ordnen Sie den binomialverteilten Größen **1** bis **6** jeweils die passende graphische Darstellung zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

1 $X \sim B(15; 0{,}15)$ **2** $X \sim B(15; 0{,}30)$ **3** $X \sim B(15; 0{,}45)$

4 $X \sim B(15; 0{,}60)$ **5** $X \sim B(15; 0{,}75)$ **6** $X \sim B(15; 0{,}90)$





10 In einer Brauerei wird Limonade maschinell in 0,5-Liter-Flaschen abgefüllt. Da die Maschine diesen Sollwert nicht exakt einhalten kann, hat der Kunde ein Recht darauf, dass mindestens 95 % der Flaschen mindestens 490 ml enthalten. Herr Sturm kauft sich einen Kasten mit 20 Limonadenflasche.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er Glück hat und in allen Flaschen mindestens 490 ml Limonade sind.

b) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in genau einem Viertel der Limonadenflaschen zu wenig Limonade ist.

11 Beim maschinellen Abfüllen von Marmelade wird der „Sollwert" von 400 g nicht immer genau eingehalten. Der Hersteller garantiert aber, dass 95 % der Gläser mindestens 390 g Marmelade enthalten. Bei einer Stichprobe werden 20 aus der laufenden Produktion zufällig entnommene Geleegläser überprüft. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) alle Gläser mindestens 390 g Marmelade enthalten.

b) höchstens eines der 20 Gläser weniger als 390 g Marmelade enthält.

c) mindestens eines der 20 Gläser weniger als 390 g Marmelade enthält.

12 Beim Einchecken an einem Flughafen kommen die Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Transportband. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gepäckstück auf diesem Band das Ziel München hat, beträgt 0,22.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
Von zehn zufällig ausgewählten Gepäckstücken auf diesem Band …

1. haben höchstens drei das Ziel München.
2. hat nur das zehnte das Ziel München.
3. ist das zehnte Gepäckstück das zweite mit Ziel München.

b) Erläutern Sie in diesem Sachzusammenhang die folgenden Terme:
$P(E_4) = 0{,}22^3 \cdot 0{,}78^7$ $\qquad$ $P(E_5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}22^5 \cdot 0{,}78^5$

13 Ein Laplace-Würfel wird so lange geworfen, bis die zweite Sechs fällt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies …

a) spätestens beim dritten Wurf geschieht.

b) beim zehnten Wurf geschieht.

c) bei den ersten zehn Würfen nicht der Fall ist.

14 In einer Stadt gibt es 320 000 ausschließlich sechsstellige Telefonnummern.
Ein Kleinkind drückt zufällig sechs Zifferntasten.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind jemanden aus der Stadt „anruft".

b) Ermitteln Sie, wie oft das Kleinkind sein Experiment wiederholen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einmal eine der vergebenen Nummern der Stadt zu wählen.

15 Für eine Zufallsgröße X ist $E(X) = 10$ und $\sigma(X) = 4$.

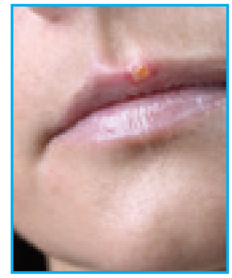
a) Begründen Sie durch Rechnung, dass X nicht binomialverteilt sein kann.

b) Geben Sie den Wert an, den $\sigma(X)$ nicht überschreiten kann, wenn X binomialverteilt mit $E(X) = 10$ ist.

16 Etwa 40 % der Erwachsenen tragen ein Herpes-Virus im Körper, ohne jemals Bläschen oder andere Symptome zu spüren. Man sagt, das Virus „schlummert“. Bei weiteren 50 % der Bevölkerung bricht die Krankheit gelegentlich aus.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter hundert zufällig ausgewählten Erwachsenen genau 50 Personen mit schlummerndem Herpes-Virus sind.

b) Ermitteln Sie, wie viele Erwachsene man mindestens untersuchen muss, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens eine Person mit schlummerndem Virus ist.



17 Ein Graphologe bewirbt sich um eine Stelle. Der Personalchef möchte ihn testen und legt ihm dazu Schriftproben vor. Jede Schriftprobe stammt entweder von einer entscheidungsfreudigen oder einer zögerlichen Person. Dies wird dem Bewerber mitgeteilt.

Graphologen beschäftigen sich mit der Analyse von Handschriften.

Meine Handschrift
Meine Handschrift
Meine Handschrift

a) Man plant, den Bewerber einzustellen, wenn er bei mehr als zwei Dritteln von zwölf vorgelegten Schriftproben richtig entscheidet. Begründen Sie, dass der Bewerber die Stelle mit mehr als 7 % Wahrscheinlichkeit bekommen würde, wenn er nur rät.

Dem Personalchef ist es zu riskant, dass ein nur ratender Bewerber die Stelle mit mehr als 7 % Wahrscheinlichkeit bekommt. Er fordert, den Test so zu modifizieren, dass die Einstellungschance eines nur ratenden Bewerbers unter 3 % gedrückt wird. Man entscheidet sich, die Anzahl vorgelegter Schriftproben auf 30 zu erhöhen und bei mehr als zwei Dritteln eine richtige Entscheidung zu verlangen.

b) Zeigen Sie, dass bei dem modifizierten Testverfahren die Forderung des Personalchefs erfüllt wird.

c) Der Graphologe interessiert sich anders als der Personalchef mehr dafür, ob seine Fähigkeiten fälschlicherweise nicht erkannt werden. Er schätzt, dass er bei jeder einzelnen Schriftprobe mit 75% Wahrscheinlichkeit richtig entscheidet. Bestimmen Sie, wie hoch in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit ist, dass er bei dem modifizierten Test als nur ratend eingestuft wird.

18 Betrachtet wird eine binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B(n; p)$.

a) Zeigen Sie durch geeignete Termumformungen, dass für die Standardabweichung von X der folgende Zusammenhang gilt: $\sigma(X) = \sqrt{-n \cdot \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}n}$.

b) Begründen Sie mit dem Zusammenhang aus Teilaufgabe a): Für festes n und …

1 $p \in [0; \frac{1}{2}[$ wächst die Standardabweichung streng monoton.
2 $p \in]\frac{1}{2}; 1]$ fällt die Standardabweichung streng monoton.
3 $p = \frac{1}{2}$ wird die Standardabweichung maximal.

c) Beschreiben Sie qualitativ, welche Auswirkungen die Ergebnisse aus Teilaufgabe b) für die Histogrammdarstellung von X haben.

19 Für eine Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ lässt sich für beliebiges $a > 0$ die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geq a)$ abschätzen.

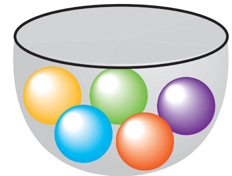
Es gilt: $P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$ (Ungleichung von Bienaymé-Tschebyschow).

a) Fassen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X - \mu| \geq \sigma)$ in Worte und begründen Sie, dass die obige Ungleichung für diesen Fall keine wertvolle Abschätzung liefert.

b) Berechnen Sie für eine binomialverteilte Zufallsgröße $X \sim B(50; 0{,}4)$ die beiden Wahrscheinlichkeiten $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$ und $P(|X - \mu| \geq 3\sigma)$ und vergleichen Sie die tatsächlichen Werte mit den Abschätzungen aus der obigen Ungleichung.

Um die Anzahl der möglichen Ergebnisse bei mehrstufigen Zufallsexperimenten zu bestimmen, ist es häufig sinnvoll, die Analogie zu einem passenden **Urnenexperiment** herzustellen.

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln werden k Kugeln entnommen.
Wir unterscheiden nun zwischen verschiedenen Typen von Urnenexperimenten.



Urne mit fünf unterscheidbaren Kugeln.

1. Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit n Kugeln wird k-mal nacheinander gezogen. Dabei wird nach jedem Zug die gezogene Kugel wieder in die Urne zurückgelegt. Die Reihenfolge der Ergebnisse wird registriert.

Möglichkeiten: Es gibt n^k Möglichkeiten.

Beispiel: An einem Zahlenschloss lassen sich dreistellige Zahlen aus den Ziffern 0 bis 9 darstellen.

2. Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit n Kugeln wird k-mal nacheinander gezogen ($k \le n$). Dabei wird nach jedem Zug die gezogene Kugel zur Seite gelegt. Die Reihenfolge der Ergebnisse wird registriert.

Möglichkeiten: Es gibt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten.

Sonderfall: Aus einer Urne mit n Kugeln wird n-mal nacheinander gezogen.
Es gibt $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ (lies „n Fakultät") Möglichkeiten.

Beispiel: Anzahl der Möglichkeiten für die ersten drei Plätze bei einem Wettbewerb mit zehn Teilnehmern.

Erinnern Sie sich:
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
Es gilt zum Beispiel:
$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{10!}{7!}$

3. Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

Urnenexperiment: Aus einer Urne mit n Kugeln werden k Kugeln gleichzeitig gezogen bzw. k-mal nacheinander eine Kugel gezogen und zur Seite gelegt ($k \le n$). Die Reihenfolge spielt dabei – wie bei den Lottoziehungen – keine Rolle.

Möglichkeiten: Es gibt $\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ Möglichkeiten.

Beispiel: Lotto 6 aus 49

Der dritte Fall ist Ihnen bereits aus Kapitel 6.2 bekannt. Dort haben Sie den Binomialkoeffizienten kennengelernt, der die Anzahl der Möglichkeiten angibt, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen (ohne die Reihenfolge zu beachten). Mit der obigen Herleitung steht Ihnen nun auch eine Formel für die Berechnung des Binomialkoeffizienten zur Verfügung:

Formel für den Binomialkoeffizient:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

Es gilt zum Beispiel: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$

Beispiel: Die Englischlehrerin hat drei Wörterbücher geschenkt bekommen. Sie verlost sie unter den 23 Schülerinen und Schülern ihrer zehnten Klasse (jeder Schüler bekommt höchstens ein Buch). Berechnen Sie, auf wie viele verschiedene Arten dies möglich ist, falls es sich um drei Wörterbücher handelt, …

a) von denen keines einem anderen gleicht.

b) die alle identisch sind.

Lösung:

a) $23 \cdot 22 \cdot 21 = 10\,626$

Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge: Für das erste Buch hat sie 23 Möglichkeiten, für das zweite noch 22 Möglichkeiten, für das dritte verbleiben noch 21.

b) $\binom{23}{3} = \frac{23!}{(23-3)!\,3!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1771$

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge: Wenn für jeweils drei gezogene Schüler die Auswahl der Bücher nicht mehr unterschieden werden kann, dann sind in a) sämtliche 3er- Anordnungen zu viel enthalten.

1 **a)** Begründen Sie die Gleichheit: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

b) Wahr oder falsch? Fünf Personen haben $\frac{10!}{5!}$ verschiedene Möglichkeiten, auf zehn Stühlen Platz zu nehmen.

2 In einer Urne sind 15 Kugeln mit den Zahlen 1 bis 15. Erklären Sie die Bedeutung der folgenden Terme in einem passenden Urnenexperiment.

a) 15^6 **b)** $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$ **c)** $\binom{15}{7}$ **d)** $\frac{15!}{6! \cdot 9!}$ **e)** $\frac{15!}{9!}$

3 Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten im Kopf.

a) $\binom{100}{0}$ **b)** $\binom{15}{14}$ **c)** $\binom{15}{15}$ **d)** $\binom{70}{1}$ **e)** $\binom{8}{2}$

4 In Kapitel 6.2 haben Sie bereits einige Eigenschaften des Binomialkoeffizienten anhand des Pascal'schen Dreiecks begründet. Leiten Sie Eigenschaften des Binomialkoeffizienten nun auch mithilfe der Formel her.

a) **1** $\binom{n}{0} = 1;\ n \in \mathbb{N}$ **2** $\binom{n}{1} = n;\ n \in \mathbb{N}$ **3** $\binom{n}{n} = 1;\ n \in \mathbb{N}$

b) rekursive Formel zur Berechnung des Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};\ k \le n,\ n \in \mathbb{N}$

c) Symmetrie des Binomialkoeffizienten: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};\ k \le n,\ n \in \mathbb{N}$

5 **a)** Berechnen Sie ohne Hilfsmittel. Beschreiben Sie die Bedeutung in einem Urnenexperiment.

1 $\binom{4}{2}; \binom{5}{3}$ **2** $\binom{5}{2}; \binom{12}{4}$ **3** $\binom{6}{1}; \binom{10}{8}$ **4** $\binom{1000}{999}; \binom{49}{6}$

b) Zeigen Sie die Gleichheit.

1 $\binom{12}{10} = \binom{12}{2}$ **2** $\binom{25}{10} = \binom{25}{15}$ **3** $\binom{33}{3} = \binom{33}{30}$

6 **a)** Begründen Sie, dass man die Buchstaben des Worts HONOLULU auf $\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$ verschiedene Arten anordnen kann.

b) Ermitteln Sie, auf wie viele Arten man die Buchstaben folgender Wörter anordnen kann.

1 ANANAS **2** MISSISSIPPI **3** Ihr Vorname

Dabei werden auch „Wörter" betrachtet, die keinen Sinn ergeben (z. B. NOLLUHOU).

7 Vor der Ausgabe eines Schnellimbiss stehen acht Personen in der Warteschlange. Es öffnet eine zweite Ausgabe und drei Personen wechseln zur zweiten Ausgabe. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie sich drei der acht Personen vor der zweiten Ausgabe anordnen können.

Aufgaben zur Einzelarbeit

Überprüfen Sie Ihre Fähigkeiten und Kompetenzen. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Aufgaben und bewerten Sie anschließend Ihre Lösungen mit einem Smiley.

☺	😐	☹
Das kann ich **wirklich gut!**	Das kann ich **fast!**	Das muss ich **noch üben!**

1 Entscheiden Sie, ob sich das beschriebene Zufallsexperiment als Bernoulli-Kette modellieren lässt und geben Sie gegebenenfalls die Parameter n und p an.

a) Ein Forscher weiß aus langjähriger Erfahrung, dass die Erfolgsaussichten bei einem bestimmten Experiment 80 % betragen. An einem Tag führt er dieses Experiment achtmal durch.

b) Das Ziehen von fünf Losen aus einer Lostrommel mit 100 Gewinnlosen und 400 Nieten.

c) Das Würfeln mit vier Würfeln. Es soll ein Vielfaches von 3 gewürfelt werden.

2 Ermitteln Sie die Anzahl der Möglichkeiten.

a) An einem Golfturnier nehmen acht Personen teil – jeder soll gegen jeden spielen.

b) Vor einer Casting-Show mit 20 Kandidaten werden Wetten abgeschlossen: Die drei Finalteilnehmer sollen getippt werden.

c) Beim zehnmaligen Werfen einer Münze erscheint viermal „Kopf“.

3 Sechs übergewichtige Patienten wollen unter Aufsicht eines Arztes eine Schlankheitskur beginnen. Zwei von ihnen sind sogar stark übergewichtig. Untersuchungen des Arztes ergeben, dass – entsprechende Betreuung vorausgesetzt – bei 60 % der stark Übergewichtigen und bei 75 % der (nicht stark) Übergewichtigen, die Schlankheitskur erfolgreich ist.

a) Begründen Sie, mit welchen der folgenden Terme man die Wahrscheinlichkeit berechnen kann, dass bei genau drei der vier nicht stark Übergewichtigen die Kur erfolgreich verläuft.

1 $\binom{6}{3} \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25$ **2** $0{,}75^3 \cdot 0{,}25$

3 $\binom{4}{3} \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25$ **4** $4 \cdot 0{,}75^3 \cdot 0{,}25$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens fünf der sechs Personen die Schlankheitskur erfolgreich beenden.

4 Eine Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 12$ und $p = 0{,}4$.

a) Bestimmen Sie die nachfolgenden Wahrscheinlichkeiten.

1 $P(X = 5)$ **2** $P(X \leq 3)$

3 $P(X > 6)$ **4** $P(4 \leq X < 8)$

b) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$.

c) Bestimmen Sie $P(|X - E(X)| < \sigma)$.

d) Fertigen Sie mithilfe eines geeigneten Computerprogramms eine Histogrammdarstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und markieren Sie die in der Aufgabe vorkommenden Wahrscheinlichkeiten und Kennzahlen.

5 Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder von ihm hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % fehlerhaft. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl fehlerhafter Chips.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der von 100 Chips genau 15 fehlerhaft sind.

b) Bestimmen Sie das kleinstmögliche Intervall um den Erwartungswert von X, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt.

c) Bestimmen Sie, wie viele Chips der Produktion mindestens entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter Chip dabei ist.

6 Bei einem Glücksrad führt einer von 25 gleichgroßen Sektoren zu einem Hauptgewinn. Ermitteln Sie mit geeigneten Hilfsmitteln, wie oft das Glücksrad mindestens gedreht werden muss, um mit mehr als 5 % Wahrscheinlichkeit mindestens zwei Hauptgewinne zu erzielen.

Aufgaben für Lernpartner

Arbeitsschritte

1. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben zuerst allein.
2. Suchen Sie sich einen Partner oder eine Partnerin und arbeiten Sie zusammen weiter: Erklären Sie sich gegenseitig Ihre Lösungen. Korrigieren Sie fehlerhafte Antworten.

Sind folgende Behauptungen richtig oder falsch? Begründen Sie.

A Bei einem Bernoulli-Experiment ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Teilereignis gleich groß.

B Ein Bernoulli-Experiment hat immer genau zwei mögliche Ausgänge.

C Das gleichzeitige Würfeln mit drei Würfeln ist keine Bernoulli-Kette.

D Das mehrfache Ziehen aus einer Urne mit schwarzen und weißen Kugeln ist eine Bernoulli-Kette.

E Das Baumdiagramm zu einer Bernoulli-Kette der Länge n hat 2^n Pfade.

F Die Anzahl der Pfade in einem Baumdiagramm zu einer Bernoulli-Kette der Länge n, die zu k Treffern führen, ist $k \cdot n$.

G Mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ lässt sich die Anzahl der Möglichkeiten ermitteln, k Personen aus einer Gruppe von n Personen auszuwählen.

H Würde man beim Lotto 6 aus 49 verlangen, dass die Zahlen in der richtigen Reihenfolge getippt werden, müsste man die Anzahl der Tippmöglichkeiten durch 6! teilen.

I Bei einer Bernoulli-Kette der Länge 7 und der Trefferwahrscheinlichkeit 0,2 ist die Wahrscheinlichkeit drei Treffer zu erzielen $0{,}2^3 \cdot 0{,}8^7$.

J Die Wahrscheinlichkeit beim achtmaligen Münzwurf viermal Kopf zu werfen, ist genauso groß, wie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten vier und unter den letzten vier Würfen je zweimal Kopf vorkommt.

K Ist eine Zufallsgröße X binomialverteilt mit den Parametern n und p, dann nimmt sie n Werte an.

L Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße ist auch der wahrscheinlichste Wert.

M Sind Erwartungswert und Standardabweichung einer Zufallsgröße bekannt, so lassen sich die Parameter n und p eindeutig ermitteln.

N Für eine binomialverteilte Zufallsgröße gilt:
$1 - P(X > k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = k)$

Ich kann …	„Am Ziel!“-Aufgaben	Hilfe
… die Begriffe Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette erläutern und ein Bernoulli-Experiment von anderen Zufallsexperimenten unterscheiden.	1, A, B, C, D, E	S. 182
… die Bedeutung der Binomialkoeffizienten mithilfe eines Baumdiagramms erläutern.	2, F, G, H	S. 184
… die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus einer n-elementigen Menge auszuwählen, mithilfe des Binomialkoeffizienten bestimmen.	2, H, I	S. 184 S. 210
… die Wahrscheinlichkeitsverteilung binomialverteilter Zufallsgrößen rechnerisch (auch unter Verwendung technischer Hilfsmittel) ermitteln und graphisch darstellen.	3, 4, 5, J, K, L	S. 186 S. 188 S. 190
… Erwartungswert und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln und im Sachzusammenhang interpretieren.	4, 5, L, M	S. 194 S. 196
… fehlende Parameter einer binomialverteilten Zufallsgröße ermitteln.	5, 6, N	S. 198

C.C.BUCHNER

T61010